بسمه تعالی

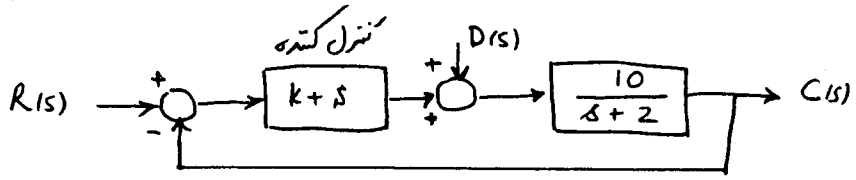
دانشگاه هرمزگان

گروه مهندسی برق

سیستم های کنترل خطی — امتحان پایان ترم — وقت : ۱۸۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: — **شماره دانشجویی:** — (۱۴۰ نمره)

۱- در سیستم شکل مقابل:



الف- مقدار k را بگونه ای بیابید که اثر اغتشاش پله در خروجی ۲٪ باشد. (۷ نمره)

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{\frac{10}{s+2}}{1+(k+s)\frac{10}{s+2}} = \frac{10}{s+2+10k+10s} = \frac{10}{11s+2+10k}$$

$$D(s) = 1/s \Rightarrow \quad C(s) = \frac{10}{11s+2+10k} \times \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$\underset{t\to\infty}{C(t)} = \underset{s\to 0}{\lim} sC(s) = \frac{10}{2+10k} = \frac{5}{1+5k} = 0.02 \Rightarrow \underline{k = 49.8}$$

ب- خطای حالت دایمی به ورودی پله به ازای k بدست آمده در قسمت الف را بیابید. (۵ نمره)

$$k_p = \underset{s\to 0}{\lim} GH = \underset{s\to 0}{\lim} \frac{(k+s)10}{s+2} = 5k$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{1+5k}\Big|_{k=49.8} = 0.4\,\%$$

ج- حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته را نسبت به k بیابید و آنرا به ازاء k بدست آمده در قسمت الف در فرکانس های خیلی کم و خیلی زیاد محاسبه کنید. (۷ نمره)

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s+k)}{11s+2+10k}$$

$$S_k^T = \frac{\partial T}{\partial k} \cdot \frac{k}{T} = 10\,\frac{11s+2+10k-10s-10k}{(11s+2+10k)^2} \times \frac{k}{\frac{10(s+k)}{11s+2+10k}}$$

$$= \frac{k(s+2)}{(11s+2+10k)(s+k)}$$

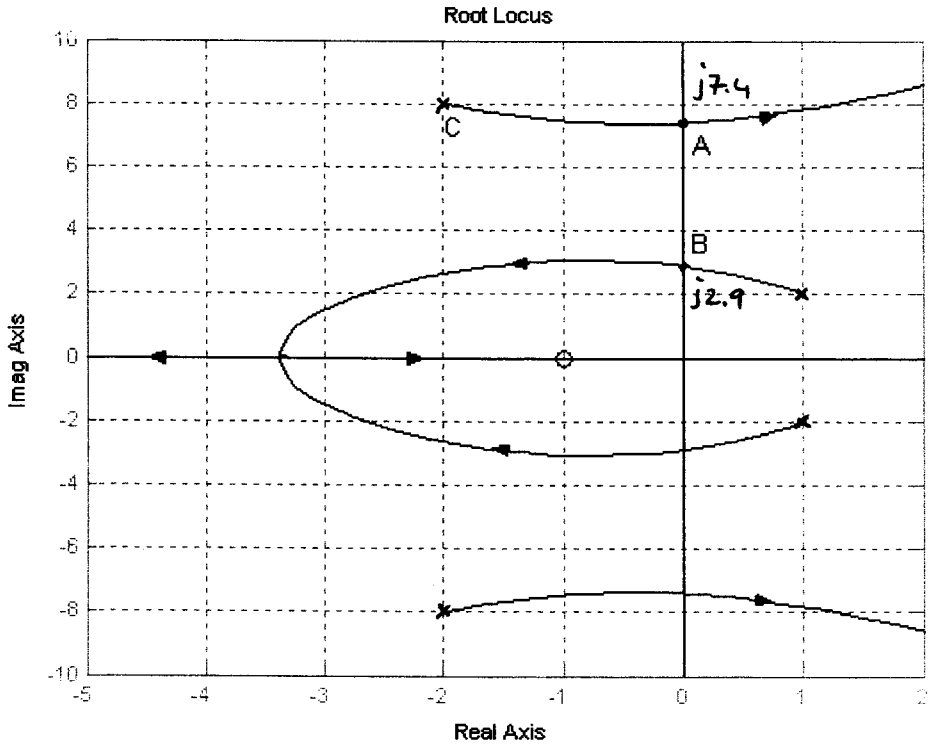
فرکانس های زیاد $\omega \to \infty \Rightarrow S_k^T \to \frac{ks}{11s^2} \to 0$

فرکانس های خیلی کم $\omega \to 0 \Rightarrow S_k^T \to \frac{2k}{(2+10k)(k)} = \frac{1}{1+5k} = 0.004$

د- برای آنکه بتوان خطای حالت دایمی به ورودی پله را صفر کرد چه کنترل کننده ای پیشنهاد می کنید؟ (۳ نمره)

باید انتگرال گیر اضافه کرد $\left(\frac{k}{s}\right)$

۲- مکان هندسی یک سیستم بصورت شکل زیر رسم شده است.



الف- قطب ها و صفر های سیستم حلقه باز را مشخص کنید. (۲ نمره)

صفر : -1 قطب : $-2 \pm j8$, $1 \pm j2$

ب- مقادیر بهره (k) در نقاط A و B را یافته ، با استفاده از آن حدود پایداری را بر حسب k مشخص نمایید. (۱۰ نمره)

$$k = \frac{\text{حاصلضرب فاصله‌ی قطب ها}}{\text{" " صفرها}}$$

با توجه به رابطه فوق و محاسبه فاصله نقاط A و B تا قطب ها و صفرها می‌توان بهره k را در این دو نقطه محاسبه کرد.

$$k_A = \frac{2.1 \times 15.5 \times 5.5 \times 9.5}{7.5} \cong 226$$

$$k_B = \frac{5.5 \times 11.1 \times 1.3 \times 5}{3.0} \cong 132$$

$\Rightarrow$ شرط پایداری $\underline{132 < k < 226}$

ج- زاویه خروج از قطب C را بیابید. (۸ نمره)

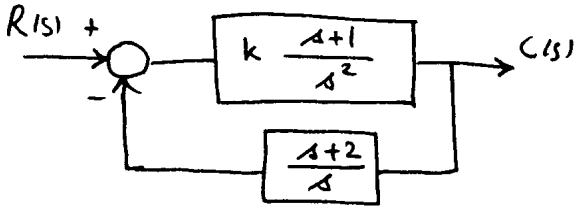
زاویه‌ی قطب ها − زاویه‌ی صفرها $= -180$

$$\Rightarrow \measuredangle[-2+j8-(-1)] - \theta - 90 - \measuredangle[(-2+j8)-(1+j2)] - \measuredangle[(-2+j8)-(1-j2)] = -180$$

$$\Rightarrow 97 - \theta - 90 - 116 - 107 = -180$$

$$\Rightarrow \underline{\theta = -36^\circ}$$

۳- برای سیستم شکل روبرو:



الف- حدود پایداری را بر حسب k مشخص نمایید. (۸ نمره)

معادله مشخصه : $1 + k\dfrac{(s+1)(s+2)}{s^3} = 0 \Rightarrow s^3 + ks^2 + 3ks + 2k = 0$

s^3	1	$3k$
s^2	k	$2k$
s^1	$3k-2$	
s^0	$2k$	

$3k - 2 > 0 \Rightarrow k > 2/3 \Rightarrow$ شرط پایداری

$\boxed{k > 2/3}$

ب- به ازای چه مقادیری از K سیستم نوسانی است و فرکانس نوسان چقدر است؟ (۵ نمره)

$k = \frac{2}{3} \Rightarrow$ معادله کمکی $A(s) = ks^2 + 2k = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{2} \Rightarrow$

فرکانس نوسان $\omega = \sqrt{2}$

ج- مکان هنذسی ریشه ها را رسم کنید.(در صفحه بعد) (۱۲ نمره)

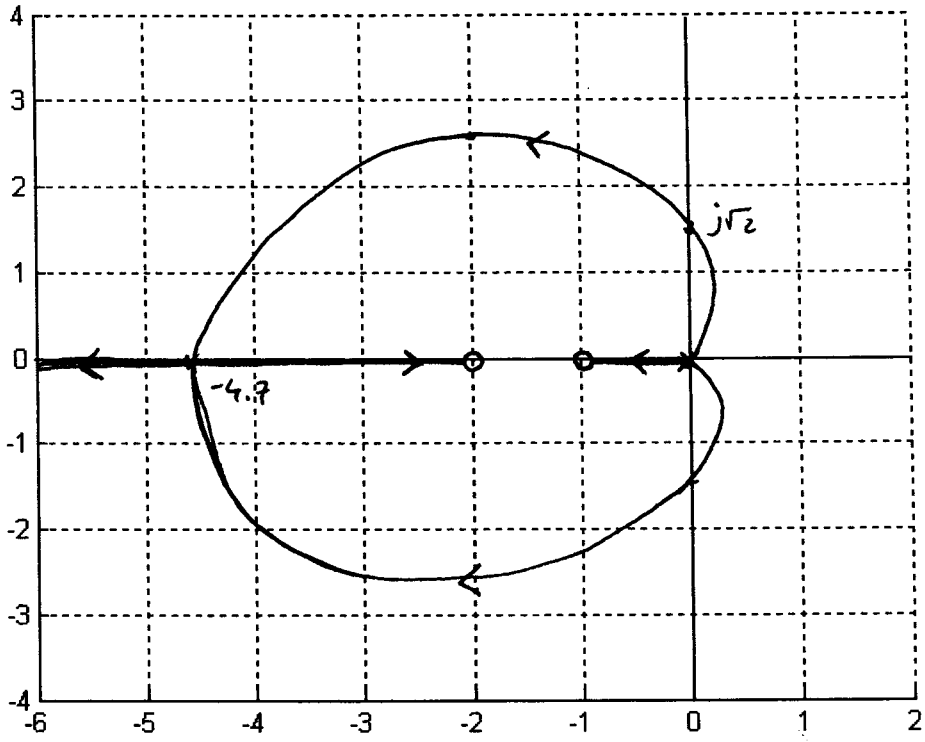
زاویه مجانب ها $\phi_A = \dfrac{(2q+1)180}{3-2} = 180, \ldots \longrightarrow$ فقط یک شاخه روی محور حقیقی به سمت بی نهایت می رود.

و با توجه به محل برخورد با محور موهومی که در قسمت الف به ازای $k = \frac{2}{3}$ در نقطه $s = \pm j\sqrt{2}$ بدست آمد و با توجه به محل ریشه ها روی محور حقیقی یک نقطه گریز روی محور حقیقی بین 2- و ∞- خواهیم داشت :

$$k = -\frac{s^3}{(s+1)(s+2)} = -\frac{s^3}{s^2+3s+2}$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow 3s^2(s^2+3s+2) - s^3(2s+3) = 0$$

$$\Rightarrow s^4 + 6s^3 + 6s^2 = s^2(s^2 + 6s + 6) = 0$$

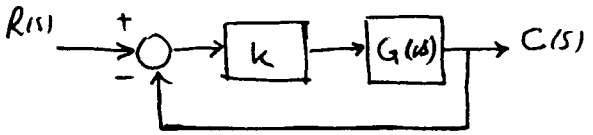


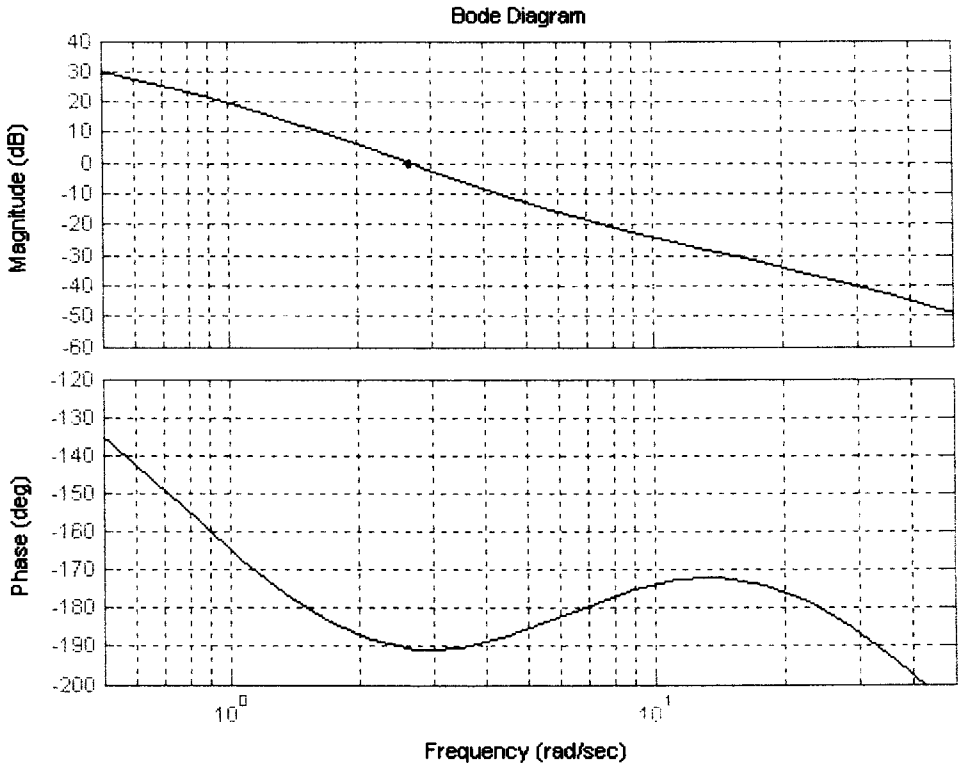
$$\Rightarrow \quad s = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \rightarrow \text{قطب ها}$$

$$-1.3 \rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$-4.7 \rightarrow \text{نقطه گیری}$$

۴- دیاگرام بود حلقه باز سیستم شکل مقابل به ازاء K=۱ بصورت زیر رسم شده است.





الف- فرکانس های گذر بهره و گذر فاز چقد است؟ (۵ نمره)

$\omega_g \cong$ 2.35 $\omega_C = \ldots$ 1.5, 6.75, 24.4

ب- حاشیه فاز و حاشیه بهره چقدر است؟ (۵ نمره)

GM= -9.17, 20.8, 39.7 PM=... -9.5 °

ج- آیا سیستم پایدار است؟ خیر (PM<0) (۳ نمره)

د- - حدود پایداری را بر حسب تغییرات k مشخص نمایید. (۱۰ نمره)

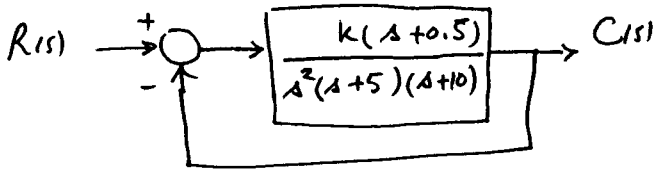
از روی دیاگرام مشخص است که در ناحیه پایداری وجود دارد یا باید بهره را کاهش داد k<1 تا فرکانس گذر بهره قبل از ω=1.5 باشد و بنابراین حاشیه بهره مثبت شود یا بهره را افزایش داد تا فرکانس گذر بهره بین 6.75 و 24.4 بیفتد که باز هم حاشیه بهره مثبت می‌شود با توجه به حاشیه بهره‌های بدست آمده در قسمت ب خواهیم داشت:

$20\log k = -9.17 \Rightarrow k = 0.35$

$20\log k = 20.8 \rightarrow k = 10.97$ → حدود پایداری $\begin{cases} 0 < k < 0.35 \\ 10.97 < k < 96.6 \end{cases}$

$20\log k = 39.7 \Rightarrow k = 96.6$

۵- ضمن رسم دیاگرم بود پایداری سیستم روبرو را به ازاء K بررسی کنید. (۲۰ نمره)



$$GH(s) = k\frac{s+0.5}{s^2(s+5)(s+10)} \quad , \quad k=1 \Rightarrow GH(s) = \frac{0.01\,(s/0.5+1)}{s^2(s/5+1)(s/10+1)}$$

$$20\log 0.01 = -40 \text{ dB}$$

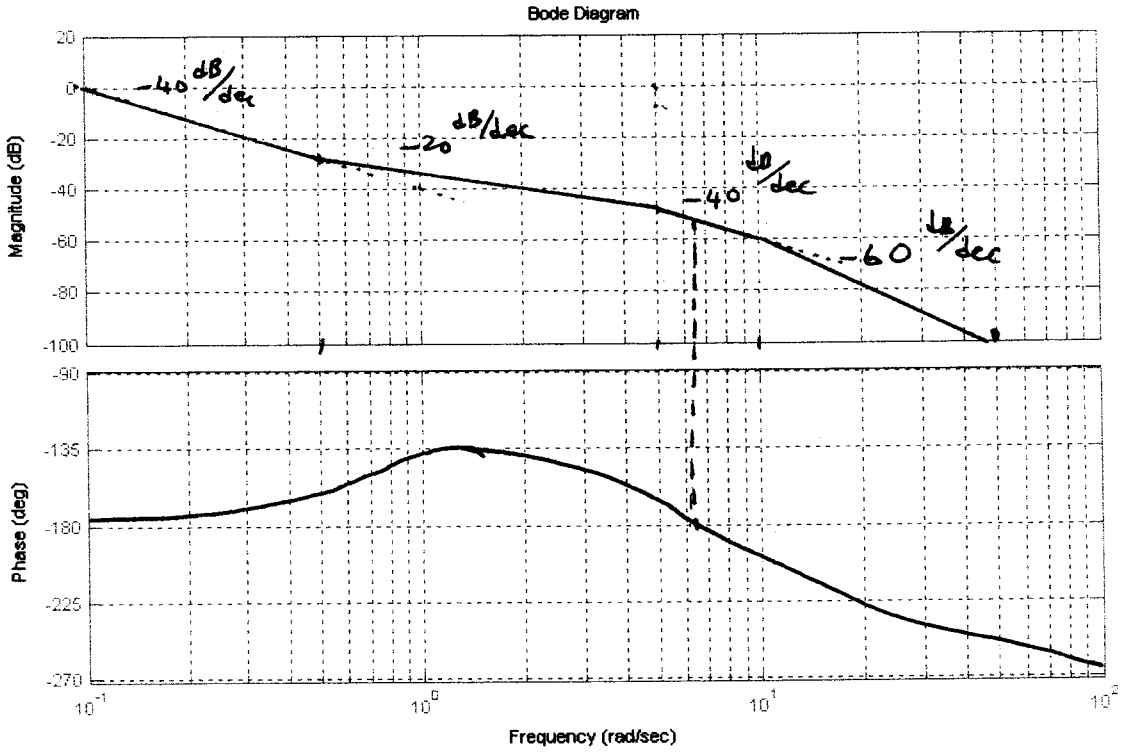
با توجه به محل صفرها و قطب ها منحنی اندازه بود در زیر رسم شده است ، منحنی فاز بصورت تقریبی رسم میگردد .

فرکانس گذر فاز $\omega_c = ?$ $\quad \angle GH(j\omega_c) = \tan^{-1}\frac{\omega_c}{0.5} - 180 - \tan^{-1}\frac{\omega_c}{5} - \tan^{-1}\frac{\omega_c}{10} = -180$

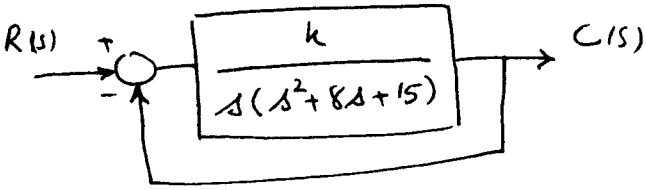
$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{\omega_c}{0.5} - \tan^{-1}\frac{3\omega_c/10}{1-\omega_c^2/50} = \tan^{-1}\frac{\frac{\omega_c}{0.5} - \frac{3\omega_c/10}{1-\omega_c^2/50}}{1+\frac{\omega_c}{0.5}\times\frac{3\omega_c/10}{1-\omega_c^2/50}} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_c}{0.5} - \frac{3\omega_c/10}{1-\omega_c^2/50} = 0$$

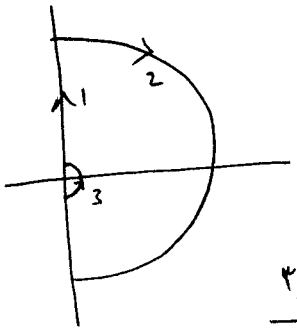
$$\Rightarrow \omega_c = 6.5 \Rightarrow$$ با توجه به منحنی بهره $GM \cong 56$ dB

$$20\log k = 56 \Rightarrow k = 630 \Rightarrow$$ شرط پایداری $0 < k < 630$



۶- با استفاده از روش نایکوئیست پایداری سیستم مقابل را بر حسب K تعیین نمائید. $(k<0 \ , \ k>0)$ (۲۰ نمره)





مسیر ۲ $\quad s = Re^{j\theta} \Rightarrow GH(s) = \dfrac{k}{s^3} = \dfrac{k}{R^3 e^{j3\theta}} = \epsilon e^{-j3\theta}$

$$\begin{cases} \theta : \frac{\pi}{2} \to 0 \to -\pi/2 \\ \angle G : -3\pi/2 \to 0 \to 3\pi/2 \end{cases}$$

مسیر ۳ $\quad s = \epsilon e^{j\theta} \Rightarrow GH(s) = \dfrac{k}{15s} = \dfrac{k}{15\epsilon e^{j\theta}} = \infty e^{-j\theta}$

$$\begin{cases} \theta : -\pi/2 \to 0 \to \pi/2 \\ \angle G : \pi/2 \to 0 \to -\pi/2 \end{cases}$$

مسیر ۱ $\quad s = j\omega \Rightarrow GH(j\omega) = \dfrac{k}{j\omega(-\omega^2 + 8j\omega + 15)} = \dfrac{k}{\omega(-8\omega + j(15-\omega^2))}$

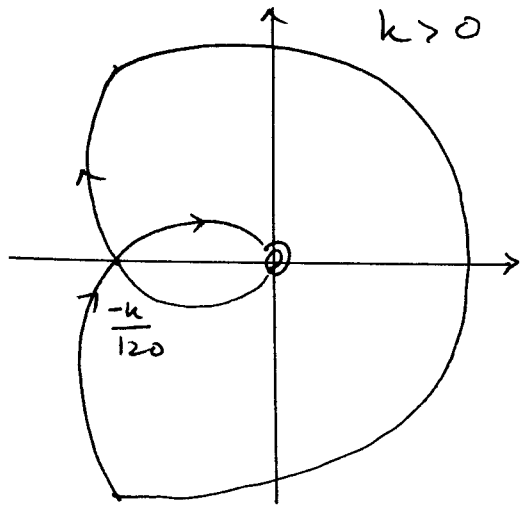
محل برخورد با محور حقیقی $\quad 15 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 15 \Rightarrow \omega = \sqrt{15} \Rightarrow$ نقطه $\left(-\frac{k}{120}, 0\right)$

" " " $\quad \omega = 0 \Rightarrow$ نقطه $(0,0)$

$N_{-1} = Z_{-1} - P_{-1}$

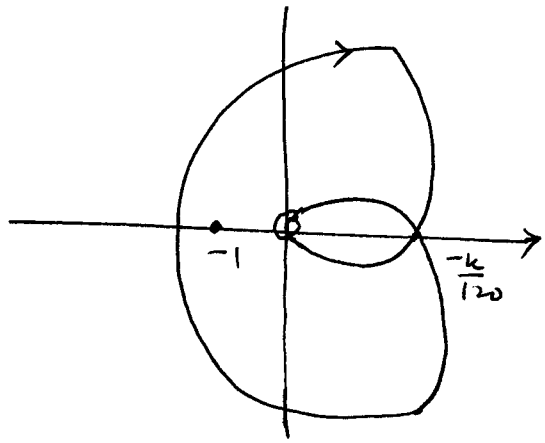
شرط پایداری $Z_{-1} = 0 \Rightarrow N_{-1} = -P_{-1} = 0$

$\Rightarrow -\dfrac{k}{120} > -1 \Rightarrow \boxed{k < 120}$

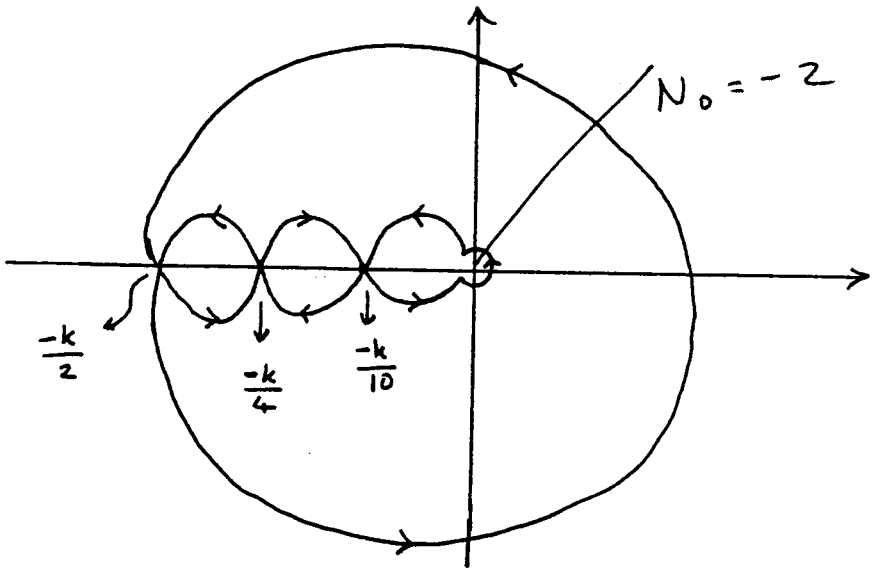


برای حالت $k<0$ کافی است منحنی قطبی $k>0$ را نسبت به محور موهومی قرینه کنیم.

در این حالت منحنی همیشه نقطه $(-1,0)$ را دور می‌زند و $N=1$ است بنابراین سیستم همیشه یک قطب ناپایدار دارد.



۷- اگر نمودار قطبی تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم می نیمم فاز بصورت شکل زیر باشد ، حدود پایداری سیستم را بر حسب k مشخص نمایید. (۱۰ نمره)



$$\left.\begin{array}{l} N_0 = Z_0 - P_0 \\ \text{سیستم می نیمم فاز} \quad Z_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_0 = 2 = P_{-1}$$

$$N_{-1} = Z_{-1} - P_{-1}$$

شرط پایداری : $Z_{-1} = 0 \Rightarrow N_{-1} = -P_{-1} = -2 \Rightarrow$

یعنی باید منحنی نایکوئیست نقطه $(-1, 0)$ را دو بار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور بزند پس یا باید بین 0 و $\frac{-k}{10}$ باشد یا بین $-\frac{k}{4}$ و $-\frac{k}{2}$.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -1 > \frac{-k}{10} \\ \text{یا} \\ \frac{-k}{2} < -1 < \frac{-k}{4} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{c} k > 10 \\ \text{یا} \\ 2 < k < 4 \end{array}} \right.$$