

فصل چهارم

مقدمه‌ای بر روش‌های المان محدود

Finite Element Analysis (FEA)

۴-۱ مقدمه

هر پدیده‌ای در طبیعت را می‌توان به کمک قوانین فیزیکی بر حسب معادلات جبری، دیفرانسیلی یا انتگرالی توصیف کرد. تعیین توزیع تنش در خطوط لولهٔ پرفشار با سوراخ‌ها و تقویت‌کننده‌های متعدد و تحت بارهای مکانیکی، حرارتی و یا آیرودینامیک، یافتن غلظت آلاینده‌ها در آب دریاها یا در هوا و شبیه‌سازی شرایط آب و هوایی برای درک و پیش‌بینی مکانیک شکل‌گیری تدرها، مثال‌هایی از مسایل مهم مورد علاقهٔ محققان هستند. مهندسين و دانشمندان علوم پایه، برای مطالعه پدیده‌های فیزیکی مد نظر خود سه کار اصلی باید انجام بدهند:

(۱) فرمول‌بندی ریاضیاتی فرآیند فیزیکی؛

(۲) حل عددی مدل ریاضی بند(۱)؛

(۳) طراحی و تدوین برنامه‌های رایانه‌ای برای اجرای تحلیل عددی و نمایش نتایج.

درحالی‌که فرمول‌بندی ریاضیاتی فرآیند برای اکثر مسایل، کار چندان دشواری نیست حل معادلات حاکم با روش‌های تحلیلی کار سنگینی است. در اینگونه موارد روش‌های تقریبی حل، جایگزین مناسبی برای پیدا کردن جواب‌هاست. از جمله روش‌های عددی به کار رفته عبارتند از: روش تفاضل محدود، روش‌های حجم محدود یا روش‌های سنتی مانند ریلی ریتز و گالرکین و بالاخره روش المان محدود (*Finite Element Analysis: FEA*).

گرچه رگه‌ها و بعضی ویژگی‌های کلیدی *FEA* طی مقالاتی در آغاز دههٔ ۴۰ قرن بیستم معرفی شدند معرفی رسمی این روش را به سال‌های ۱۹۵۶ تا ۱۹۶۰ نسبت می‌دهند. اصطلاح «المان محدود» اولین بار در ۱۹۶۰ بکار برده شده است. طی سال‌های گذشته، این رشته از مباحث رشد تصاعدی داشته‌اند؛ بطوریکه در حال حاضر بیش از سه دو جین کتاب درسی و تعداد بسیار زیادی نشریات تخصصی در این زمینه وجود دارند.

مثال ۱. تقریب محیط یک دایره

حل: بر اساس شکل ۴-۱؛ مراحل تحلیل عبارتند از:

(۱) گسسته‌سازی المان محدود: تقسیم محیط دایره به تعداد محدودی (n) از زیر دامنه‌ها (یعنی پاره خطوط)

(۲) نوشتن معادلات المان: برای یک المان نمونه شماره (e)

$$l^{(e)} = rR \sin \frac{\theta^{(e)}}{r} \quad (۱-۴)$$

(۳) مونتاژ معادلات المان و حل:

$$P_n = \sum_{e=1}^n l^{(e)} \quad (۲-۴)$$

برای مش یکنواخت $\theta^{(e)} = \frac{r\pi}{n}$.

$$P_n = n \left(\gamma R \sin \frac{\pi}{n} \right) \quad (3-4)$$

۴ تخمین همگرایی و خطا: خطای هر المان عبارت است از:

$$E^{(e)} = |S^{(e)} - l^{(e)}| \quad (4-4)$$

درحالت مش یکنواخت که $l^{(e)} = \gamma R \sin \frac{\pi}{n}$ و $S^{(e)} = R \theta^{(e)}$ خطای هر المان برابر است با:

$$E^{(e)} = R \left(\frac{\gamma \pi}{n} - \gamma \sin \frac{\pi}{n} \right) \quad (5-4)$$

بنابراین خطای کل عبارت است از:

$$E = nE^{(e)} = \gamma R (\pi - n \sin \frac{\pi}{n}) \quad (6-4)$$

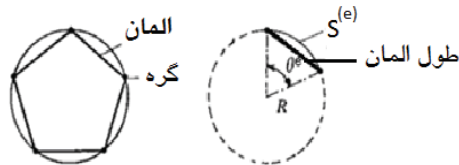
و اگر $n \rightarrow \infty$ آنگاه $E \rightarrow 0$.

$$P_n = \gamma R n \sin \frac{\pi}{n} = \frac{\gamma R \sin \pi x}{x}$$

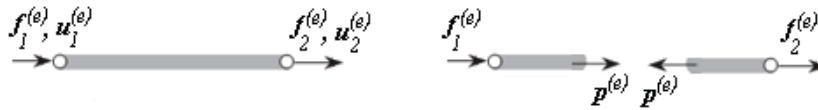
اگر $x = 1/n$ فرض شود آنگاه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{x \rightarrow 0} \gamma R \frac{\sin \pi x}{x} = \gamma \pi R \quad (7-4)$$

که همان حل دقیق محیط دایره است و به این صورت اثبات همگرایی کامل می شود.



شکل ۴-۱ تقریب دایره با المان‌های خطی



شکل ۴-۲ میله نمونه به شماره (e) و نیروهای فرضی دو انتها و داخل آن

۲-۴ رویکرد مستقیم برای سیستم‌های گسسته

خرپاها می‌توانند نمونه خوبی از سیستم‌های گسسته باشند. معمولاً فرض می‌شود میله‌های تشکیل‌دهنده خرپاها آنقدر نازکند که مقاومت به پیچش، خمش و برش آنها ناچیز است و در نتیجه نیروهای خمشی، برشی و پیچشی وجود ندارند. برای یک میله نمونه (شکل ۲-۴) داریم:

معادله تعادل میله:

$$f_1^{(e)} + f_2^{(e)} = 0 \quad (۸-۴)$$

معادله بنیادین تنش-کرنش (ماده هooke):

$$\sigma^{(e)} = E^{(e)} \varepsilon^{(e)} \quad (۹-۴)$$

تنش محوری:

$$\sigma^{(e)} = \frac{p^{(e)}}{A^{(e)}} \quad (۱۰-۴)$$

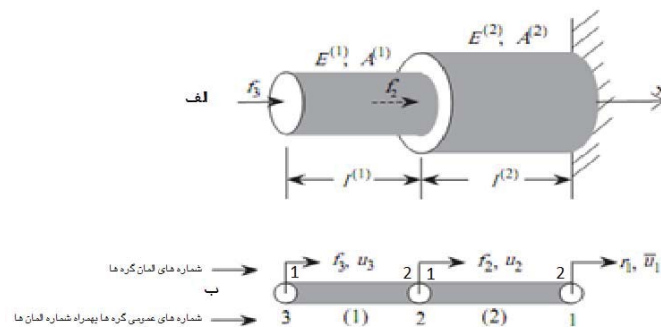
کرنش محوری: $\delta^{(e)}$ تغییر طول میله است]

$$\varepsilon^{(e)} = \frac{\delta^{(e)}}{l^{(e)}} \quad (۱۱-۴)$$

نیروی محوری و تنش، در صورت کششی بودن مثبت و در صورت فشاری بودن، منفی فرض خواهند شد. نیروی داخلی $P^{(e)}$ هم در کشش مثبت و در فشار منفی است. یعنی وقتی به سمت خارج سطحی باشد که روی آن اثر می‌کند، مثبت است. نیروهای داخلی گرهی مثبت‌اند اگر در جهت مثبت محور x ها باشند. ماتریس سفتی المان $(K^{(e)})$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f_2^{(e)} = p^{(e)} = A^{(e)} \sigma^{(e)} = A^{(e)} E^{(e)} \varepsilon^{(e)} \quad (۱۲-۴)$$

$$= A^{(e)} E^{(e)} \frac{\delta^{(e)}}{l^{(e)}} = \frac{A^{(e)} E^{(e)}}{l^{(e)}} (u_2^{(e)} - u_1^{(e)}) = k^{(e)} (u_2^{(e)} - u_1^{(e)})$$



شکل ۲-۴ یک سازه دو میله‌ای نمونه (الف) و مش‌بندی انتخابی برای آن (ب)

از معادله تعادل میله داریم:

$$f_1^{(e)} = -f_2^{(e)} = k^{(e)}(u_1^{(e)} - u_2^{(e)}) \quad (13-4)$$

بنابراین به صورت ماتریسی می توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{bmatrix} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad (14-4)$$

و یا

$$F^{(e)} = K^{(e)}d^{(e)} \quad (15-4)$$

در رابطه (15-4)، $K^{(e)}$ ، ماتریس سفتی المان (e) ، $d^{(e)}$ بردار درجات آزادی المان و $F^{(e)}$ بردار بار المان نامیده می شوند.

برای سازه ای به شکل 4-3، با توجه به تفاوت سطح مقطع و بارگذاری نشان داده شده، از دو المان به معادلات شبیه بالا استفاده می شود. معادلات تعادل برای سه گره (شکل 4-4) عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_1^{(1)} \\ \dot{f}_2^{(1)} \\ \dot{f}_1^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{f}_1^{(2)} \\ \dot{f}_2^{(2)} \\ \dot{f}_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ \dot{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ \dot{f}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ \dot{f}_3 \end{bmatrix} \quad (16-4)$$

و یا

$$\tilde{F}^{(1)} + \tilde{F}^{(2)} = \sum_{e=1}^2 \tilde{F}^{(e)} = F \quad (17-4)$$

از طرفی معادلات المان ها از بخش قبل بر حسب شماره های عمومی عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_1^{(1)} \\ \dot{f}_2^{(1)} \end{bmatrix} = k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (18-4)$$

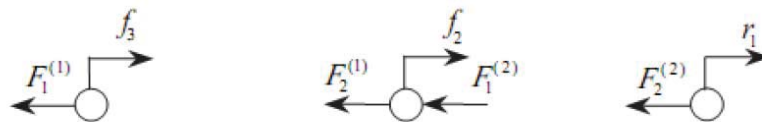
$$\begin{bmatrix} \dot{f}_1^{(2)} \\ \dot{f}_2^{(2)} \end{bmatrix} = k^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

با بازنویسی معادلات بالا به صورت عمومی (*global*) داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_1^{(1)} \\ \dot{f}_2^{(1)} \\ \dot{f}_1^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k^{(1)} & -k^{(1)} \\ \cdot & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{F}^{(1)} = \tilde{K}^{(1)}d \quad (19-4)$$

و

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_1^{(2)} \\ \dot{f}_2^{(2)} \\ \dot{f}_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & \cdot \\ -k^{(2)} & k^{(2)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{F}^{(2)} = \tilde{K}^{(2)}d \quad (20-4)$$



شکل 4-4 نمودار تعادل گره ها

از جمع این روابط خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k^{(1)} & -k^{(1)} \\ \cdot & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & \cdot \\ -k^{(2)} & k^{(2)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (21-4)$$

$$(\bar{K}^{(1)} + \bar{K}^{(2)})d = f + r \quad \text{و یا}$$

$$Kd = f + r \quad (22-4)$$

در این حالت $K = \sum_{e=1}^n \bar{K}^{(e)}$ به ماتریس سفتی سیستم و d به بردار درجات آزادی سیستم معروف هستند. برای مونتاژ ماتریس‌های سفتی المان‌ها به صورت دستی، یک روش مستقیم، نوشتن شماره عمومی گره-ها در محل سطرها و ستون‌های مربوطه از ماتریس سفتی المان‌ها و سپس تعیین مولفه‌های ماتریس سفتی سیستم از روی این شماره‌ها می‌باشد. یعنی:

$$[K]^{(1)} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}, \quad [K]^{(2)} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$K_{11} = k^{(2)}, K_{12} = -k^{(2)}, K_{21} = -k^{(2)}, K_{22} = k^{(2)} + k^{(1)} \quad (23-4)$$

$$K_{23} = -k^{(1)}, \quad K_{32} = -k^{(1)}, \quad K_{33} = k^{(1)}$$

مولفه‌هایی که مقدار نظیرشان در ماتریس‌های سفتی المان‌ها نیست، صفر فرض می‌شوند؛ مانند $K_{13} = K_{31} = 0$.

۳-۴ معادلاتی برای مونتاژ ماتریس‌های سفتی و بار

روش زیر رویه مونتاژ ماتریس سفتی المان را بصورت یک رابطه ارائه می‌کند. این رویه معادل مونتاژ مستقیم بخش قبل است.

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = L^{(1)}d$$

$$\rightarrow d^{(e)} = L^{(e)}d \quad (24-4)$$

$$d^{(2)} = \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = L^{(2)}d$$

$L^{(e)}$ ماتریس‌های بولی (Boolean) هستند که از صفر و یک‌ها تشکیل می‌شوند.

چون از رابطه (۱۵-۴) $K^{(e)}d^{(e)} = F^{(e)}$ لذا

$$K^{(e)}L^{(e)}d = F^{(e)} \quad (۲۵-۴)$$

همچنین داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_\gamma^{(1)} \\ f_\gamma^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\gamma^{(1)} \\ f_\gamma^{(1)} \end{bmatrix} = L^{(1)T} F^{(1)}$$

$$\rightarrow F^{(e)} = L^{(e)T} F^{(e)} \quad (۲۶-۴)$$

$$\begin{bmatrix} f_\gamma^{(2)} \\ f_\gamma^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\gamma^{(2)} \\ f_\gamma^{(2)} \end{bmatrix} = L^{(2)T} F^{(2)}$$

و با جایگذاری $F^{(e)}$ از رابطه (۲۶-۴) در (۱۷-۴) خواهیم داشت:

$$F = \sum_{e=1}^2 F^{(e)} = \sum_{e=1}^2 L^{(e)T} F^{(e)} = f + r \quad (۲۷-۴)$$

با جایگذاری $F^{(e)}$ از رابطه (۱۵-۴) و $d^{(e)}$ از رابطه (۲۴-۴) در رابطه (۲۷-۴) داریم:

$$\sum_{e=1}^2 (L^{(e)T} K^{(e)} L^{(e)}) d = f + r \quad (۲۸-۴)$$

که معادل $Kd = f + r$ است و در آن $K = \sum_{e=1}^2 L^{(e)T} K^{(e)} L^{(e)}$ ، ماتریس سختی سیستم می‌باشد. این رابطه نشان می‌دهد با معلوم بودن ماتریسهای المانی $K^{(e)}L^{(e)}$ می‌توان ماتریس منفی سیستم را بصورت رایانه ای محاسبه کرد.

۴-۴ اعمال شرایط مرزی و حل سیستم معادلات

روش اول: اگر $u_1 = \bar{u} = \frac{\xi}{k^{(1)}}$ ، $u_2 = -\xi$ و $f_2 = 10$ بعنوان شرایط مرزی داده شده باشند به روش تجزیه ماتریس سختی سیستم داریم:

$$\begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & \cdot \\ -k^{(2)} & k^{(2)} + k^{(1)} & -k^{(1)} \\ \cdot & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ -\xi \\ 10 \end{bmatrix} \quad (۲۹-۴)$$

و یا

$$\begin{bmatrix} K_E & K_{EF} \\ K_{EF}^T & K_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_E \\ d_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_E \\ f_F \end{bmatrix} \quad (۳۰-۴)$$

اندیس E نشان دهنده کمیتی مربوط به گره نظیر شرط لازم یا $u = \bar{u}$ است که نیرو در آن مجهول و u معلوم است. اندیس F اول کلمه آزاد (*Free*) نشان دهنده کمیتی مربوط به گره آزاد یعنی بدون تکیه گاه است که u آن مجهول و f در آن معلوم است. مجهولات سیستم معادلات بالا d_F و r_E هستند. حل معادله دوم:

$$K_{EF}^T \bar{d}_E + K_F d_F = f_F \rightarrow d_F = K_F^{-1} (f_F - K_{EF}^T \bar{d}_E) \quad (۳۱-۴)$$

مقادیر u_1 و u_2 یعنی $d_F = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ معلوم می‌شوند. با تعیین d_F می‌توان از معادله اول r_E را هم محاسبه نمود:

$$r_E = K_E \bar{d}_E + K_{EF} d_F \quad (32-4)$$

برای شرایط مرزی بالا، $u_1 = \frac{1}{k^{(1)}}$ ، $u_2 = 10 \left(\frac{1}{k^{(1)}} + \frac{1}{k^{(2)}} \right)$ ، $r_1 = r_2 = -6$ بدست می‌آیند. روش دوم: سطر و ستون ماتریس سختی سیستم نظیر شرایط مرزی لازم را به صفر و یک تغییر داده و ماتریس بار، متناسب با این تغییر بصورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ \cdot & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon - (-k^{(2)}) \times \bar{u} \\ 10 - (\cdot) \times \bar{u} \\ \cdot \end{bmatrix}$$

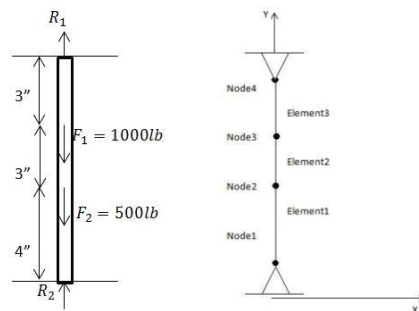
$$\rightarrow u_1 = \frac{1}{k^{(2)}}, u_2 = 10 \left(\frac{1}{k^{(1)}} + \frac{1}{k^{(2)}} \right) \quad (33-4)$$

$$r_1 = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -6$$

روش سوم: مولفه سطر و ستون نظیر شرایط مرزی لازم با یک عدد بسیار بزرگ مثل β جایگزین می‌شود. مثلاً در کامپیوترهای هشت بیتی $\beta = 10^7$ فرض می‌شود. ماتریس بار نیز متناسب با این تغییر اصلاح می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} \beta & -k^{(2)} & \cdot \\ -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ \cdot & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \bar{u} \\ -\varepsilon \\ 10 \end{bmatrix}$$

مثال ۲. جابجایی های گرهی و نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهی را برای سازه ای متشکل از شکل ۴-۵ تعیین کنید.



شکل ۴-۵ سازه مثال ۲. (الف) میله و بارگذاری روی آن (ب) مثل المان محدود معادل مسأله

همچنین با استفاده از نرم افزار انسیس و برنامه نویسی APDL مسأله را حل نمایید. گره‌ها در نقاط اعمال نیرو انتخاب می‌شوند. چون نیازی به تعیین تنش‌ها نیست سطح مقطع میله واحد در نظر گرفته می‌شود.

$$E = 3.0 \times 10^6 \text{ psi}$$

حل:

ماتریس‌های سفتی المانی عبارتند از:

$$[K]^{(1)} = \frac{E}{\Delta x^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3.0 \times 10^6}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$[K]^{(2)} = \frac{E}{\Delta x^{(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3.0 \times 10^6}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$[K]^{(3)} = \frac{E}{\Delta x^{(3)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3.0 \times 10^6}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

ماتریس‌های سفتی سیستم عبارت است:

$$[K] = 1.0^6 \begin{bmatrix} 7.0 & -7.0 & 0 & 0 \\ -7.0 & 17.0 & -1.0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

بنابراین معادلات چری سیستم عبارتند از:

$$1.0^6 \begin{bmatrix} 7.0 & -7.0 & 0 & 0 \\ -7.0 & 17.0 & -1.0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

شرایط مرزی در این مسأله بصورت $u_1 = u_4 = 0$ و $F_2 = -5.0$ و $F_3 = -1.0$ هستند. از روش

تجزیه ماتریسی داریم:

$$[K_E] = 1.0^6 \begin{bmatrix} 7.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}, [K_F] = 1.0^6 \begin{bmatrix} 17.0 & -1.0 \\ -1.0 & 2.0 \end{bmatrix}, [K_{EF}] = 1.0^6 \begin{bmatrix} -7.0 & 0 \\ 0 & -1.0 \end{bmatrix},$$

$$[d_E] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [d_F] = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, [f_F] = \begin{bmatrix} -5.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}, [r_E] = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

بنابراین می توان به روش تجزیه ماتریسی $[d_F]$ و $[r_E]$ را تعیین نمود:

$$d_F = k_F^{-1} (f_F - k_E T_F d_E) \Rightarrow [d_F] = \begin{bmatrix} -8 \times 10^{-6} \\ -6 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$r_E = k_E d_E + k_E d_F \Rightarrow [r_E] = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

برنامه APDL معادل این مساله عبارت است از:

```

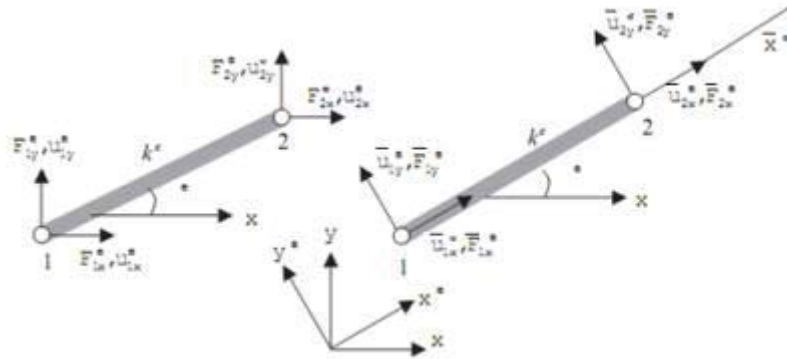
/PREP7
ANTYPE, STATIC
ET, 1, LINK1
R, 1, 1
MP, EX, 1, 3E7
N, 1
N, 2, 4
N, 3, 7
N, 4, 10
E, 1, 2
E, 2, 3
E, 3, 4
D, 1, ALL, , 4, 3
F, 2, FY, -500
F, 3, FY, -1000
FINISH
/SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
PRNSOL, U, Y
PRRSOL, F, Y
FINISH

```

نتایج این تحلیل عبارتند از:

جدول ۱-۴ جابجایی ها و عکس العمل های تکیه گاهی گروه های مثال ۲-۴

گروه \ کمیت	۱	۲	۳	۴
جابجایی	۰	-8×10^{-6}	-6×10^{-6}	۰
عکس العمل تکیه گاهی	600 lb	۰		900 lb



شکل ۴-۶ المان میله زاویه دار نسبت به محورهای مختصات

۴-۵ خریا و قاب دوبعدی

مانند حالت قبل معادلات جبری المان عبارتند از (شکل ۴-۶):

$$k^{(e)} \begin{bmatrix} \backslash & -\backslash \\ -\backslash & \backslash \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1x}^{(e)} \\ \bar{u}_{1y}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1x}^{(e)} \\ \bar{F}_{1y}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

$$\bar{F}_{1y}^{(e)} = \bar{F}_{2y}^{(e)} = 0$$

نیروهای گرهی در المان در تئوری جابجایی کوچک، مستقل از جابجایی‌های نرمال $(\bar{u}_{1y}^{(e)}, \bar{u}_{2y}^{(e)})$ هستند. علت این است که کشیدگی (*elongation*) تابع درجه دومی از جابجایی‌های گرهی عمود بر میله است. اگر جابجایی‌ها کوچک فرض شوند، تاثیر مولفه‌های نرمال بر تنش و کرنش قابل صرف نظر کردن خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{1x}^{(e)} \\ \bar{F}_{1y}^{(e)} \\ \bar{F}_{2x}^{(e)} \\ \bar{F}_{2y}^{(e)} \end{bmatrix} = k^{(e)} \begin{bmatrix} \backslash & \cdot & -\backslash & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\backslash & \cdot & \backslash & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1x}^{(e)} \\ \bar{u}_{1y}^{(e)} \\ \bar{u}_{2x}^{(e)} \\ \bar{u}_{2y}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

و یا

$$(4-37)$$

$$\bar{F}^{(e)} = \bar{K}^{(e)} \bar{d}^{(e)}$$

از طرف دیگر در گره (۱) داریم:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{1x}^{(e)} &= u_{1x}^{(e)} \cos \varphi + u_{1y}^{(e)} \sin \varphi \\ \bar{u}_{1y}^{(e)} &= -u_{1x}^{(e)} \sin \varphi + u_{1y}^{(e)} \cos \varphi \end{aligned} \quad (4-38)$$

روابط (۴-۳۸) برای گره (۲) نیز صادقند؛ بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_x^{(e)} \\ \bar{u}_y^{(e)} \\ \bar{u}_{\gamma_x}^{(e)} \\ \bar{u}_{\gamma_y}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi^{(e)} & \sin\varphi^{(e)} & \cdot & \cdot \\ -\sin\varphi^{(e)} & \cos\varphi^{(e)} & \cos\varphi^{(e)} & \sin\varphi^{(e)} \\ \cdot & \cdot & -\sin\varphi^{(e)} & \cos\varphi^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x}^{(e)} \\ u_{1y}^{(e)} \\ u_{2x}^{(e)} \\ u_{2y}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (39-4)$$

و یا

$$\bar{d}^{(e)} = R^{(e)} d^{(e)} \quad (40-4)$$

چون ماتریس دوران متعامد است لذا $(R^{(e)})^{-1} = R^{(e)T}$ و $(R^{(e)})^T R^{(e)} = R^{(e)} (R^{(e)})^T = I$ داریم:

$$R^{(e)T} \bar{d}^{(e)} = R^{(e)T} R^{(e)} d^{(e)} = d^{(e)} \quad \text{یا} \quad d^{(e)} = R^{(e)T} \bar{d}^{(e)} \quad (41-4)$$

و به همین ترتیب:

$$\bar{F}^{(e)} = R^{(e)} F^{(e)} \quad (42-4)$$

$$F^{(e)} = R^{(e)T} \bar{F}^{(e)} = R^{(e)T} \bar{K}^{(e)} \bar{d}^{(e)} = R^{(e)T} \bar{K}^{(e)} R^{(e)} d^{(e)} = \bar{K}^{(e)} d^{(e)} \quad (43-4)$$

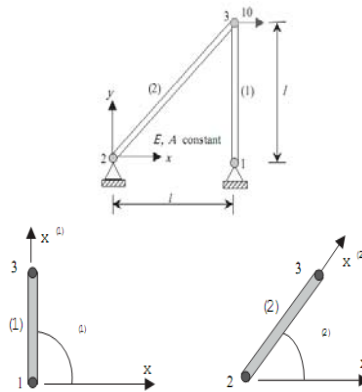
$$= R^{(e)T} \bar{K}^{(e)} R^{(e)} d^{(e)}$$

$$= K^{(e)} d^{(e)}$$

بنابراین ماتریس سفتی دوران یافته المان $(\bar{K}^{(e)} = R^{(e)T} \bar{K}^{(e)} R^{(e)})$ عبارت خواهد بود از:

$$[K]^{(e)} = k^{(e)} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \quad (44-4)$$

که $C = \cos\varphi^{(e)}$ و $S = \sin\varphi^{(e)}$ بوده و ماتریس سفتی یک ماتریس متقارن است.



شکل ۷-۴ مثال تحلیل قاب دوبعدی

مثال ۳. قاب دویبعدی شکل ۴-۷ را با دو المان تحلیل نمایید.

حل:

مرحله اول: تجزیه قاب به المان‌ها، اختصاص شماره‌ها به هر میله، شماره‌های گرهی به هراتصال و شروع با گره‌هایی که جابجایی آنها از پیش داده شده است.

مرحله دوم: فرمول‌بندی هر المان

$$\text{المان (۱)} \quad \varphi^{(1)} = \xi \cdot 0^\circ = 0 \quad \sin \xi \cdot 0^\circ = 0 \quad d^{(1)} = l \quad k^{(1)} = \frac{A^{(1)}E^{(1)}}{l^{(1)}} = \frac{AE}{l}$$

$$[K]^{(1)} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \\ [4] \end{matrix}$$

$$\text{المان (۲)} \quad \varphi^{(2)} = \xi \cdot 0^\circ = 0 \quad \sin \xi \cdot 0^\circ = 0 \quad d^{(2)} = \sqrt{2}l \quad k^{(2)} = \frac{A^{(2)}E^{(2)}}{l^{(2)}} = \frac{AE}{\sqrt{2}l}$$

$$k^{(2)} = \frac{A^{(2)}E^{(2)}}{l^{(2)}} = \frac{AE}{\sqrt{2}l}$$

$$[K]^{(2)} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{matrix} [2] \\ [3] \\ [4] \\ [5] \end{matrix}$$

مرحله سوم: بررسی رفتار کلی

(۳a) مونتاژ مستقیم

$$[K] = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \\ [4] \\ [5] \\ [6] \end{matrix}$$

$$[d] = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{bmatrix} \quad [f] = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad [r] = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ \cdot \end{bmatrix}$$

و

$$Kd = f + r$$

(۳b) سیستم کلی از معادلات:

(۳c) سیستم کلی کاهش یافته از معادلات:

$$[\bar{d}_E] = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1x} \\ \bar{u}_{1y} \\ \bar{u}_{2x} \\ \bar{u}_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad [d_F] = \begin{bmatrix} u_{rx} \\ u_{ry} \end{bmatrix} \quad [f_F] = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$[K_F] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{bmatrix}, \quad [r_E] = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{bmatrix}, \quad [K_{EF}] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

از رابطه $d_F = K_F^{-1}(f_F - K_{EF}^T \bar{d}_E)$ داریم:

$$\frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{rx} \\ u_{ry} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{rx} \\ u_{ry} \end{bmatrix} = \frac{l}{AE} \begin{bmatrix} 1 \cdot + 2 \cdot \sqrt{2} \\ -1 \cdot \end{bmatrix}$$

همچنین براساس رابطه $r_E = K_E \bar{d}_E + K_{EF} d_F$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \cdot + 2 \cdot \sqrt{2} \\ -1 \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ -1 \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

مرحله پس پردازش:

$$\sigma^e = E \frac{\bar{u}_{1x}^e - \bar{u}_{1x}^e}{l^{(e)}} = \frac{E^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1x}^e \\ \bar{u}_{1y}^e \\ \bar{u}_{2x}^e \\ \bar{u}_{2y}^e \end{bmatrix} = \frac{E^e}{l^e} \begin{bmatrix} -1 & \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} R^{(e)} d^{(e)}$$

$$= \frac{E^e}{l^e} \begin{bmatrix} -\cos\varphi^{(e)} & -\sin\varphi^{(e)} & \cos\varphi^{(e)} & \sin\varphi^{(e)} \end{bmatrix} d^e$$

$\varphi^{(1)} = 90^\circ$ $(\cos\varphi^{(1)} = 0,$ برای المان ۱:

$\sin\varphi^{(1)} = 1$

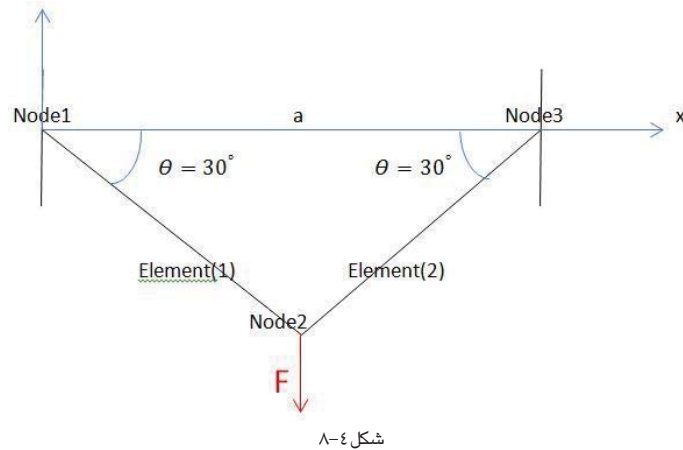
$d^{(1)} = [u_{1x} \ u_{1y} \ u_{2x} \ u_{2y}]^T = [0 \ \cdot \ 1 \cdot + 2 \cdot \sqrt{2} \ -1 \cdot]^T \frac{l}{AE} \ \sigma^{(1)} = \frac{-1 \cdot}{A}$

$\varphi^{(2)} = 45^\circ$ $(\cos\varphi^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$ برای المان ۲:

$\sin\varphi^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$d^{(2)} = \begin{bmatrix} u_{rx} \\ u_{ry} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ 1 \cdot + 2 \cdot \sqrt{2} \\ -1 \cdot \end{bmatrix} \frac{l}{AE} \Rightarrow \sigma^{(2)} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{A}$

مثال ۴. سازه‌ای متشکل از دو میله فولادی به طول‌های برابر $10ft$ و سطح مقطع $A = 0.01in^2$ طبق شکل ۸-۴ تحت نیروی $F = 5000lb$ قرار گرفته است. تنش در میله‌ها و جابجایی نقطه ۲ را در محیط انسیس تعیین نمایید. از وزن میله‌ها بدلیل کوچک بودن در مقابل بار وارده صرف نظر کنید.



شکل ۸-۴

حل:

```

/PREPv
L=10*12                ! LENGTH IN INCH
*AFUN,DEG              ! ANGLE ARE IN DEGREE UNIT
THETA=30
a=L/2*cos(THETA)
b=L/2*sin(THETA)
ET,1,LINK1
R,1,0.5
MP,EX,1,3E7
N,1
N,2,a/2,-b
N,3,a
E,1,2
E,2,3
D,1,ALL,,,3,2        ! or D,1, ALL    and    D, 2, ALL
F,2,FY,-5000
FINISH
/SOLU
SOLVE
FINISH
/POST\
PRNSOL,U,Y           ! PRINT ALL NODAL SOLUTION
PRRSOL              ! PRINT REACTION FORCES
ETABLE,AXFORCE,SMIS,1
ETABLE,AXSTRESS,LS,1
PRETAB,AXFORCE,AXSTRESS  ->  PLD,SP, 2
FINISH

```


نتایج این تحلیل عبارتند از:

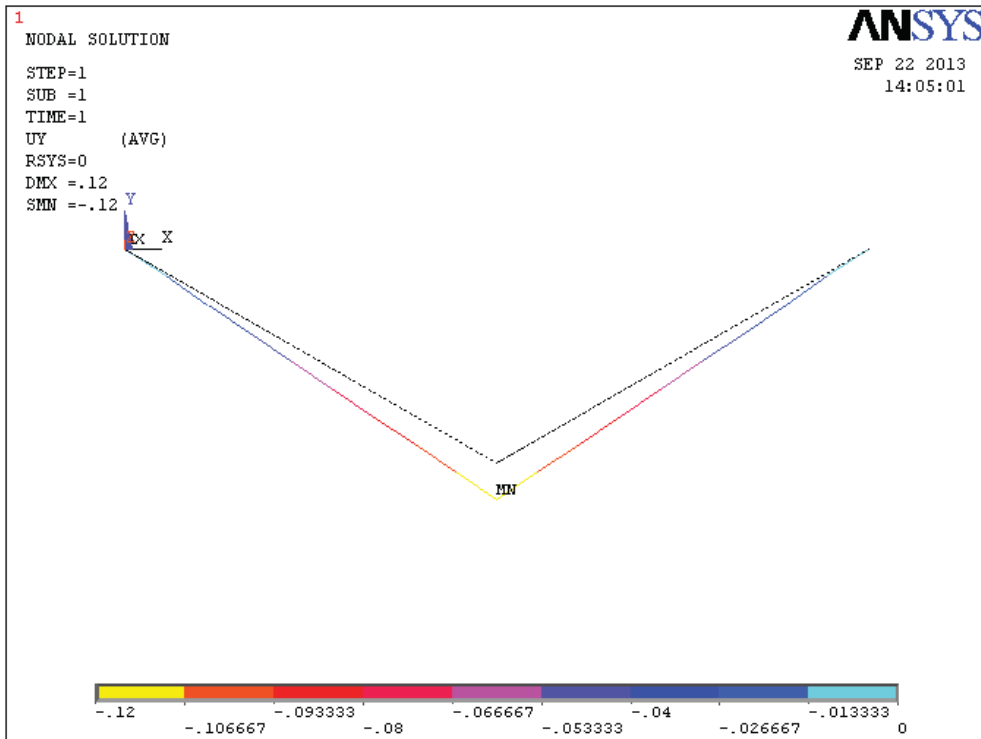
$$\sigma = 10,000 \text{ psi}, UY_1 = 0.0, \\ UY_2 = -0.12 \text{ in}, UY_3 = 0.0$$

جدول ۲-۴. جابجایی های و عکس العمل های تکیه گاهی گره های مثال ۴

گره	UY	RX	RY
۱	۰	-۴۳۳۰.۱ lb	۲۵۰۰
۲	-۰.۱۲ in	۰	۰
۳	۰	+۴۳۳۰.۱ lb	۲۵۰۰

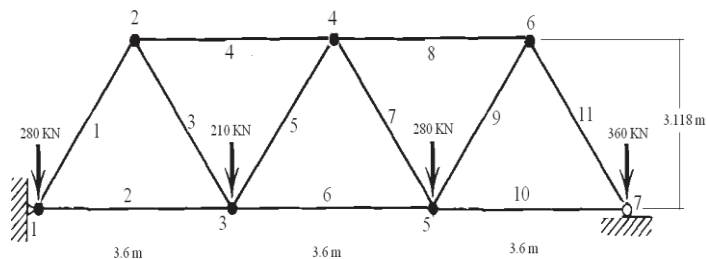
جدول ۳-۴ نیروها و تنش های المانی در میله های قاب مثال ۴

میله	AXEORCE	AXSTRESS
میله ۱	۵۰۰۰ lb	۱۰/۰۰۰ rs
۲	۵۰۰۰ lb	۱۰/۰۰۰ ps



شکل ۴-۹ قاب اولیه (نقطه چین) و تغییر شکل یافته (خط توپر) آن

مثال ۵. خرپای دوبعدی شکل ۴-۱۰ را در نظر بگیرید. برای بارگذاری وارده و مواد داده شده جابجایی گره ها و مقدار تنش داخل میله ها و عکس العمل های تکیه گاهی را با استفاده از نرم افزار انسیس محاسبه نمائید.



شکل ۴-۱۰

حل:

$$A = 2250 \text{ mm}^2, E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0$$

```

/PREPv
ET,1,LINK1
R,1,3250
MP,1,EX,7E5
N,1
N,2,1800,3118
N,3,3600
N,4,5400,3118
N,5,7200
N,6,9000,3118
N,7,10800
E,1,2
E,1,3
E,2,3
E,2,4
E,3,4
E,3,5
E,4,5
E,4,6
E,5,6
E,6,7
D,1,ALL

```

D,۷,UY
 F,۱,FY,-۲۸E۴
 F,۳,FY,-۲۱E۴
 F,۵,FY,-۲۸E۴
 F,۷,FY,-۳۶E۴
 FINISH
 /SOLU
 SOLVE
 FINISH
 /POST\

PLDISP,۲
 PRNSOL,U,S
 PRRSOL,F
 ETABLE,SAXL,LS,۱
 PRETAB,SAXL
 FINISH

جدول ۴-۴

شماره میله	تنش (mpa)	شماره میله	تنش (mpa)
۱	-۸۴,۹	۷	۸:۲a
۲	۴۱,۴۴۷	۸	-a۱,۱۸۳
۳	۸۲,۴	۹	A۱,۱۸۴
۴	-۸۲,۴	۱۰	۴۵,۵a۱
۵	-۸,۲۹	۱۱	-a۱,۱۸۴
۶	۸۴,۰۳۸		

نتایج این تحلیل عبارتند از:

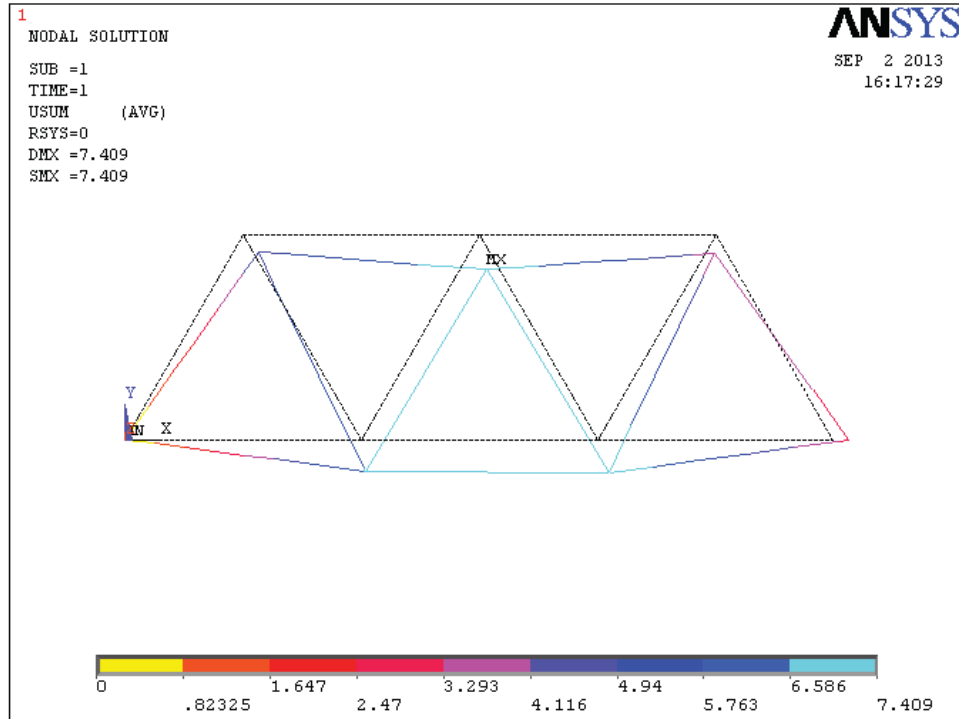
$$\begin{aligned} \sigma^{(۱)} &= -۸۲,۹, \quad \sigma^{(۲)} = ۴۱,۴۴۷, \quad \sigma^{(۳)} = ۸۲,۹, \quad \sigma^{(۴)} = -۸۲,۹ \\ \sigma^{(۵)} &= -۸,۲۹, \quad \sigma^{(۶)} = ۸۷,۰۳۸, \quad \sigma^{(۷)} = ۸,۲۹, \quad \sigma^{(۸)} = -۹۱,۱۸۳ \\ \sigma^{(۹)} &= ۹۱,۱۸۹, \quad \sigma^{(۱۰)} = ۴۵,۵۹۱, \quad \sigma^{(۱۱)} = -۹۱,۱۸۹ \\ R_{x۱} &= ۰,۷۰۴ * ۱۰^{-۴}, R_{y۱} = ۰,۵۱۳ * ۱۰^{-۶}, R_{x۷} = ۰, R_{y۷} = ۰,۶۱۷ * ۱۰^{-۶} \end{aligned}$$

جدول ۵-۴

شماره گره	عکس العمل	Rx (N)	Ry(N)
۱		$۰,۷۰۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۰,۵۱۳ \times ۱۰^{-۶}$
۷		۰	$۰,۶۱۷ \times ۱۰^{-۶}$

جدول ۶-۴

گره	UY	RX	RY
۱	۰	-۴۳۰,۱ lb	۲۵۰۰
۲	-۰,۱۲ in	۰	۰
۳	۰	+۴۳۰,۱ lb	۲۵۰۰

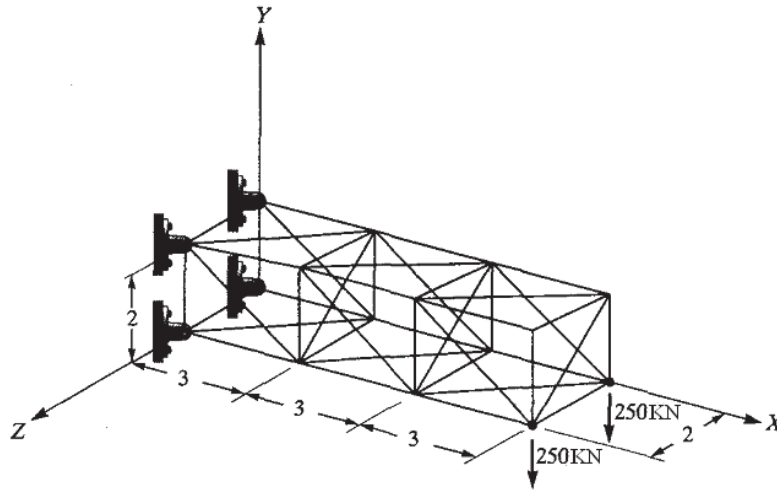


شکل ۴-۱۱ تغییر شکل یافته (خط توپر) و شکل اولیه (نقطه چین) خرپای مثال ۵

با روشی مشابه بخش ۵ برای استخراج روابط حاکم بر قاب دوبعدی می توان خرپاها و قاب های سه بعدی را به روش اعمال محدود تحلیل نمود. در این قسمت با استفاده از این روابط به تحلیل چند مثال پرداخته می شود.

مثال ۶. خرپای سه بعدی شکل ۴-۱۲ را برای بارگذاری نشان داده شده تحلیل نمایید. برنامه APDL مربوطه را برای تحلیل در انسیس بنویسید.

$$E=200 \text{ Gpa}, \nu = .$$



شکل ۴-۱۲ خرپای سه بعدی

جدول ۴-۷

موقعیت عضو	A□□□□
عضوهای عمود بر صفحات □□,□□	۲۵۴۰
عضوهای عمود بر صفحه □□	۳۲۷۰
سایر اعضا(عضوهای مورب)	۴۱۲۰

حل:

```

/PREP
ANTYPE,STATIC
ET,۱,LINK۸
R,۱,۱,۲۵۴۰,E-۶
R,۲,۲,۳۲۷۰,E-۶
R,۳,۳,۴۱۲۰,E-۶
MP,EX,۱,۲E۱۱
K,۱
K,۲,۲ → k,۲,,۲
K,۳,۲,۲ → k,۳,,۲,۲
K,۴,۲,۲ → k,۴,۲
K,۵,,,۳ → k,۵,۳
K,۶,۲,,۳ → k,۶,۳,,۲
K,۷,۲,۲,۳ → k,۷,۳,۲,۲
K,۸,,۲,۳ → k,۸,۳,۲,۰
K,۹,۰,۰,۰,۶ → k,۹,۳,۲,۰
    
```

$K_{,10.2,96} \rightarrow k_{,96}$
 $K_{,11.2.2.6} \rightarrow k_{,10,6,,2}$
 $K_{,12,92.6} \rightarrow k_{,11,6,2,2}$
 $K_{,13,99.9} \rightarrow k_{,12,6.2}$
 $K_{,14.2,99.9} \rightarrow k_{,13.9}$
 $K_{,15.2.2.9} \rightarrow k_{,14,9,,2}$
 $K_{,16,92.9} \rightarrow k_{,15,9,2,2}$
 $L_{,1.2} \rightarrow k_{,16,9.2}$
 $L_{,2.3}$
 $L_{,3.4}$
 $L_{,4.1}$
 $L_{,5.6}$
 $L_{,6.7}$
 $L_{,7.8}$
 $L_{,8.5}$
 $L_{,9.10}$
 $L_{,10.11}$
 $L_{,11.12}$
 $L_{,12.9}$
 $L_{,13.14}$
 $L_{,14.15}$
 $L_{,15.16}$
 $L_{,16.13}$
 $L_{,1.5}$
 $L_{,2.6}$
 $L_{,3.7}$
 $L_{,4.8}$
 $L_{,5.9}$
 $L_{,6.10}$
 $L_{,7.11}$
 $L_{,8.12}$
 $L_{,9.13}$
 $L_{,10.14}$
 $L_{,11.15}$
 $L_{,12.16}$
 $L_{,2.5}$
 $L_{,3.6}$
 $L_{,3.8}$
 $L_{,4.5}$
 $L_{,6.9}$
 $L_{,7.12}$
 $L_{,8.9}$

```

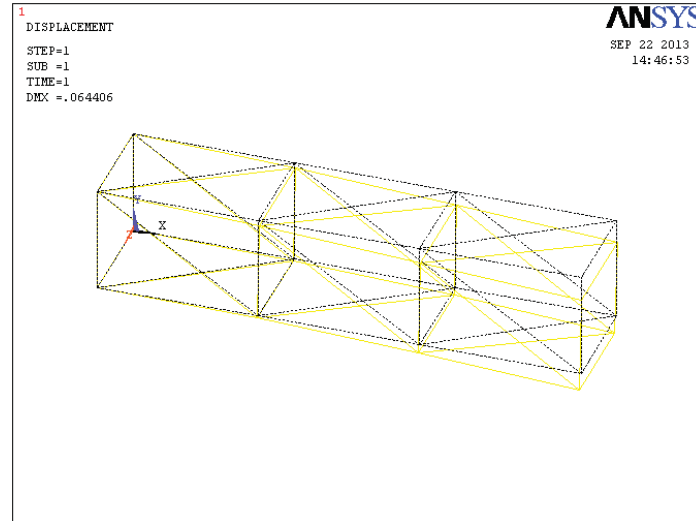
L,10,13
L,11,14
L,11,16
L,12,13
LESIZE,ALL,,1
LSEL,S,LINE,,2,16,20
LSEL,A,LINE,,1,15,20
LMESH,ALL
LSEL,ALL
REAL,2
LSEL,S,LINE,,17,28,10
LMESH,ALL
REAL,3
LSEL,S,LINE,,17,28,10
LSEL,ALL
REAL,3
LSEL,S,LINE,,29,40,10
LMESH,ALL
LSEL,ALL
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,ALL
NSEL,ALL
NSEL,S,LOC,X,9
NSEL,R,LOC,Y,0
F,ALL,FX,-25E3
NSEL,ALL
FINISH
/SOLU
SOLVE
FINISH
/POST\
PRRSOL,F
PLDISP,2
ETABLE,SAXL,LS,1
PRETAB,SAXL
FINISH

```

نتایج خروجی انسیس عبارتند از:

جدول ۴-۸

گره	F	F _y	F _x
۱	۰,۰	۰,۰	۰,۱۱۲۰E۷
۲	-۰/۱۵۱۱۳۴E۱۸	۰,۰	۰,۱۱۲۰E۷
۳	۰/۱۱۶۴۲E۱۹	۰/۲۵۲ E ۱۶	۰,۱۱۲۰E۷
۴	۰,۰	۰/۳۵ E ۱۶	۰,۱۱۲۰E۷



شکل ۱۳-۴ خرابای اولیه (خطوط خط چینی) و تغییرشکل یافته (خطوط توپر) خرابای اولیه

جدول ۹-۴

σ (Mpa)	میله تنش	σ (Mpa)	میله تنش	σ (Mpa)	میله تنش
$0.312772 \text{ E-}6$	۳۳		۱۷		۱
$0.10939 \text{ E}9$	۳۴		۱۸		۲
$0.12028 \text{ E}6$	۳۵		۱۹		۳
$0.10939 \text{ E}9$	۳۶		۲۰		۴
$0.1939 \text{ E-}6$	۳۷		۲۱		۵
$0.10939 \text{ E}9$	۳۸		۲۲		۶
$-0.13344 \text{ E-}7$	۳۹		۲۳		۷
$0.10939 \text{ E}9$	۴۰		۲۴		۸
			۲۵		۹
			۲۶		۱۰
			۲۷		۱۱
			۲۸		۱۲
		$0.66546 \text{ E-}6$	۲۹		۱۳
		$0.10939 \text{ E}9$	۳۰		۱۴
		$-0.48113 \text{ E-}7$	۳۱		۱۵
		$0.11939 \text{ E}9$	۳۲		۱۶

شکل ۴-۱۴ در این مثال سازه دوچرخه نمونه با یک قاب سه بعدی مدل می شود

مثال ۷. با در نظر گرفتن سازه یک دوچرخه شکل ۴-۱۴ به صورت یک قاب سه بعدی، مقادیر جابه‌جایی و تنش را در عضوهای آن محاسبه نمایید. سازه دوچرخه از لوله‌های آلومینیومی ($E=70000\text{ Mpa}$, $\nu=0.33$) تشکیل شده و نیروی وزن دوچرخه سوار روی زین و وزن پای او روی رکاب در نظر گرفته شده است. قطر خارجی لوله‌ها ۲۵ میلی‌متر و ضخامت آنها ۲ میلی‌متر است. شرایط مرزی در نقطه (۱)، مقیدی در تمام درجات آزادی و نقاط (۵) و (۶)، تقید در جهات UY و UZ است.

جدول ۴-۱۰ جدول مختصات گرهی

مختصات نقاط			
Z	Y	X	شماره نقطه
۰	۳۲۵	۰	۱
۰	۴۰۰	۰	۲
۰	۴۰۰	۵۰۰	۳
۰	۰	۵۰۰	۴
۵۰	۰	۸۲۵	۵
-۵۰	۰	۸۲۵	۶

حل:

/PREP۷

K,۱,۰,۳۲۵

K,۲,۰,۴۰۰

K,۳,۵۰۰,۴۰۰

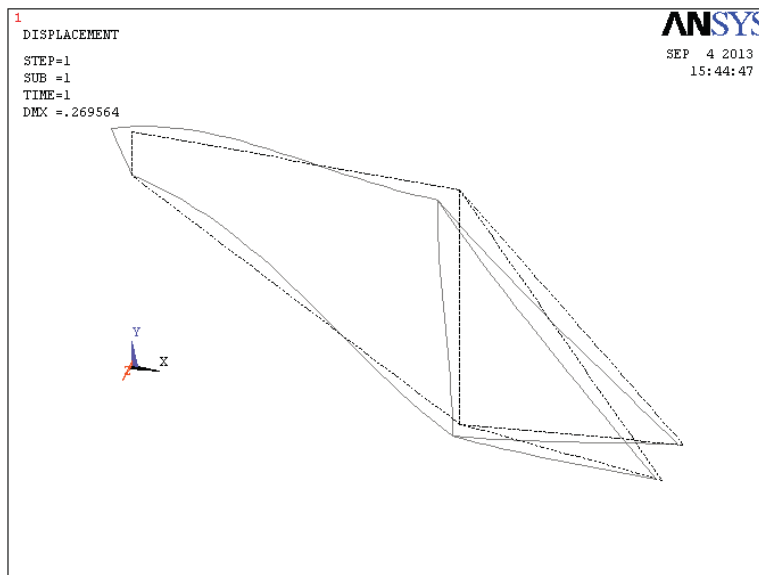
K,۴,۵۰۰

K,۵,۸۲۵,۰,۵۰

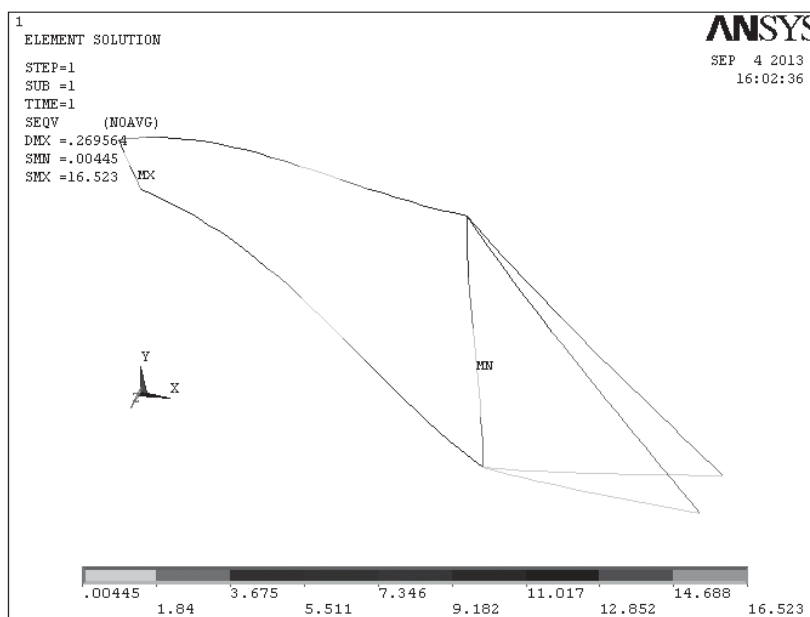
```

K,6,825,0,-50
L,1,2
L,2,3
L,3,4
L,4,1
L,4,5
L,4,6
L,3,5
L,3,6
MP,EX,1,N,0.000000
MP,PRXY,1,0.33
ET,1,PIPL,16
R,1,25,2
LES,1,E,ALL,20
LMESH,ALL
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX,0
D,ALL,UY,0
D,ALL,UZ,0
NSEL,S,LOC,X,825
D,ALL,UY,0
D,ALL,UZ,0
NSEL,S,LOC,X,500
NSEL,R,LOC,Y,400
F,ALL,FY,-600
NSEL,S,LOC,X,500
NSEL,R,LOC,Y,0
F,ALL,FY,-200
NSEL,ALL
FINISH
!*
/SOLV
SOLVE
FINISH
!*
/POST\
PLDISP,2
PLNSOL,U,COMP          !DMX=0.27m
ETABLE,S,EQV           !Equivalent stress
PLETAB,SEQV           !SMX=16.523mpa
FINISH

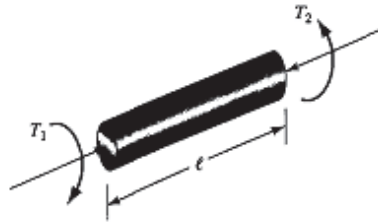
```



شکل ۴-۱۵ تغییر شکل یافته (خطوط کم رنگتر) سازه اولیه (خطوط تیره تر)



شکل ۴-۱۶ نحوه توزیع تنش در سازه تغییر شکل یافته



شکل ۱۷-۴ پیچش یک میله نمونه

۴-۶ پیچش یک میله

پیچش یک میله دایره‌ای مطابق شکل ۱۷-۴ را در نظر بگیرید. از مبحث مقاومت مصالح یادآوری می‌شود که زاویه پیچش θ را برای یک میله با سطح مقطع ثابت و ممان قطبی J و طول l ساخته شده از ماده‌ای همگن با مدول برشی G ، تحت گشتاور پیچشی T از رابطه زیر بدست می‌آید:

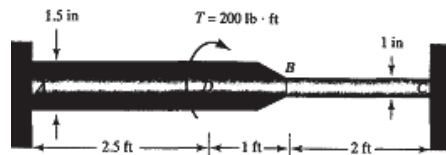
$$\theta = \frac{Tl}{JG} \quad (۴-۵)$$

با استفاده از این رابطه و شرایط تعادل می‌توان نشان داد؛ که برای یک المان شامل دو گره، ماتریس سختی، زاویه‌های چرخش و گشتاورها طبق رابطه زیر با هم مرتبطند:

$$\begin{bmatrix} T_1^{(e)} \\ T_2^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{J^{(e)}G^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^{(e)} \\ \theta_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad (۴-۶)$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود رابطه اخیر شبیه رابطه بخش قبل در خصوص کشش ساده است. در این حالت جمله $\frac{J^{(e)}G^{(e)}}{l^{(e)}}$ همان سختی المان را تشکیل می‌دهد.

مثال ۸. میله دو پله شکل ۱۸-۴ را در نظر بگیرید. قسمت AB این میله از ماده‌ای به $G_{AB} = 3.9 \times 10^6$ psi و به قطر ۱.۵ in ساخته شده است. قسمت BC از جنس متفاوتی با مدول برشی $G_{BC} = 4 \times 10^6$ psi و قطر ۱ in است. دو انتهای میله ثابت شده است. گشتاوری معادل ۲۰۰ lb.ft در D وارد می‌شود. با استفاده از سه المان زاویه پیچش میله در D و B و عکس‌العمل‌های پیچشی در مرزها را تعیین نمایید.
حل: مدل مش بندی شده این مساله متشکل از سه المان AD، DB و BC فرض می‌شود:



شکل ۱۸-۴

در این حالت ممان قطبی المان‌ها عبارتند از:

$$J_1 = J_2 = \frac{1}{2} \pi r^4 = 0.497 \text{ in}^4$$

$$J_3 = \frac{1}{2} \pi r^4 = 0.0982 \text{ in}^4$$

بنابراین ماتریس‌های سفتی المان عبارتند از:

$$[K]^{(1)} = \frac{(2.9 * 10^7)(0.497)}{12 * 2.0} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74710 & -74710 \\ -74710 & 74710 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{(2)} = \frac{(2.9 * 10^7)(0.497)}{12 * 1.0} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161020 & -161020 \\ -161020 & 161020 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{(3)} = \frac{(4.0 * 10^7)(0.0982)}{12 * 2.0} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16367 & -16367 \\ -16367 & 16367 \end{bmatrix}$$

ماتریس سفتی و معادلات سیستم عبارتند از:

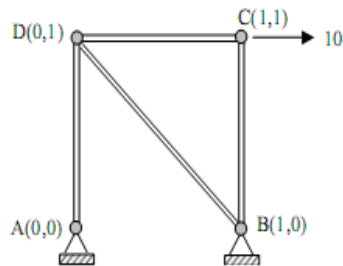
$$\begin{bmatrix} 74710 & -74710 & . & . \\ -74710 & 74710 + 161020 & -161020 & . \\ . & -161020 & 161020 + 16367 & -16367 \\ . & . & -16367 & 16367 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ -200 * 12 \\ . \\ . \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_A \\ R_B \\ R_D \\ R_C \end{bmatrix}$$

پس از اعمال شرایط مرزی $\theta_1 = \theta_4 = 0$ و $R_B = R_D = 0$ با حل سیستم معادلات بالا داریم:

$$\theta_2 = -0.0302 \text{ rad}, \theta_3 = -0.2742$$

$$R_A = 1901 \text{ lb.in} \quad R_C = 449 \text{ lb.in}$$

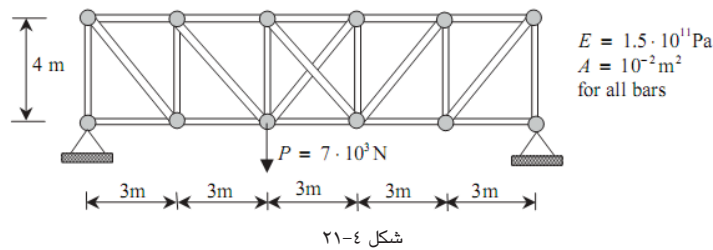
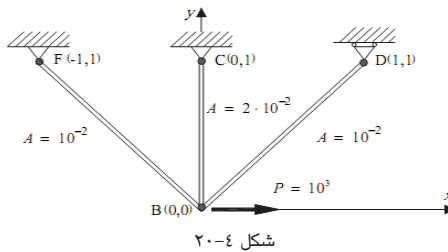
مسایل



شکل ۴-۱۹

مسئله ۱. قاب شکل ۱۹-۴ را در نظر بگیرید. هرگاه مختصات گره‌ها برحسب متر، مدول یانگ $E = 10^{11} \text{ Pa}$ و مساحت سطح مقطع میله‌ها $A = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ باشند.
 الف) سیستم را تجزیه نموده جابجایی‌های گرهی را تعیین نمایید؛
 ب) ماتریس‌های سختی و بارسیستم را محاسبه کنید؛
 ج) به میله‌ها شماره المان و به گره‌ها شماره گرهی اختصاص دهید؛
 د) تنش‌ها و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را محاسبه کنید؛

مسئله ۲. سازه سه میله‌ای شکل ۲۰-۴ تحت بار معلوم $P = 10^3 \text{ N}$ در نقطه B قرار گرفته است. مدول یانگ $E = 10^{11} \text{ Pa}$ ، مساحت سطح مقطع میله BC، $2 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ و مساحت سطح مقطع BD و B 10^{-2} m^2 هستند. تکیه‌گاه نقطه D از نوع غلتکی است. اگر مختصات نقاط گرهی بر حسب متر باشند:
 الف) ماتریس سختی و بار سیستم را تعیین کنید؛
 ب) با تجزیه سیستم و حل آن، جابجایی‌های نقاط B و D را محاسبه کنید؛
 ج) تنش داخل میله‌ها چقدر است؛
 د) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در گره‌های C و D را تعیین کنید.



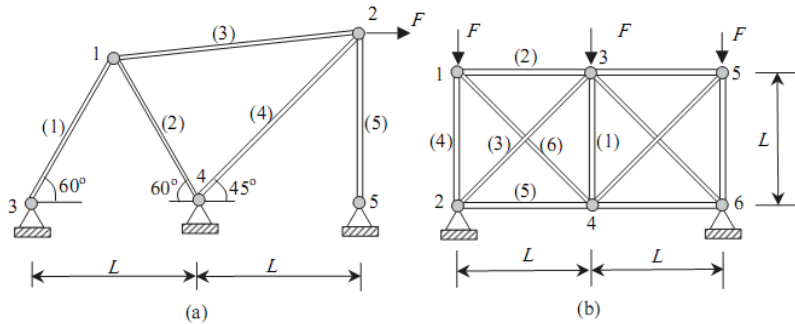
مسئله ۳. برنامه‌ای در محیط متلب برای تحلیل المان محدود با استفاده از روش پنالتی بنویسید که برای خرپای شکل ۴-۲۱:

الف) جابجایی گرهی و تنش داخل میله‌های خرپای مسطح شکل را محاسبه نمایید؛

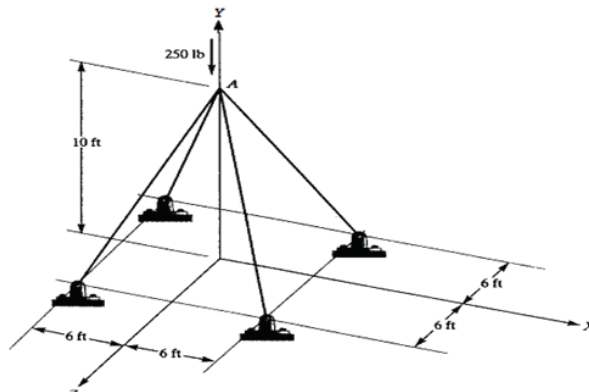
ب) سازه تغییر شکل یافته را رسم نماید. برای این منظور مقدار X_{mag} جابجایی گرهی را به مختصات گره-ها اضافه نمایید. فاکتور mag برای بزرگنمایی جابجایی‌ها استفاده می‌شود، تا قابل رویت باشند.

مسئله ۴. با استفاده از کد المان محدود متلب، جابجایی‌ها و نیروهای داخلی را در خرپاهای شکل ۴-۲۲ را پیدا کنید. برای خرپای شکل (b) تقارن را لحاظ نمایید. برای هر دو خرپا تعادل در گره ۱ را چک کنید.

$$10^6 N, L = 2 m, E = 10^{11} Pa, A = 10^{-2} m^2, F =$$



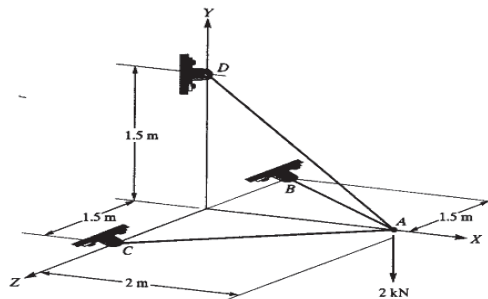
شکل ۴-۲۲



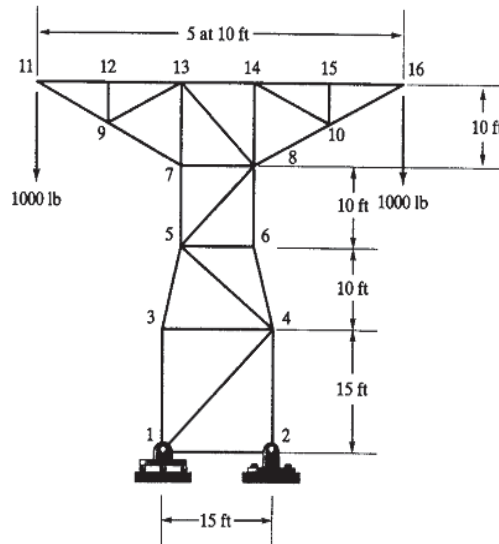
شکل ۴-۲۳

مسئله ۵. اگر سطح مقطع میله‌های سازه سه بعدی شکل ۲۳-۴ $A = 2.0 \text{ in}^2$ و جنس آنها از آلومینیم ($E = 10 \cdot 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$) با محاسبات دستی، جابجایی گره A، تنش در هر میله و نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهی را محاسبه کنید. صحت و دقت نتایج را بررسی کنید.

مسئله ۶. اگر سطح مقطع میله‌های سازه سه بعدی شکل ۲۴-۴ $A = 10 \text{ cm}^2$ و جنس‌شان از فولاد $E = 200 \cdot 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$ باشد. با محاسبات دستی جابجایی در نقطه A، تنش در میله‌ها و نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهی را محاسبه نمایید. نتایج بدست آمده را از نظر صحت و دقت بررسی کنید.



شکل ۲۴-۴

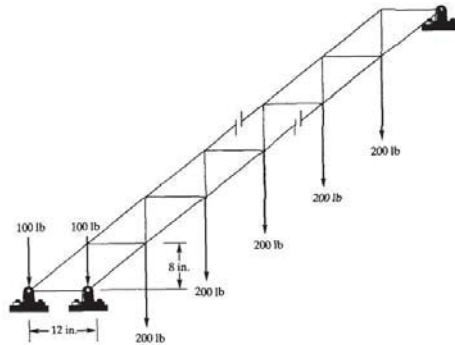


شکل ۲۵-۴

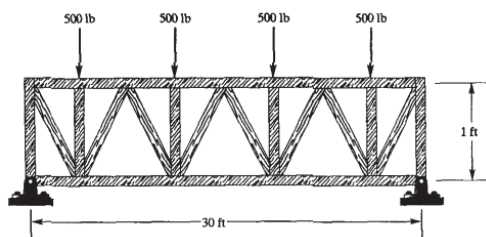
مسئله ۷. برج خط انتقال قدرت شکل ۴-۲۵ را در نظر بگیرید. سطح مقطع میله‌ها $A = 10 \text{ in}^2$ و مدول الاستیسیته $E = 29 * 10^6 \text{ psi}$ می‌باشد. با استفاده از انسیس، جابجایی هر مفصل، تنش در هر میله و عکس-العمل‌های تکیه‌گاهی را محاسبه نمایید.

مسئله ۸. خرپای پلکانی شکل ۴-۲۶ را در نظر بگیرید. ۱۴ پله هر یک به ارتفاع ۱۲in وجود دارند. میله‌ها دارای مساحت سطح مقطع $A = 4 \text{ in}^2$ و از جنس فولاد به $29 * 10^6 \text{ lb/in}^2$ هستند. با استفاده از انسیس جابجایی هر مفصل، تنش در هر میله و نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.

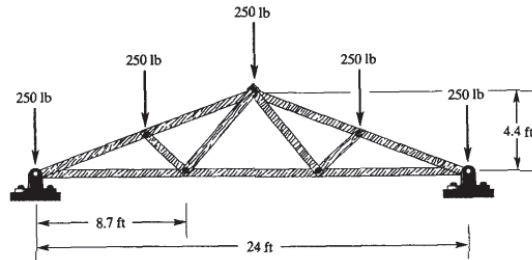
مسئله ۹. مساحت سطح مقطع میله‌های خرپای سقفی شکل ۴-۲۷ $A = 21.5 \text{ in}^2$ و جنس‌شان از نوعی چوب به مدول الاستیسیته $1.9 * 10^6 \text{ lb/in}^2$ است. با استفاده از انسیس جابجایی هر مفصل، تنش در هر میله و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را محاسبه نمایید. نتایج را بررسی صحتی و دقتی نمایید. همچنین یکی از تکیه‌گاه‌ها را با نوع غلتکی تعویض نموده و تنش داخلی میله‌ها را محاسبه کنید. در خصوص تفاوت نتایج بحث نمایید.



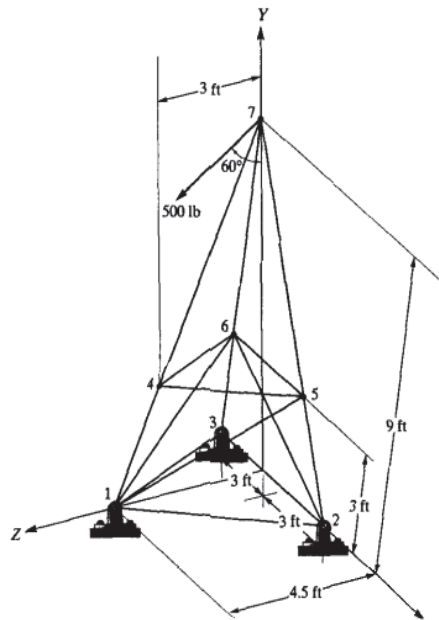
شکل ۴-۲۶



شکل ۴-۲۷



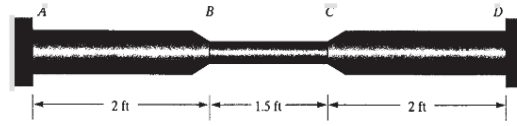
شکل ۴-۲۸



شکل ۴-۲۹

مسئله ۱۰. مسأله قبیل را برای خرپای شکل ۴-۲۸ تکرار نمایید.

مسئله ۱۱. خرپای سه بعدی شکل ۴-۲۹ از میله های آلومینیومی با مدول الاستیسیته $E = 10.9 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$ باشد و تحت نیروی 500 lb مطابق شکل قرار گرفته است. اگر مساحت سطح مقطع میله ها $A = 2.2 \text{ in}^2$ باشد با استفاده از نرم افزار انسیس جابجایی هر مفصل، تنش در میله ها و عکس العمل های تکیه گاهی را پیدا کنید. با دانستن اینکه ممان دوم سطح $4.09 \times 10^6 \text{ m}^4$ ، آیا فکر می کنید کمانش رخ می دهد؟ نتایج را از نظر دقت و صحت بررسی کنید.



شکل ۳۰-۴

مسئله ۱۲. شفتی از سه قسمت طبق شکل ۳۰-۴ ساخته شده است. قسمت‌های A و B از ماده‌ای به مدول $E_1 = 11,2 \times 10^6$ psi و هر یک به قطر ۱.۵ in می‌باشند. قسمت C از جنس دیگری به مدول برشی $G_1 = 11,2 \times 10^6$ psi و به قطر ۱.۵ in است. شفت در دو انتها ثابت شده است. گشتاور پیچشی $T = 2400$ lb-in در اعمال می‌شود. با استفاده از سه زاویه پیچش در θ و ϕ و عکس‌العمل‌های پیچشی در مرزها را پیدا نمایید.

$$\begin{array}{ccc}
 U(x_1) = U_1 \text{ O} & \text{---} & \text{O} = U(x_2) = U_2 \\
 \text{Or} & & \text{Or} \\
 \tau_1 = -(\alpha \frac{du}{dx})_{x=x_1} & & \tau_2 = -(\alpha \frac{du}{dx})_{x=x_2}
 \end{array}$$

شکل ۳۱-۴ دامنه تعریف مساله به همراه شرایط مرزی آن

۷-۴ روش حل تقریبی

در این بخش مراحل حل تقریبی (Finite Element Method) مسایل یک بعدی به روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method) تشریح می‌شوند. برای حل تقریبی یک معادله دیفرانسیل، ابتدا بجای حل دقیق معادله، یک جواب فرضی معروف به حل آزمایشی (Trial Solution) در نظر گرفته می‌شود. بدیهی است با جایگذاری این جواب در معادله، مقداری باقیمانده در حالت کلی ظاهر می‌شود که باید برای اینکه نزدیکترین جواب به جواب واقعی پیدا شود با اعمال یک ملاک بهینه سازی مناسب برای حل آزمایشی آن را به گونه ای تعیین نمود که باقیمانده معادله حداقل شود. هر گاه معادله دیفرانسیل حاکم روی دامنه شکل ۳۱-۴ به صورت:

$$\begin{array}{ll}
 -\frac{d}{dx}(\alpha \frac{du}{dx}) + \beta u = f(x) & \text{یا} \quad x_1 < x < x_2 & (4-48) \\
 \left\{ -(\alpha \frac{du}{dx})_{x=x_1} = \tau_1 \right. & \text{یا} \quad u(x_1) = u_1 \\
 \left. (\alpha \frac{du}{dx})_{x=x_2} \right. & \text{یا} \quad u(x_2) = u_2
 \end{array}$$

باشند:

الف) حل آزمایشی آن را به یکی از صورتهای زیر میتوان در نظر گرفت:

$$\bar{u}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \sum_{j=1}^n \alpha_j x^j \quad (49-4)$$

و یا

$$\bar{u}(x) = u_1 N_1(x) + u_2 N_2(x) + \dots = \sum_{j=1}^n u_j N_j(x) \quad (50-4)$$

که در این جندجمله ای ایها ضرایب α_j و یا u_j مجهول و توابع $N_j(x)$ توابع معلومی معروف به توابع شکل (□□□□□□□□□□□□□□□□) فرض می شوند. با جایگذاری حل آزمایشی \bar{u} بجای حل دقیق □ در معادله دیفرانسیل حاکم، معادله باقیمانده به دست می آید:

$$\square \square \square \square \square \frac{d}{dx} \square \alpha \frac{d\bar{u}}{dx} \square \square \square \beta \bar{u} - \square \square \square \neq . \quad (51-4)$$

(ب) تعیین و اعمال ملاک بهینه سازی برای \bar{u} :

با توجه به معلوم بودن مختصات x در (49-4) و یا توابع شکل N_j در حل آزمایشی (50-4)، ضرایب α_j و یا u_j را باید طوری پیدا کنیم که باقیمانده حداقل شود. برای این منظور به ازای هر u_j یک میانگین وزنی از R روی تمام حوزه برابر صفر قرار داده می شود. اما با توجه به اینکه در معادله باقیمانده باید از \bar{u} دو بار مشتق گیری شود باید \bar{u} حداقل از مرتبه دو باشد. با استفاده از انتگرال گیری جز به جز و کاهش مرتبه معادله دیفرانسیل می توان به کاهش مرتبه \bar{u} و ساده سازی محاسبات کمک کرد. با این کار ضمن اعمال شرایط مرزی در رابطه نهایی، شکل ضعیف شده انتگرال های بالا به دست خواهد آمد.

$$\int_{x_1}^{x_2} R w_i dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d\bar{u}}{dx} \right) + \beta \bar{u} + f \right] w_i dx = . \quad (52-4)$$

در رابطه 52-4، w_i توابع مجهولی معروف به توابع وزن می باشند.

به تعداد توابع شکل، توابع وزن خواهیم داشت. برای انجام انتگرال گیری 52-4 باید توابع وزن نیز معلوم باشند. برای این منظور یکی از روشهای متداول روش گالرکین (Galer kin Method) می باشد که در آن $w_i = N_i$ فرض می شوند.

مثال ۹. اگر

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{f}{\alpha}, \quad u(\cdot) = u(1) = .$$

با انتخاب $\bar{u} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ حل تقریبی مساله را با استفاده از روش گالرکین بدست آورید. (اگر $u = T$ و $f = Q$ و $\alpha = K$ باشد، معادله بالا مساله هدایت حرارتی پایدار یک بعدی را توصیف خواهد کرد)

حل:

$$u(\cdot) = \cdot \Rightarrow \alpha_0 = \cdot, \quad u(1) = \cdot \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{\alpha_0}{l}$$

$$\tilde{u} = u_1 \left(x - \frac{x^2}{l}\right)$$

$$R = d^2 \tilde{u} / dx^2 - \frac{f}{\alpha} = -\frac{2}{l} u_1 - \frac{f}{\alpha}$$

$$\int_0^1 R \phi_1 dx = \cdot \quad \text{or} \quad \int_0^1 \left(-\frac{2}{l} u_1 - \frac{f}{\alpha}\right) \left(x - \frac{x^2}{l}\right) dx = \cdot \Rightarrow u_1 = -\frac{fl}{2\alpha}$$

$$\tilde{u}(x) = -\frac{fl}{2\alpha} \left(x - \frac{x^2}{l}\right)$$

مثال ۱۰. اگر $\tilde{u} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ و

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = \cdot, \quad u(\cdot) = u(1) = \cdot$$

حل:

با استفاده از یک چندجمله‌ای مرتبه دوم، حل گالرکین معادله بالا عبارت است از:

$$\tilde{u}(\cdot) = \cdot \Rightarrow \alpha_0 = \cdot,$$

$$\tilde{u}(1) = \cdot \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$$

بنابراین:

$$\tilde{u} = u_1 x(1-x),$$

$$\int_0^1 (d^2 \tilde{u} / dx^2 + \tilde{u} + x)(x-x^2) dx = \cdot \Rightarrow u_1 = \frac{\cdot}{18}$$

$$\tilde{u}(x) = \frac{\cdot}{18} x(1-x)$$

مثال ۱۱. معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$-\alpha \frac{d^2 u}{dx^2} + v \frac{du}{dx} - f = \cdot, \quad u(\cdot) = u(1) = \cdot$$

با استفاده از روش گالرکین و بکارگیری حل آزمایشی

$$\tilde{u}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

حل تقریبی مساله را به دست آورید. فرض شود که

$$l = 1m, \alpha = 10^{-8}, v = 1.5 \times 10^{-8}, f = 10^{-8}$$

حل: (معادله فوق، معادله دیفرانسیل حاکم بر انتقال جرم یک بعدی است که $u(x)=c(x)$ غلظت نمونه‌های رقیق، $v(x)$ سرعت مخلوط، $D(x) = \alpha(x)$ و $f = m$ منبع خارجی جرم است). حل آزمایشی که شرایط مرزی را ارضا کند به شکل زیر است:

$$\tilde{u}(x) = u_1(x^2 - xl) + u_2(x^2 - xl^2)$$

معادلات باقیمانده وزنی، پس از انتگرال‌گیری عبارتند از:

$$\frac{\alpha}{\gamma} u_1 + \left(\frac{vl^2}{\gamma} + \frac{\alpha l}{\gamma} \right) u_2 + \frac{f}{\gamma} = 0$$

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{vl}{\gamma} \right) u_1 + \frac{\alpha l}{\gamma} u_2 + \frac{f}{\gamma} = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = -12.48, u_2 = -24.96$$

حل دقیق عبارت است از:

$$\tilde{u}(x) = \frac{f}{v} \left[x - \frac{l \left(x - e^{-\frac{vx}{\alpha}} \right)}{1 - e^{-\frac{vl}{\alpha}}} \right]$$

مثال ۱۲. مثال قبل را با فرض حل آزمایشی زیر حل کنید:

$$\tilde{u}(x) = u_1 x + u_2 (1 - e^x)$$

حل: با در نظر گرفتن شرایط مرزی، حل آزمایشی عبارت خواهد شد از:

$$\tilde{u}(x) = u_1 [x - l(1 - e^x)/(1 - e^l)]$$

تنها معادله باقیمانده وزنی پس از انتگرال‌گیری عبارت است از:

$$\frac{\alpha u_1 l^2}{(1 - e^l)^2} (e^l - \frac{1}{\gamma} e^{l-1}) + \frac{f l^2}{(1 - e^l)} (l - e^l + 1) - \frac{f l^2}{\gamma} = 0 \Rightarrow u_1 = 1.4$$

و حل تقریبی مساله عبارت است از:

$$\tilde{u}(x) = 1.4 \left[x - \frac{l(1 - e^x)}{1 - e^l} \right]$$

- مسایل

مساله ۱۳. با استفاده از روش گالرکین و حل آزمایشی

$$\tilde{u}(x) = u_1 x(x - l) + u_2 x^2(x - l)$$

حل تقریبی معادله زیر را به دست آورید.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -f, \quad u(0) = u(l) = 0$$
 حل دقیق مساله را پیدا کرده و با حل تقریبی مقایسه نمایید.

مساله ۱۴. شکل غیرهمگن معادله بسل (Bessel equation) زیر را در نظر بگیرید:

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + \frac{x^2 - 1}{x} u = -x^2 \quad 1 < x < 2$$

شرایط مرزی عبارتند از: $u(1) = u(2) = 0$. با استفاده از روش گالرکین و حل آزمایشی به صورت چندجمله‌ای مرتبه ۲، حل تقریبی معادله را به دست آورید.

مساله ۱۵. مساله مقدار اولیه زیر، شکل بدون بعد قانون سرمایه‌ش نیوتن است:

$$\frac{du}{dt} = -u \quad t > 0, \quad u(0) = 1$$

با انتخاب توابع پایه $\{1, t, t^2\}$ ، حل تقریبی مساله را با استفاده از روش گالرکین به دست آورید. جواب-های به دست آمده را با حل دقیق مقایسه نمایید.

مساله ۱۶. خیز تیر روی پی‌الاستیک با معادله دیفرانسیل زیر به شکل بدون بعد، توصیف می‌شود:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + u = 1$$

با شرایط مرزی (خیز و ممان صفر در دو انتها)

$$u = \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad \text{at } x = 0, x = 1$$

با انتخاب توابع شکل $\{\sin \pi x, \sin 2\pi x\}$ و استفاده از روش گالرکین، حل تقریبی مساله را به دست آورید.

$$\frac{d}{dx} \left[k(u) \frac{du}{dx} \right] = 0 \quad \text{مساله ۱۷. غیرخطی}$$

حالت هدایت حرارت پایدار از طریق یک تختال، با عرض واحد و ضریب هدایت $k(u)$ را توصیف می‌کند. شرایط مرزی در شکل بدون بعد (درجه حرارت $u = T$) عبارتست از: $u(0) = u(1) = 1$ برای $k(u) = 1 + u$ و توابع شکل چندجمله‌ای $\{1, x, x^2\}$ ، حل تقریبی مساله را با استفاده از روش گالرکین به دست آورید. نتایج را با حل دقیق زیر مقایسه کنید.

$$u(x) = 1 + 2x - x^2$$

مساله ۱۸. معادله دیفرانسیل حاکم بر یک طناب معلق، عبارتست از:

$$-\frac{d}{dx}\left(T\frac{dw}{dx}\right) = -\rho g \quad 0 < x < l$$

با شرایط مرزی $w(x), w(0)=w(l)=0$ خیز عمودی طناب است. فرض شود که $l=1.0\text{ m}$, $g=9.8\text{ m/s}^2$, $\rho = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ و $T=98\text{ N}$. خیز طناب را در مرکز و در فاصله $l/4$ از هر انتها به دست آورید. سه حل آزمایشی زیر را به کار گیرید. حل تقریبی مساله را با استفاده از روش گالرکین پیدا کنید.

$$\begin{aligned}\tilde{w}_1(x) &= w_1 \sin\left(\frac{\pi x}{1.0}\right) \\ \tilde{w}_2(x) &= w_1 \sin\left(\frac{\pi x}{1.0}\right) + w_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{1.0}\right) \\ \tilde{w}_3(x) &= w_1 \sin\left(\frac{\pi x}{1.0}\right) + w_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{1.0}\right) + w_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{1.0}\right)\end{aligned}$$

حل دقیق مساله عبارت است از:

$$w(x) = \frac{x(x-1.0)}{2.0}$$

آیا حل‌های تقریبی حاصل از بکارگیری حل‌های آزمایشی فوق‌الذکر به سمت حل حقیقی همگرا هستند؟

مساله ۱۹. چنانچه حل آزمایشی مساله قبل را به شکل چندجمله‌ای مرتبه دو زیر انتخاب کنیم $\tilde{w}(x, \alpha) = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ آیا حل تقریبی بر حل دقیق منطبق خواهد شد؟ مساله ۲۰. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} u = 0, \quad 0 < x < \pi \quad u(\pi) = 0, \quad u(0) = 1$$

با استفاده از چندجمله‌های مرتبه سه برای حل آزمایشی زیر، حل تقریبی مساله را بدست آورید. (با استفاده از روش گالرکین)

$$\tilde{u}(x, \alpha) = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

مساله ۲۱. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dx}\left[(x+1)\frac{du}{dx}\right] = 0 \quad 1 < x < 2$$

$$u(1) = 1, \quad \tau(2) = (x+1)\frac{du}{dx} = 1$$

الف) با روش گالرکین و حل آزمایشی $\tilde{u}(x, \alpha) = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ حل تقریبی را برای تابع u و شار τ بدست آورید؛

ب) حل تقریبی را با استفاده از چندجمله‌های مرتبه سه برای حل آزمایشی پیدا کنید؛

(ج) دو حل تقریبی (الف) و (ب) را با یکدیگر و با حل دقیق مساله مقایسه کنید:

$$u(x) = 1 - \ln \left[\frac{x+1}{4} \right], \quad \tau(x) = 1$$

مساله ۲۲. معادله دیفرانسیل زیر همراه با شرایط مرزی مربوطه را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{du}{dx} \right) = \frac{1}{12} (110x - 301x^2 + 204x^3 - 30x^4) \quad 0 < x < 4$$

$$u(0) = 1, u(4) = 0$$

با استفاده از روش گالرکین و دو حل آزمایشی، چندجمله‌ای مرتبه دو و چندجمله‌ای مرتبه سه، حل تقریبی مساله را بدست آورید. نتایج را با حل دقیق زیر مقایسه کرده و پیرامون نتایج حاصل بحث کنید.

$$u(x) = \frac{1}{24} (24 + 110x - 117x^2 + 34x^3 - 3x^4)$$

مساله ۲۳. تغییرات دما بر حسب زمان در جسمی که بصورت داخلی حرارت داده می‌شود و از طریق سطح خارجی حرارت از دست می‌دهد با معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{dT}{dt} + KT = f$$

که $T(t)$ دما، C ظرفیت حرارتی، $K \left(\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{c}} \right)$ ضریب اتلاف جابجایی $\left(0.1 \frac{\text{cal}}{\text{s cm}^2 \text{c}} \right)$ و f منبع حرارتی داخلی $\left(\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{s}} \right)$ است. چون معادله دیفرانسیل از مرتبه اول است، لذا فقط به یک شرط اولیه نیاز دارد: $T = 40$ در $t = 0$. هرچند حل دقیق متضمن میرایی نمایی است که تا $t = \infty$ امتداد می‌یابد، اما در اینجا حل مساله فقط در ۱۰ ثانیه اول مورد توجه است.

(الف) با استفاده از روش گالرکین و استفاده از چندجمله‌ای مرتبه دو به عنوان حل آزمایشی، حل تقریبی $\tilde{T}(t)$ را بدست آورید و نتایج را در $t = 0 \text{ sec}$ و $t = 10 \text{ sec}$ با حل دقیق مقایسه کنید؛ (ب) حل تقریبی را در $t = 10 \text{ sec}$ با حل دقیق مقایسه کنید. برای بهبود حل تقریبی چه تغییر و تجدید نظری در حل آزمایشی باید انجام داد.

تفاوت اصلی روش عمومی حل آزمایشی با روش حل المان محدود در آن است که در روش اول، کل حوزه تعریف مساله به عنوان یک محیط پیوسته تلقی شده و حل آزمایشی روی تمام حوزه تعریف می‌گردد؛

اما در روش دوم (۱) حوزه تعریف مساله به تعدادی المان گسسته شده و حل آزمایشی روی هر المان نوشته می‌شود. باید نوعی پیوستگی بین المان‌ها را برای تطابق با واقعیت فیزیکی پیوسته اعمال کرد؛ (۲) توابع آزمایشی بصورت چندجمله‌ای حتی الامکان ساده انتخاب می‌شود؛ (۳) حل آزمایشی به صورت ترکیب خطی توابع آزمایشی که واجد خواص میانمایی هستند نوشته می‌شود؛ (۴) پارامترهای u_i در حل آزمایشی باید مقدار تابع مجهول را در نقاط مشخص به نام گره‌ها نمایش دهند.

۸-۴ مسایل مقدار مرزی یک بعدی المانهای خطی

معادله دیفرانسیل و حوزه تعریف مساله به صورت:

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha \frac{du}{dx}\right) + \beta u = f(x) \quad x_1^{(e)} < x < x_r^{(e)} \quad (53-4)$$

و شرایط مرزی

$$\tau(x_1^{(e)}) = -\left(\alpha \frac{du}{dx}\right) = \tau_1^{(e)} \quad \text{یا} \quad u(x_1^{(e)}) = u_1^{(e)} \quad (54-4)$$

$$\tau(x_r^{(e)}) = \left(\alpha \frac{du}{dx}\right) = \tau_r^{(e)} \quad \text{یا} \quad u(x_r^{(e)}) = u_r^{(e)}$$

مراحل حل المان محدود معادله دیفرانسیل (۵۳-۴) عبارت است از:

۱) نوشتن معادله باقیمانده انتگرال گیری جز به جز:

$$R^{(e)}(x) = -\frac{d}{dx}\left(\alpha^{(e)} \frac{d\tilde{u}^{(e)}}{dx}\right) + \beta^{(e)} \tilde{u}^{(e)} - f^{(e)} \quad (55-4)$$

$$\int^{(e)} R^{(e)}(x, a) N_j^{(e)}(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\int^{(e)} \left(-\frac{d}{dx}\left(\alpha^{(e)} \frac{d\tilde{u}^{(e)}}{dx}\right) + \beta^{(e)} \tilde{u}^{(e)} - f^{(e)}\right) N_i^{(e)} dx = 0$$

$$\int^{(e)} \left(\alpha^{(e)} \frac{d\tilde{u}^{(e)}}{dx} \frac{dN_i^{(e)}}{dx} + \beta^{(e)} \tilde{u}^{(e)} N_i^{(e)} - f^{(e)} N_i^{(e)}\right) dx = \int^{(e)} f^{(e)} N_i^{(e)} dx - \left[\left(-\alpha \frac{d\tilde{u}}{dx}\right) N_i\right]^{(e)} \quad (56-4)$$

۲) تعیین شکل عمومی حل آزمایشی:

$$\tilde{u}^{(e)} = \sum_{j=1}^n u_j^{(e)} N_j^{(e)} \quad \& \quad \frac{d\tilde{u}^{(e)}}{dx} = \sum_{j=1}^n u_j^{(e)} \frac{dN_j^{(e)}}{dx} \quad (57-4)$$

و قرار دادن آن در معادله باقیمانده

$$\sum_{j=1}^n \left(\int \frac{dN_i^{(e)}}{dx} \alpha^{(e)} \frac{dN_j^{(e)}}{dx} dx + \int N_i^{(e)} \beta^{(e)} N_j^{(e)} dx \right) u_j^{(e)}$$

$$= \int^{(e)} f^{(e)} N_i^{(e)} dx - \left[-\alpha \frac{d\tilde{u}}{dx} N_i^{(e)} \right]^{(e)}$$

$$k_{ij}^{(e)} = \int^{(e)} \frac{dN_i^{(e)}}{dx} \alpha^{(e)} \frac{dN_j^{(e)}}{dx} dx + \int^{(e)} N_i^{(e)} \beta^{(e)} N_j^{(e)} dx$$

$$F_i^{(e)} = F_{Li}^{(e)} + F_{Bi}^{(e)} = \int^{(e)} f^{(e)} N_i^{(e)} dx - \left[\left(-\alpha \frac{d\tilde{u}}{dx}\right) N_i^{(e)} \right]^{(e)} \quad (58-4)$$

بنابراین از روابط بالا داریم:

$$\sum_{j=1}^n k_{ij}^{(e)} a_j^{(e)} = F_i^{(e)} \quad (59-4)$$

یا بصورت ماتریسی

$$[k]^{(e)}[a]^{(e)} = [F]^{(e)} \quad (60-4)$$

۳) تعیین عبارات ویژه برای توابع آزمایشی و قرار دادن آنها در معادلات المان با در نظر گرفتن المان خطی

$$\tilde{u}^{(e)}(x) = \sum_{j=1}^r u_j^{(e)} N_j^{(e)} = u_1 N_1^{(e)} + u_r N_r^{(e)} = [N]^{(e)}\{u\}^{(e)} \quad (61-4)$$

$$N_1^{(e)} = \frac{x_r^{(e)} - x}{x_r^{(e)} - x_1^{(e)}} = \frac{x_r^{(e)} - x}{l^{(e)}} \quad \& \quad N_r^{(e)} = \frac{x - x_1^{(e)}}{x_r^{(e)} - x_1^{(e)}} = \frac{x - x_1}{l^{(e)}} \quad (62-4)$$

$$\frac{dN_1^{(e)}}{dx} = \frac{-1}{x_r^{(e)} - x_1^{(e)}} = \frac{-1}{l^{(e)}} \quad \& \quad \frac{dN_r^{(e)}}{dx} = \frac{1}{x_r^{(e)} - x_1^{(e)}} = \frac{1}{l^{(e)}} \quad (63-4)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{1r} \\ k_{r1} & k_{rr} \end{bmatrix}^{(e)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_r \end{bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_r \end{bmatrix}^{(e)} \quad (64-4)$$

۴) تعیین عبارات عمومی برای خواص فیزیکی، انتگرال‌گیری و آماده کردن معادلات جبری المان و عبارات شار: می‌توان α و β را به شکل زیر تعیین کرد:

$$\beta^{(e)} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \quad \alpha^{(e)} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \quad (65-4)$$

f را هم می‌توان بصورت تابعی شبیه α و β فرض کرد.

در اینجا فرض می‌شود در داخل هر المان α و β و f مقادیر ثابتی هستند که در نقطه وسط المان $x_c = \frac{x_1^{(e)} + x_r^{(e)}}{2}$ محاسبه شده‌اند و برابرند با:

$$f = f^{(e)}, \quad \beta = \beta^{(e)}, \quad \alpha = \alpha^{(e)}$$

بنابراین:

$$k_{11}^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} \left(\frac{-1}{l}\right) \alpha \left(\frac{-1}{l}\right) dx + \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} \left(\frac{x_r^{(e)} - x}{l}\right) \beta \left(\frac{x_r^{(e)} - x}{l}\right) dx = \frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{r} \quad (66-4)$$

که $l = x_r^{(e)} - x_1^{(e)}$ طول المان است. به همین ترتیب:

$$k_{1r}^{(e)} = \frac{\alpha^{(e)}}{l^{(e)}} + \frac{l^{(e)} \beta^{(e)}}{r} \quad (67-4)$$

$$k_{r1}^{(e)} = k_{1r}^{(e)} \quad \text{و} \quad k_{rr}^{(e)} = k_{11}^{(e)} \quad (68-4)$$

$$f_1^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} \left(\frac{x_r^{(e)} - x}{x_r^{(e)} - x_1^{(e)}}\right) f dx + \left(-\alpha \frac{d\tilde{u}}{dx}\right)_{x_1^{(e)}} = \frac{f^{(e)} \tau^{(e)}}{r} + \tau_i^{(e)} \quad (69-4)$$

$$f_r^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} \left(\frac{x - x_1^{(e)}}{x_r^{(e)} - x_1^{(e)}}\right) f dx - \left(-\alpha \frac{d\tilde{u}}{dx}\right)_{x_r^{(e)}} = \frac{f^{(e)} \tau^{(e)}}{r} + \tau_i^{(e)} \quad (70-4)$$

در روش المان محدود کلیه بارهای گسترده در نهایت باید تبدیل به بارهای متمرکز وارد به گره‌ها شوند. این بارهای متمرکز معادل بارهای گسترده هستند)

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha^{(e)}}{l^{(e)}} + \frac{\beta^{(e)}}{\gamma} l^{(e)} & \frac{-\alpha^{(e)}}{l^{(e)}} + \frac{\beta^{(e)} l^{(e)}}{\gamma} \\ -\frac{\alpha^{(e)}}{l^{(e)}} + \frac{\beta^{(e)} l^{(e)}}{\gamma} & \frac{\alpha^{(e)}}{l^{(e)}} + \frac{\beta^{(e)} l^{(e)}}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f^{(e)} l^{(e)}}{\gamma} \\ \frac{f^{(e)} l^{(e)}}{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{r}_1^{(e)} \\ \tilde{r}_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad (71-4)$$

ادامه مراحل حل عبارتند از:

۵) تعیین داده‌های هندسی و خواص فیزیکی و محاسبه جملات مندرج در معادلات المان؛
داده‌های هندسی از طریق مش‌بندی و تعیین مختصات گره‌ها، شماره آنها و شماره المان‌های مربوطه معلوم می‌گردند.

۶) مونتاژ المان‌ها و تشکیل دستگاه معادلات سیستم؛

۷) اعمال شرایط مرزی؛

۸) حل دستگاه معادلات سیستم (معمولاً با استفاده از روش حذف گوسی)؛

۹) محاسبه تابع، شار و سایر کمیات مورد نظر و نمایش جدولی و نموداری آن؛

۱۰) تحلیل نتایج و برآورد دقت آنها.

مثال ۱۳. مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای زیر را به‌مراه شرایط مرزی آن در نظر بگیرید:

$$\square \frac{d^2 u}{dx^2} \square \quad \cdot < x < 1, \quad u(\cdot) = u'(1) = \cdot$$

مساله را با یک، دو و چهار المان خطی حل کنید. (حل دقیق $u(x) = 2x - x^2$)

حل: با مقایسه معادله بالا با شکل عمومی معادله دیفرانسیل داریم:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad f = 2$$

$$k^{(e)} = \frac{\alpha^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F^{(e)} = \begin{bmatrix} l^{(e)} \\ l^{(e)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{r}_1^{(e)} \\ \tilde{r}_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

بنابراین

حل با یک المان $l^{(1)} = 1$ و داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{(1)} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{(1)} + \begin{bmatrix} \tilde{r}_1^{(1)} \\ \tilde{r}_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

شرایط مرزی $u_1 = 0, \tilde{r}_2 = 0$ می‌باشند؛ یعنی

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{r}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow u_2 = 1$$

و لذا

$$\bar{u}^{(1)}(x) = u_1 N_1^{(1)} + u_2 N_2^{(1)} = 0 \cdot N_1^{(1)} + 1 \cdot \frac{x - x_1^{(1)}}{l^{(1)}} = x, \quad \frac{d\bar{u}^{(1)}}{dx} = 1$$

حل با دو المان: $x_1 = 0, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 1$

$$[K]^{(1)} = \frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad [F]^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{(1)} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix}^{(1)}$$

$$[K]^{(2)} = \frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad [F]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{(2)} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix}^{(2)}$$

با اعمال پیوستگی \tilde{u} بین دو المان، مونتاژ می‌شوند:

$$\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{u}^{(1)} \\ -\tau_1^\vee + \tau_1^\vee \\ \tau_1^\vee \end{bmatrix}$$

شرایط مرزی عبارتند از: $\tau_1^\vee = 0$ با اعمال این شرایط، نتیجه نهایی دو معادله جبری زیر است:

$$\epsilon u_\xi - \sqrt{2} u_r = 1$$

$$-\sqrt{2} u_r + \sqrt{2} u_r = 0$$

از حل این معادلات داریم: $u_r = \sqrt{2}/\epsilon$, $u_r = 1$. لذا حل تقریبی مساله با دو المان به صورت زیر است:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \frac{x}{\epsilon} & 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{(x+1)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} & 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

حل با چهار المان: با تعریف مساله با چهار المان متساوی الفاصله و تشکیل ماتریس‌های سختی و بار و مونتاژ آنها داریم:

$$\epsilon \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_\xi \\ u_o \end{bmatrix} = \frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1^{(1)} \\ \tau_1^{(1)} \\ \tau_1^{(1)} \\ \tau_1^{(\xi)} \\ \tau_1^{(\xi)} \end{bmatrix}$$

$$u_r = \frac{\sqrt{2}}{\epsilon}, \quad u_r = \frac{\sqrt{2}}{\epsilon}, \quad u_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u_o = 1$$

با اعمال شرایط مرزی $\tau_1^{(\xi)} = 0$ داریم:

و حل تقریبی عبارت است از:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}x}{\epsilon} & 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{(\sqrt{2}x+1)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{(\sqrt{2}x+1)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{(x+1)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} & 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

شکل ۴-۲۲ مقایسه حل مثال ۱۳ با مقدار المان های مختلف . با افزایش تعداد گرهها، جوابها دقیق تر شده اند.

مثال ۱۴. مسأله مقدار مرزی دو نقطه ای زیر داده شده است:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = e^x \quad 0 < x < 1 \quad u(0) = u(1) = 0$$

حل مسأله را با استفاده از چهار المان خطی بیابید؟

$$[K]^{(e)} = \frac{1}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: ماتریس سختی المان های چهارگانه شبیه مثال قبل است:

$$FI_i^{(e)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^x N_i dx$$

ماتریس بار عبارت است از:

پس از انجام محاسبات خواهیم داشت:

$$FI^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.13711 \\ 0.14792 \end{bmatrix}, \quad FI^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.17467 \\ 0.18994 \end{bmatrix}, \quad FI^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.22439 \\ 0.24389 \end{bmatrix}, \quad FI^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.28812 \\ 0.31315 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی کل شبیه مثال قبل برای چهار المان است. پس از اعمال شرایط مرزی معادلات زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases} 8u_r - 4u_r = 0.32268 \\ -4u_r + 8u_r - 4u_l = 0.41433 \\ -4u_r + 8u_l = 0.53202 \end{cases} \quad u_r = 0.1455, u_r = 0.2104, u_l = 0.1717$$

مثال ۱۵. معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از دو المان خطی حل کنید؟

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 \quad 0 < x < 1 \quad u(0) = u(1) = 0$$

$$u(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(1)} - x$$

حل دقیق مسأله عبارت است از:

حل: در این حالت داریم: $f(x) = -x$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, لذا ماتریس سختی هر المان عبارت خواهد بود از:

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l^{(e)}} + \frac{1}{3} & \frac{1}{l^{(e)}} + \frac{1}{6} \\ \frac{1}{l^{(e)}} + \frac{1}{6} & -\frac{1}{l^{(e)}} + \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

چون $f(x)$ در داخل المان ثابت نیست باید انتگرال بار داخلی را محاسبه کرد:

$$FI_1^{(s)} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_1 dx = \int_{x_1}^{x_2} -x \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} dx = -\frac{1}{6} (x_2^2 + x_1 x_2 - 2x_1^2)$$

$$FI_2^{(s)} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_2 dx = \int_{x_1}^{x_2} -x \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx = -\frac{1}{6} (2x_2^2 - x_1 x_2 - x_1^2)$$

برای دو المان هم طول و $1 = x_2 = 0.5$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_1 = 0$ خواهیم داشت:

$$[K]^{(s)} = [K]^{(e)} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -22 & 20 \\ 20 & -22 \end{bmatrix}, FI^{(s)} = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, FI^{(e)} = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس از مونتاژ دو المان داریم:

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} -22 & 20 \\ 20 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{t}(x_1) \\ \tilde{t}(x_2) \end{bmatrix}$$

با اعمال شرایط مرزی لازم $u_1 = u_2 = 0$ داریم:

$$\frac{1}{12} (-22) u_2 = -\frac{1}{24} (1) \rightarrow u_2 = \frac{1}{44} = 0.0227$$

حل دقیق در نقطه $x = 0.5$ برابر 0.0697 است. □

مسائل:

مسئله ۲۴. مساله مرزی دو نقطه‌ای زیر را با استفاده از دو المان خطی حل کنید:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = 2 \quad (0 < x < 1), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 1$$

جواب: $a_2 = 2, a_1 = \frac{1}{4}, a_0 = 0$

مسئله ۲۵. مساله قبل را به ازای شرایط مرزی نیومن همگن حل نمایید.

$$(u'(\cdot) = u'(1) = 0)$$

مسئله ۲۶. معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از سه و چهار المان خطی حل کنید.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

مسئله ۲۷. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dx} \left(x^\gamma \frac{du}{dx} \right) = C x^\gamma$$

با شرایط مرزی $u(b) = Bu(a) = A$ که C, B, A ثابتند. با استفاده از روش گالرکین معادلات عمومی را برای یک المان خطی به دست آورید.

مسئله ۲۸. معادلات المان را برای مساله عمومی زیر به دست آورید.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \beta u = f, \quad x_a < x < x_b$$

در این رابطه β و f ثابت هستند. از المان خطی استفاده شود.

مسئله ۲۹. معادله دیفرانسیل یک بعدی و شرایط مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \beta u = f, \quad a < x < b$$

$$\frac{du}{dx}(a) = c_1, \quad \frac{du}{dx}(b) = c_2 u + c_3$$

که c_1, f, B, c_2, c_3 ثابت اند. با استفاده از روش گالرکین معادلات المان با دو گره را به دست آورید. نحوه اعمال شرایط مرزی را شرح دهید.

مسئله ۳۰. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dx} \left[(x+1) \frac{du(x)}{dx} \right] = 0, \quad 1 < x < 2$$

با شرایط مرزی $u(1) = 1, u(2) = \tau$

الف) معادلات المان را بدست آورید؛

ب) حل تقریبی با یک المان را برای تابع شار بدست آورید؛

ج) شبکه را ریزتر نموده و حل را برای دو و سه المان به دست آورید؛

د) حل‌ها را رسم نموده و همگرایی حل‌های متوالی را مورد بحث قرار دهید.

مسئله ۳۱. معادله دیفرانسیل مقابل را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dx} \left[(x+1) \frac{du(x)}{dx} \right] = 0, \quad 1 < x < 2$$

با شرایط مرزی $u(1)=1$ ، $u(2)=2$

الف) معادلات المان را بدست آورید؛

ب) حل تقریبی را با یک المان بدست آورید؛

ج) با ریزتر کردن شبکه، حل را برای دو، سه و چهار المان بدست آورید؛

د) حل‌ها را رسم نموده و پیرامون همگرایی حل‌های تقریبی بحث نمایید.

مسئله ۳۲. شکل انتگرالی معادلات المان را برای معادله دیفرانسیل زیر به دست آورید.

$$-\frac{d}{dx} \left[(1+x) \frac{du}{dx} \right] = f \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u \quad \left[(1+x) \frac{du}{dx} \right]_{x=1} = q \quad \text{شرایط مرزی عبارتند از:}$$

مسئله ۳۳. مسئله قبل را به ازای $f=0$ ، $u=1$ و $q=0$ با استفاده از دو المان خطی حل کنید.

مسئله ۳۴. معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از دو و چهار المان خطی حل کنید.

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + u = f(x) \quad 0 < x < 5, \quad u(0) = 10, \quad \tau(5) = 0$$

$$f(x) = -x^2 + 6x^2 + x - 12$$

حل دقیق مساله عبارت است از:

$$u(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x(x-1)(x-5)$$

$$\tau(x) = -C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 3x^2 - 12x + 5$$

$$C_2 = 10 - C_1, \quad C_1 = \left(10 + \frac{10e^{-5}}{e^5 + e^{-5}} \right)$$

مسئله ۳۵. مسئله توصیف شده با معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{du(x)}{dx} \right] = \frac{\tau}{x^2} \quad 1 < x < 2$$

$$u(1) = 2, \quad \left[x \frac{du(x)}{dx} \right]_{x=2} = 0.5$$

حل تقریبی مساله را با استفاده از یک، دو، چهار و هشت المان خطی به دست آورید. همگرایی جوابها را با

ظرفتر کردن شبکه مورد بررسی و بحث قرار دهید.

۹-۶ مسایل مقدار مرزی یک بعدی: المان‌های مرتبه بالاتر

المان C^0 مرتبه دو (شبهه مستقیم)

در قسمت قبل، هر تابع شکل یک چندجمله‌ای خطی بود که مقدار آن در یک گره ۱ و در گره‌های دیگر صفر بود. چون یک چندجمله‌ای درجه دو دارای سه جمله است $(a + bx + cx^2)$ ، لذا برای تعریف چنین چندجمله‌ای، سه گره نیاز است. بر این اساس حل آزمایشی زیر انتخاب می‌شود.

$$\tilde{u}^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_r x + \alpha_c x^2 = \sum_{j=1}^3 u_j N_j^{(e)} = u_1 N_1^{(e)} + u_r N_r^{(e)} + u_c N_c^{(e)} \quad (72-4)$$

معاملات u_1, u_r, u_c در درجات آزادی المان هستند. توابع شکل دارای خاصیت $\delta_{ij} N_i^{(e)}(x_j) = \delta_{ij}$ هستند و عبارتند از: (چندجمله‌ای‌های درجه دوم درونیاب لاگرانژ)

$$N_1^{(e)} = \frac{(x - x_r^{(e)})(x - x_c^{(e)})}{(x_1^{(e)} - x_r^{(e)})(x_1^{(e)} - x_c^{(e)})}$$

$$N_r^{(e)} = \frac{(x - x_1^{(e)})(x - x_c^{(e)})}{(x_r^{(e)} - x_1^{(e)})(x_r^{(e)} - x_c^{(e)})}$$

$$N_c^{(e)} = \frac{(x - x_1^{(e)})(x - x_r^{(e)})}{(x_c^{(e)} - x_1^{(e)})(x_c^{(e)} - x_r^{(e)})} \quad (73-4)$$

اگر مجدداً فرض شود که خواص فیزیکی و بارهای وارده ثابت‌اند؛ یعنی

$$\alpha(x) = \alpha^{(e)}, \beta(x) = \beta^{(e)}, f(x) = f^{(e)} \quad (74-4)$$

معادلات المان در نهایت به شکل زیر خواهد بود □

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\gamma l} \frac{3r^2 + 1}{r^2} + \frac{\beta l}{\gamma} \frac{1 \cdot r^2 - \sigma r + 1}{r^2} & \frac{-\alpha}{\gamma l} \frac{1}{r^2(1-r)} + \frac{\beta l}{\gamma} \frac{\sigma r - 2}{r^2(1-r)} & \frac{\alpha}{\gamma l} \frac{3r^2 - 3r + 1}{r(1-r)} - \frac{\beta l}{\gamma} \frac{1 \cdot r^2 - 1 \cdot r + 1}{r(1-r)} \\ \frac{\alpha}{\gamma l} \frac{1}{r^2(1-r)^2} + \frac{\beta l}{\gamma} \frac{1}{r^2(1-r)^2} & \frac{-\alpha}{\gamma l} \frac{1}{r(1-r)^2} + \frac{\beta l}{\gamma} \frac{\sigma r - 2}{r(1-r)^2} \\ \frac{\alpha}{\gamma l} \frac{3r^2 - 3r + 1}{(1-r)^2} + \frac{\beta l}{\gamma} \frac{1 \cdot r^2 - 1 \cdot \sigma r + 1}{(1-r)^2} \end{bmatrix}^{(e)}$$

$$\times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_r \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{fl}{\gamma} \frac{3r - 1}{r} \\ fl \\ \frac{fl}{\gamma} \frac{2 - 3r}{1 - r} \end{bmatrix}^{(e)} + \begin{bmatrix} \tilde{r}^{(1)} \\ \cdot \\ \tilde{r}^{(r)} \end{bmatrix}^{(e)}$$

$$r = \frac{x_r^{(e)} - x_1^{(e)}}{l}, \quad l = x_r^{(e)} - x_1^{(e)} \quad (75-4)$$

اگر گره میانی به سمت گره‌های انتهایی نزدیک شود r به سمت صفر یا یک نزدیک‌تر شده و بعضی از جملات ماتریس سفیدی یا بار بی‌نهایت می‌شوند. بنابراین بهترین حالت وقتی است که گره میانی وسط دو گره انتهایی باشد. اگر $r = \frac{1}{2}$ باشد داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma a}{2l} + \frac{\epsilon \beta l}{\gamma} & -\frac{\lambda a}{2l} + \frac{\gamma \beta l}{\gamma} & \frac{a}{2l} - \frac{\beta l}{\gamma} \\ \frac{\gamma \alpha^e}{2l} + \frac{\gamma \beta^e l}{\gamma} & -\frac{\lambda a}{2l} + \frac{\gamma \beta l}{\gamma} & \frac{a}{2l} - \frac{\beta l}{\gamma} \\ \text{sym.} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_r \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{fl}{\gamma} \\ \frac{\epsilon fl}{\gamma} \\ \frac{fl}{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{t}^{(1)} \\ \cdot \\ \tilde{t}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (76-4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}^{(e)} &= -u \frac{d\tilde{u}^{(e)}}{dx} \\ &= -\alpha \sum_{j=1}^r u_j \frac{dN_j^{(e)}}{dx} = -\alpha \left[u_1 \frac{2x - x_r^{(e)} - x_r^{(e)}}{(x_1^{(e)} - x_r^{(e)})(x_1^{(e)} - x_r^{(e)})} \right. \\ &\quad \left. + u_r \frac{2x - x_1^{(e)} - x_r^{(e)}}{(x_r^{(e)} - x_1^{(e)})(x_r^{(e)} - x_r^{(e)})} + u_r \frac{2x - x_1^{(e)} - x_r^{(e)}}{(x_r^{(e)} - x_1^{(e)})(x_r^{(e)} - x_1^{(e)})} \right] \quad (77-4) \end{aligned}$$

مثال ۱۶. مساله مقدار مرزی دوقطه‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = 2, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u'(1) = 0$$

مساله را برای یک المان مرتبه دو حل کنید. حل دقیق این مساله به صورت $u(x) = 2x - x^2$ است. چون $\alpha = 1, \beta = 0, f(x) = 2$ با فرض وسط بودن گره دو داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{3} & -\frac{\lambda}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\gamma \alpha^e}{3} & -\frac{\lambda}{3} & \frac{1}{3} \\ \text{sym.} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_r \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{3} \\ \frac{\epsilon}{3} \\ \frac{\gamma}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{t}^{(1)} \\ \cdot \\ \tilde{t}^{(r)} \end{bmatrix}$$

پس از اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\frac{\gamma}{3} u_1 - \frac{\lambda}{3} u_r = \frac{\epsilon}{3}, \quad -\frac{\lambda}{3} u_r + \frac{\gamma}{3} u_2 = \frac{1}{3}$$

لذا جواب به صورت زیر می‌باشد که بر حل حقیقی منطبق است:

$$u_r = \frac{2}{\epsilon}, \quad u_1 = 1, \quad \tilde{u}(x) = 2x - x^2$$

مساله ۳۶. شبکه‌ای متشکل از دو المان در نظر بگیرید. یک المان خطی C^0 و المان دیگر مرتبه دو C^0 است. الف) معادلات سیستم را با استفاده از نمادگذاری $k_{ij}^{(e)}$ و $F_i^{(e)}$ به شکل ماتریسی بنویسید. ب) هرکدام از توابع شکل مونتاز شده را رسم کنید. فرض می‌شود که گره ۲ در مرکز المان مرتبه دو واقع است.

مسئله ۳۷. برای المان مرتبه دو فرض می‌شود که $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. با استفاده از نتایج داده شده توابع شکل را برای این المان استخراج کنید.

مسئله ۳۸. ماتریس سفتی را برای المان به طول $2l$ و مختصات گره $(-l, 0, l)$ استخراج کنید.

مسئله ۳۹. برای المان معرفی شده در مسایل ۳۷ و ۳۸ ماتریس بار را که نیروهای وارده به هر گره ناشی از نیروی حجمی تعریف می‌کند به دست آورید. f نیروی حجمی بر واحد حجم است.

ع-۱۰ معادله دیفرانسیل حاکم بر میله الاستیک تحت بار محوری

میله شکل ع-۳۳ را در نظر بگیرید. هرگاه:

\bar{T} : نیرو بر واحد سطح وارده در $x=0$ (□□□□□)

□□: جابه جایی محوری نقاط داخلی میله

□□: کرنش هر نقطه

□□: نیروی حجمی (□□□□□□□□) بر واحد طول

باشند به دنبال تعیین توزیع تنش $\sigma(x)$ در میله هستیم. در این حالت شرایط تعادل نیروها در راستای x عبارتند از:

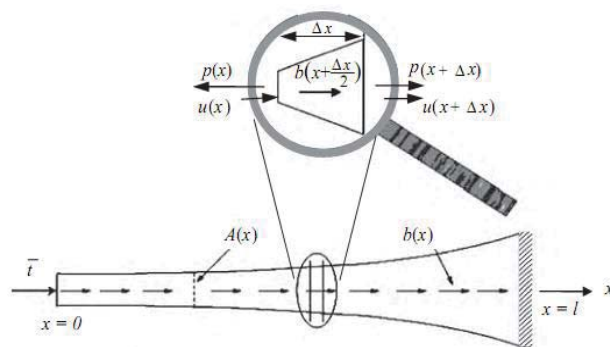
$$-P(x) + b(x + \frac{\Delta x}{2})\Delta x + P(x + \Delta x) = 0 \quad (ع-۷۸)$$

و یا

$$\frac{P(x+\Delta x) - P(x)}{\Delta x} + b(x + \frac{\Delta x}{2}) = 0 \quad (ع-۷۹)$$

هر گاه Δx به صفر میل کند، خواهیم داشت:

$$\frac{dP(x)}{dx} + b(x) = 0 \quad (ع-۸۰)$$



شکل ع-۳۳ مسئله تحلیل تنش تک محوری

چون $\sigma(x) = \frac{P(x)}{A(x)}$ و از طرفی $\epsilon(x) = \frac{du}{dx}$ و طبق قانون هوک $\sigma(x) = E\epsilon(x)$ ، با جایگذاری این روابط در معادله (۸۰-۴) داریم:

$$\frac{d}{dx}(\sigma(x)A(x)) + b(x) = \frac{d}{dx}\left(EA \frac{du}{dx}\right) + b = \dots \quad \cdot < x < l \quad (81-4)$$

بنابراین شکل قوی معادلات حاکم بر این مساله (معادله دیفرانسیل حاکم بعلاوه شرایط مرزی) عبارتند از:

$$-\frac{d}{dx}\left(EA \frac{du}{dx}\right) = b \quad \text{و} \quad \cdot < x < l \quad (82-4)$$

شرایط مرزی طبیعی (□□□□):

$$\sigma(\cdot) = \left(E \frac{du}{dx}\right)_{x=\cdot} = \frac{P(\cdot)}{A(\cdot)} = -\bar{F} \quad (83-4)$$

شرایط مرزی لازم (□□□□):

$$u(l) = \bar{u} \quad (84-4)$$

ترکشن (\bar{F}) همان واحد تنش را دارد اما زمانی مثبت است که در جهت مثبت محور x ها عمل کند (صرف نظر از این که روی کدام وجه اثر کند). درحالی که تنش زمانی مثبت خواهد بود که کششی باشد. بنابراین روی وجه منفی میله تنش مثبت متناظر ترکشن منفی است. باید دقت کرد که بار یا جابجایی را می توان در هر نقطه مرزی مشخص کرد ولی هر دو را نمی توان در یک نقطه معرفی کرد.

همان طوری که از معادلات بالا ملاحظه می شود حالت خاصی از معادله عمومی یک بعدی هستند. در این حالت $\alpha = 0$ ، $\beta = 0$ و $\gamma = 0$ می باشند. از جایگذاری این مقادیر در روابط ماتریس های سفتی و بار المانی می توان کمیات مورد نظر را محاسبه کرد و پس از طی مراحل روش المان محدود پیش گفته مسایل را حل کرد.

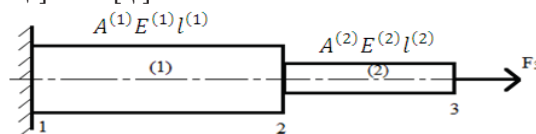
مثال ۱۷. جابجایی ها و تنش القا شده در سیستم دومیله ای نشان داده شده در شکل ۴-۳ را بیابید. فرض

$$\text{کنید: } k = 1 \text{ kg}, F_r = 1 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2, E^{(1)} = E^{(2)} = 2 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2, l^{(1)} = 10 \text{ cm}, l^{(2)} = 1 \text{ cm}, A^{(1)} = 1 \text{ cm}^2, A^{(2)} = 2 \text{ cm}^2$$

$$[K]^{(1)} = \frac{A^{(1)}E^{(1)}}{l^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{(2)} = \frac{A^{(2)}E^{(2)}}{l^{(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = 2 \times 10^4 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, [F] = \begin{bmatrix} R_1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$



شکل ۴-۳

شرط مرزی لازم $u_1=0$ است. بنابراین با حل معادلات سیستم داریم:

$$u_7 = 0,20 \times 10^{-2} \text{ cm},$$

$$u_7 = 0,70 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

و خواهیم داشت:

$$\tilde{u}^{(1)} = u_1 N_1^{(1)} + u_7 N_7^{(1)} = 0,20 \times 10^{-2} (x-1)$$

$$\tilde{u}^{(2)} = u_7 N_7^{(2)} + u_7 N_7^{(2)} = 0,20 \times 10^{-2} (2-x) + 0,70 \times 10^{-2} (x-1)$$

کرنش در المانها عبارتند از:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx} = 0,20 \times 10^{-2}, \quad \varepsilon^{(2)} = \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx} = 0,5 \times 10^{-2}$$

و تنشها برابرند با:

$$\sigma^{(1)} = E^{(1)} \varepsilon^{(1)} = 2 \times 10^{11} \times 0,20 \times 10^{-2} = 0,4 \text{ kg/cm}^2$$

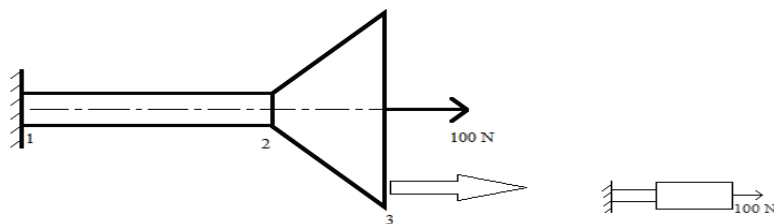
$$\sigma^{(2)} = E^{(2)} \varepsilon^{(2)} = 2 \times 10^{11} \times 0,5 \times 10^{-2} = 1 \text{ kg/cm}^2$$

عکس العملهای تکیه‌گاهی درگره (۱) از اولین معادله سیستم محاسبه می‌شود:

$$2 \times 10^2 (2 \times u_1 - 2 \times u_7 + 0 \times u_7) = R_1 \Rightarrow R_1 = -1 \text{ kg}$$

مثال ۱۸. سازه میله‌ای شکل ۴-۳۵ را در نظر بگیرید. با استفاده از دو المان دو خطی تغییر مکان، کرنش و تنش را در هر میله به دست آورید. داریم:

$$l^{(1)} = 100 \text{ cm}, \quad l^{(2)} = 100 \text{ cm}, \quad F_7 = 100 \text{ N}, \quad A_1 = A_7 = 1 \text{ cm}^2, \quad A_7 = 4 \text{ cm}^2 \quad E^{(1)} = E^{(2)} = E$$



شکل ۴-۳۵

اگر $h = \frac{A_1 + A_2}{2}$

$$[K]^{(1)} = \frac{A^{(1)}E^{(1)}}{l^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [K]^{(2)} = \frac{A^{(2)}E^{(2)}}{l^{(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = E \begin{bmatrix} \frac{1}{100} & \frac{-1}{100} & 0 \\ \frac{-1}{100} & \frac{1}{100} + \frac{1}{160} & \frac{-1}{160} \\ 0 & \frac{-1}{160} & \frac{1}{160} \end{bmatrix}$$

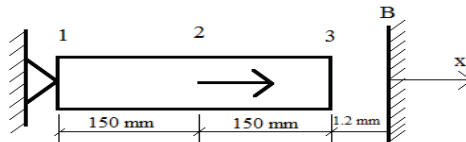
پس معادلات سیستم عبارتند از:

$$E \begin{bmatrix} \frac{1}{100} & \frac{-1}{100} & 0 \\ \frac{-1}{100} & \frac{1}{100} + \frac{1}{160} & \frac{-1}{160} \\ 0 & \frac{-1}{160} & \frac{1}{160} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

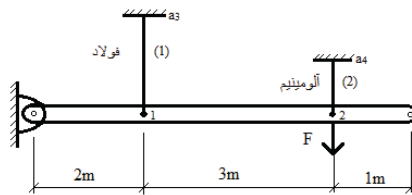
مثال ۱۹. در شکل ۳۶-۴ نیروی $F=600 \text{ KN}$ به گره ۲ وارد می‌شود. میزان تغییر مکان، تنش و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در میله بدست آورید. فرض کنید.

$$E = 2.0 \times 10^7 \text{ N/mm}^2$$

در این مساله، نخست باید مشخص شود که آیا تماسی بین میله و دیوار وجود دارد یا خیر. برای این منظور فرض می‌شود دیوار وجود ندارد. حل مساله $u_B = 1.8 \text{ mm}$ می‌شود که به معنای وجود تماس است. لذا شرایط مرزی لازم در این حالت عبارتند از: $u_1 = 0, u_3 = 1.2 \text{ mm}$. ماتریس‌های سختی و بارسیستم برابرند با:



شکل ۳۶-۴



شکل ۳۷-۴

$$\mathbb{K} = \frac{20 \times 10^3 \times 200}{150} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{F} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 700 \times 10^3 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

در این حالت $u_1 = 1,0$ بدست آمده و مقادیر تنش برابر با $\sigma_1 = 200 \text{ Mpa}$ و $\sigma_2 = 40 \text{ Mpa}$ و عکس‌العمل‌های تکیه-گاهی عبارتند از: $Q_1 = 150000$ و $Q_2 = 150000$.

مثال ۲۰. سازه شکل زیر را در نظر بگیرید. میله صلب با جرم قابل صرف‌نظر کردن در یک انتها لولا شده و به دو میله آلومینیومی و فولادی متصل است. بار $F = 20 \text{ KN}$ مطابق شکل اعمال می‌شود. الف) سازه را با استفاده از دو المان مدل کنید و شرایط مرزی را بنویسید. ب) مساله را برای تغییر شکل حل نموده و تنش را در هر المان بدست آورید.

$$A^{(1)} = 1200 \text{ mm}^2, E^{(1)} = 200 \text{ Gpa}, l^{(1)} = 4,0 \text{ m}, A^{(2)} = 900 \text{ mm}^2, E^{(2)} = 70 \text{ Gpa}, l^{(2)} = 2 \text{ m}$$

شرایط مرزی در گره‌های ۳ و ۴ عبارتند از $u_2 = u_4 = 0$ چون میله صلب باید مستقیم بماند، لذا رابطه $u_1 = 0,4 u_2 = 0$ بین تغییر مکان‌های u_1 و u_2 وجود دارد و مستقل از هم نیستند. این رابطه را یک قید چندنقطه-ای می‌نامند ($\text{multipoint constraint}$). ماتریس‌های سختی المانها و سیستم عبارتند از:

$$[K]^{(1)} = \frac{200 \times 10^3 \times 1200}{4,0 \times 10^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{(2)} = \frac{70 \times 10^3 \times 900}{2 \times 10^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = 10^7 \begin{bmatrix} 52,22 & 0 & -52,22 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & -21 \\ -52,22 & 0 & 52,22 & 0 \\ 0 & -21 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

بردار بار عبارت است از $\mathbb{F} = [0 \quad 30 \times 10^3 \quad 0 \quad 0]^T$. حل مساله پس از اعمال شرایط مرزی عبارت است از

$$\mathbb{a} = [0,4206 \quad 1,0517 \quad 0 \quad 0]^T \text{ mm}$$

تنش‌های المان برابرند با:

$$\sigma_1 = 200 \times 10^3 \frac{3,4206 \times 10^{-1}}{4,0} = 18,712 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_2 = 24,54 \text{ Mpa}$$

مسائل

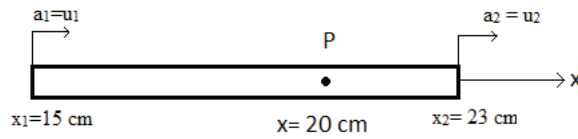
مسئله ۴۰. میله شکل ۳۸-ع را در نظر بگیرید. مساحت سطح مقطع $A=۱,۲\text{ cm}^2$ و مدول یانگ $E=۲۰۰\text{ Gpa}$ می-باشند. اگر $u_1=۰,۰۲\text{ cm}$ و $u_2=۰,۰۲۵\text{ cm}$ باشند، مطلوب است: الف) جابجائی نقطه P (ب) تنش و کرنش در میله ج) ماتریس سفتی سیستم د) انرژی کرنشی در میله.

مسئله ۴۱. سیستمی متشکل از میله‌های شکل ۳۹-ع را در نظر بگیرید. جابجائیهای گرهی، تنش در میله‌ها و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را بدست آورید. داریم:

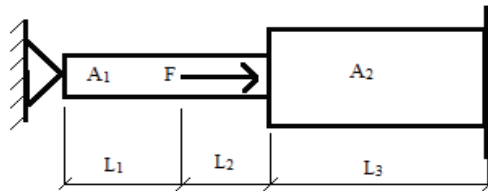
$$A_1=۴۰۰\text{ mm}^2, A_2=۲۵۰\text{ mm}^2, L_1=L_2=۱۵۰\text{ mm}, E=۲۰۰ \cdot ۱۰^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, F=۳۰۰\text{ KN}, L_3=۳۰۰$$

مسئله ۴۲. برای شکل ۴۰-ع، جابجائیهای گرهی، تنش‌های المانی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.

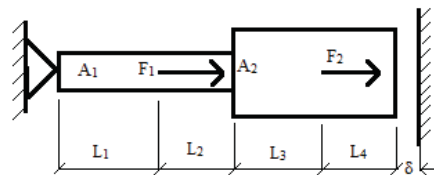
$$L_1=L_2=۱۵۰\text{ mm}, L_3=L_4=۲۰۰\text{ mm}, F_1=۲۰۰\text{ KN}, F_2=۱۰۰\text{ KN}, A_1=۲۵۰\text{ mm}^2, A_2=۴۰۰\text{ mm}^2, \delta=۲,۵\text{ mm}$$



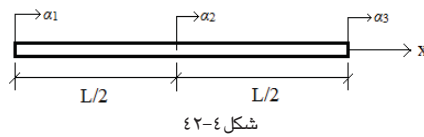
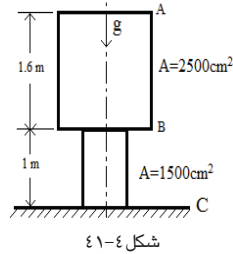
شکل ۳۸-ع



شکل ۳۹-ع



شکل ۴۰-ع



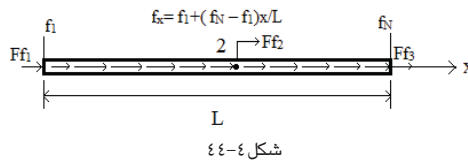
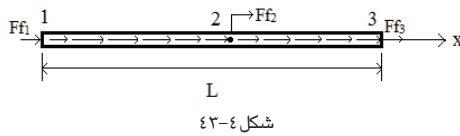
مسئله ۴۳. برای میله عمودی شکل ۴-۱، تغییرمکان در A و توزیع تنش را بیابید. فرض کنید $E=100 \text{ Mpa}$ و وزن بر واحد حجم برابر $0.06 \frac{N}{\text{cm}^3}$ است. پیرامون توزیع تنش بحث کنید.

مسئله ۴۴. ماتریس سختی را برای المان میله شکل ۴-۲ با تابع تغییرمکان آزمایشی مرتبه دو $\tilde{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$ فرض شود که EA ثابت است.

جواب: $[K]^{(e)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$

مسئله ۴۵. برای میله المان مساله قبل، بارهای گرهی معادل ناشی از نیروی محوری گسترده یکنواخت f_x بر واحد طول را پیدا کنید. (شکل ۴-۳).

جواب: $Ff = \frac{f_x L}{6} [1 \quad 4 \quad 1]^T$



مسئله ۴۶. اگر نیروی گسترده مساله قبل در امتداد طول میله بصورت خطی تغییر کند، شکل ۴-۴ بارهای گرهی معادل ناشی از این بارگذاری را بیابید.

$$Ff = \frac{1}{\gamma} [f_1 \quad 2f_2 + 2f_2 \quad f_3]^T \quad \text{جواب:}$$

۴-۱۱ اثرات حرارت

تغییرات درجه حرارت در یک تیرالاستیک موجب القای تنش می‌شود که به آن تنش حرارتی می‌گویند. اگر توزیع درجه حرارت در جسم معلوم باشد آنگاه کرنش حرارتی به صورت کرنش اولیه (ε) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon = \alpha \Delta T \quad (85-4)$$

که α ضریب انبساط حرارتی و ΔT اختلاف درجه حرارت هستند. قانون حاکم بر تنش و کرنش به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) = E \frac{du}{dx} - E\alpha \Delta T \quad (86-4)$$

از قراردادن رابطه بالا در معادله تعادل، معادله دیفرانسیل حاکم به دست می‌آید:

$$-\frac{d}{dx} \left[\left(E \frac{du}{dx} - E\varepsilon_0 \right) A \right] = fA \quad (87-4)$$

و یا

$$-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = fA - \frac{d}{dx} (EA\varepsilon_0) \quad (88-4)$$

مقایسه معادله (۴) با معادله عمومی نشان می‌دهد که فقط جمله $-\frac{d}{dx} (EA\varepsilon_0)$ به معادله دیفرانسیل حاکم بر میله الاستیک اضافه شده است. بنابراین باید مشارکت جمله اضافی را در معادلات المانها محاسبه نمود.

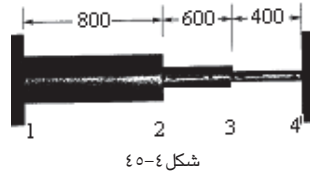
$$-\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (EA\varepsilon_0) N_i dx = \int_{x_1}^{x_2} (EA\varepsilon_0) \frac{dN_i}{dx} dx - (EA\varepsilon_0 N_i)^{(e)} \quad (89-4)$$

اولین جمله سمت راست معادله بالا بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$FT_1 = \int_{x_1}^{x_2} (EA\varepsilon_0) \left(\frac{-1}{l(e)} \right) dx = -(EA\varepsilon_0) \quad (90-4)$$

بار داخلی بوجود آمده در اثر تغییر درجه حرارت

$$FT_2 = \int_{x_1}^{x_2} (EA\varepsilon_0) \left(\frac{1}{l(e)} \right) dx = (EA\varepsilon_0) \quad (91-4)$$



دومین جمله، بار حرارتی وارد بر گره‌هاست که مقدار آن برای گره‌های ۱ و ۲ به ترتیب برابر $(EA\epsilon)$ و $(EA\epsilon)$ است که قاعدتا صفر فرض می‌شود. به این ترتیب معادلات جبری برای یک المان خطی میله الاستیک تحت بار حرارتی عبارت است از:

$$\frac{A^{(e)}E^{(e)}}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{AL} \\ f_{AL} \end{bmatrix}^{(e)} + \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^{(e)} + A^{(e)}E^{(e)}\epsilon \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۹۲-۴)$$

مثال ۲۱: سازه‌ای متشکل از سه میله متفاوت طبق شکل ۴-۴ در معرض افزایش دمای $\Delta T = ۸۰^\circ C$ قرار گرفته است. تغییر مکان ϵ ، تنش‌ها و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.

$$A^{(1)} = ۲۴۰۰ \text{ mm}^2, A^{(2)} = ۱۲۰۰ \text{ mm}^2, A^{(3)} = ۶۰۰ \text{ mm}^2, F_T = -۶۰ \text{ KN},$$

$$F_T = -۷۰ \text{ KN}, E^{(1)} = ۸۳ \text{ Gpa}, E^{(2)} = ۷۰ \text{ Gpa}, E^{(3)} = ۲۰ \text{ Gpa}$$

$$\alpha^{(1)} = ۱۸.۹ \times ۱۰^{-۶} \frac{1}{C}, \alpha^{(2)} = ۲۳ \times ۱۰^{-۶} \frac{1}{C}, \alpha^{(3)} = ۱۱.۷ \times ۱۰^{-۶} \frac{1}{C}$$

ماتریس‌های سفتی المان‌ها:

$$[K]^{(1)} = k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, [K]^{(2)} = k^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, [K]^{(3)} = k^{(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های بار المان‌ها:

$$[F]^{(1)} = \begin{bmatrix} -E^{(1)}\alpha^{(1)}\Delta T A^{(1)} \\ E^{(1)}\alpha^{(1)}\Delta T A^{(1)} \end{bmatrix}, [F]^{(2)} = \begin{bmatrix} -E^{(2)}\alpha^{(2)}\Delta T A^{(2)} \\ E^{(2)}\alpha^{(2)}\Delta T A^{(2)} \end{bmatrix}, [F]^{(3)} = \begin{bmatrix} -E^{(3)}\alpha^{(3)}\Delta T A^{(3)} \\ E^{(3)}\alpha^{(3)}\Delta T A^{(3)} \end{bmatrix}$$

ماتریس سفتی و بار سیستم:

$$[K] = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & \cdot & \cdot \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} & \cdot \\ \cdot & -k^{(2)} & k^{(2)} + k^{(3)} & -k^{(3)} \\ \cdot & \cdot & -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix},$$

$$[F] = \begin{bmatrix} -E^{(1)}\alpha^{(1)}\Delta T A^{(1)} \\ E^{(1)}\alpha^{(1)}\Delta T A^{(1)} - E^{(2)}\alpha^{(2)}\Delta T A^{(2)} - F_T \\ E^{(2)}\alpha^{(2)}\Delta T A^{(2)} - E^{(3)}\alpha^{(3)}\Delta T A^{(3)} - F_T \\ E^{(3)}\alpha^{(3)}\Delta T A^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$1.2 \begin{bmatrix} 249 & -249 & \cdot & \cdot \\ -249 & 249 & -140 & \cdot \\ \cdot & -140 & 440 & 300 \\ \cdot & \cdot & -300 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ u_r \\ u_r \\ \cdot \end{bmatrix} = 1.2 \begin{bmatrix} -301.2 \\ 86.6 \\ -322.7 \\ 112.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ R_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} u_r = 0.221 \\ u_r = -0.004 \end{matrix}$$

گرنشها و نیروهای عکس العمل تکیه گاهی عبارتند:

$$\varepsilon^{(e)} = \frac{d\tilde{u}}{dx} - \alpha^e \Delta T \rightarrow$$

$$\varepsilon^{(2)} = -0.93 \times 10^{-2}, \varepsilon^{(3)} = -2.22 \times 10^{-2}, \varepsilon^{(1)} = -1.24 \times 10^{-2}$$

تنشها عبارتند:

$$\begin{aligned} \sigma^{(2)} &= -180.17 \text{Mpa}, \\ \sigma^{(3)} &= -100.08 \text{Mpa}, \\ \sigma^{(1)} &= -102.04 \text{Mpa} \\ R_1 &= 241.171 \text{KN}, \\ R_4 &= -111.1 \text{KN}, \end{aligned}$$

برنامه APDL مثال بالا به شرح زیر است.

```

/PREP7
ANTYPE,STATIC
ET,1,LINK1
R,1,2400
R,2,1200
R,3,600
MP,EX,1.83E3
MP,ALPX,1.18,9E-6
MP,EX,2.70E3
MP,ALPX,2.23E-6
MP,EX,3.20E3
MP,ALPX,3.11,7E-6
TREF,20
N,1
N,2,800
N,3,1400
N,4,1800
E,1,2
MAT,2
REAL,2
E,2,3
MAT,3
REAL,3

```

```

E,۳,۴
D,۱,ALL
D,۴,ALL
F,۲,FX,-۶۰E۳
F,۳,FX,-۷۵E۳
BFUNIF,TEMP,۱۰۵
FINISH
/SOLU
SOLVE
FINISH
/POST\
PRNSOL,U,X
PRRSOL
ETABLE,STXS,LS,۱
ETABLE,STRX,LEPEL,۱      !STXS=STRESSES
PRETAB,STSX              !STRX=STRAINS
PRETAB,STRX
FINISH

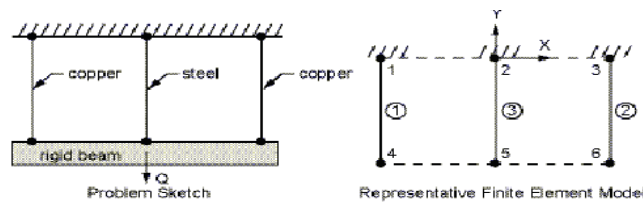
```

مثال ۲۲. تنش در سیم‌های فولادی و مسی سازه شکل ۴-۶ را پیدا کنید. سیم‌ها دارای مساحت سطح مقطع $A=۰.۱\text{in}^2$ بوده و بعد از مونتاژ تحت نیروی $Q=۴۰۰۰\text{lb}$ و افزایش درجه حرارتی معادل $\Delta T=۱۰^\circ\text{F}$ قرار گرفته‌اند. برنامه APDL معادل را بنویسید.

$$E_c=۱۶ \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\alpha_c=۹۲ \times 10^{-6} \frac{\text{in}}{\text{in-F}}, E_s=۳۰ \times 10^6 \text{ psi}, \alpha_s=۷۰ \times 10^{-6} \frac{\text{in}}{\text{in-F}}$$

طول سیم‌ها ۲۰in و فاصله آنها از هم ۱۰in و دمای مرجع $T_{ref}=۷۰^\circ\text{F}$ است. تیر صلب پائینی با کوپلینگ گره‌ها مدل می‌شود.



شکل ۴-۶

```

/PREP\
ANTYPE,STATIC
ET,۱,LINK۱
R,۱,۰,۰
MP,EX,۱,۱۶E۶
MP,ALPX,۱,۹۲E-۷

```

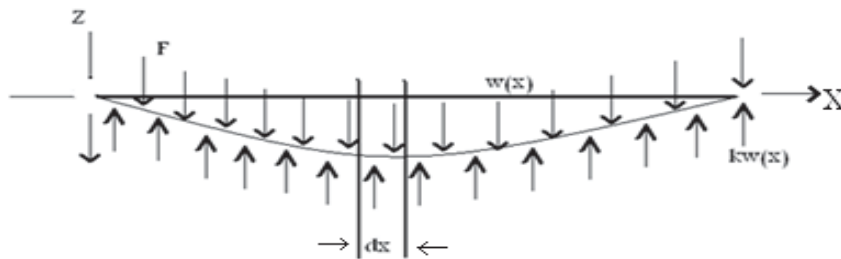
```

MP,EX,۲,۳۰E۶
MP,ALPX,۲,۷۰E-۷
TREF,۷۰
N,۱,۰,۰
N,۳,۱۰,۰
FILL
N,۴,۰,۱۰,۲۰
N,۶,۱۰,۲۰
FILL
E,۱,۴
E,۳,۶
MAT,۲
E,۲,۵
CP,۱,UY,۵,۴,۶ !coupling of nodes
D,۱,ALL,,۳ !boundary conditions and loading
F,۵,FY,-۴۰۰۰
BFUNIF,TEMP,۸۰ !uniform temperture (TREF+۱۰)
FINISH
/SOLV
OUTPR,BASIC,۱
OUTPR,NLOAD,۱
NSUBST,۱
SOLVE
FINISH
/POST۱
ETABLE,STRS,LS,۱
PRETAB,STRS
FINISH
    
```

نتایج:

stress in steel = $\sigma^s = 19.795$ psi, stress in copper = $\sigma^c = 10.152$ psi

این مقادیر با نتایج تحلیل دقیق که از راه تحلیلی بدست آمده‌اند، برابرند.



شکل ۴-۴۷

مسائل:

مسألة ۴۷. المان میلیه مرتبه دو در معرض تغییر دمایی که به صورت سهمی تغییر می‌کند. قرار گرفته است. بارهای گرهی معادل ناشی از این بارگذاری را بیابید.

۱۲-۴ خیز کابل‌ها

کابل یک جسم یک بعدی فرض می‌شود که تنها قادر به انتقال نیروی کششی می‌باشد. طول کابل همواره ثابت فرض می‌شود. نسبت طول به ضخامت کابل چنان بزرگ است که معمولاً از مقاومت خمشی آن صرف نظر می‌شود. فرض می‌شود که هنگامی که کابل در امتداد یک خط مستقیم موازی محور x ها قرار گرفته با نیروی $T(x)$ کشیده شده است. در استخراج روابط تیر تنها خیزهای کوچک مد نظر خواهند بود و فرض می‌شود کشش $T(x)$ در حالت با بار و بدون بار یکسان است. همچنین شیب θ هر مقطع از کابل نسبت به محور x چنان کوچک است که روابط $\sin\theta \approx \tan\theta$ و نیز $\cos\theta \approx 1$ برقرار فرض می‌شود. ثالثاً تنشهای خمشی ایجاد شده در اثر تغییر انحنا نسبت به تنشهای محوری یعنی $T(x)$ تقسیم بر مساحت سطح مقطع، کوچک فرض می‌شوند.

$$-F + f dx - k(x) dx + (F + dF) = 0 \rightarrow \frac{dF}{dx} - k(x)w(x) = -f(x) \quad (93-4)$$

چون $F(x) = T(x)\sin\theta$ و فرض خیز کوچک داریم:

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{dw}{dx} \quad (94-4)$$

بنابراین:

$$-\frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{dw}{dx} \right] + k(x)w(x) = f(x) \quad (95-4)$$

حالت خاص: کابل بطور افقی کشیده شده و در دو انتهای خود $x_1 = 0$ و $x_2 = l$ بسته شده است. کابل تحت اثر وزن خود، ρg ، می‌باشد (ρ : جرم بر واحد طول).

$$-\frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{dw}{dx} \right] = \rho g, \quad 0 < x < l, \quad w(0) = w(l) = 0 \quad (96-4)$$

اگر $T(x) = T$ ، یعنی کشش T ثابت باشد:

$$-T \frac{d^2w}{dx^2} + k(x)w(x) = f(x) \quad (97-4)$$

اگر $\tau = F$ ، $u = w$ ، $\beta = k$ ، $\alpha = T$ (e)

برای خیز کابل‌ها عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \frac{T^{(e)}}{l^{(e)}} + \frac{k^{(e)}l^{(e)}}{3} & -\frac{T^{(e)}}{l^{(e)}} + \frac{k^{(e)}l^{(e)}}{6} \\ -\frac{T^{(e)}}{l^{(e)}} + \frac{k^{(e)}l^{(e)}}{6} & \frac{T^{(e)}}{l^{(e)}} + \frac{k^{(e)}l^{(e)}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{fl}{3} \\ \frac{fl}{3} \end{bmatrix}^{(e)} + \begin{bmatrix} F(x_1) \\ F(x_2) \end{bmatrix}^{(e)} \quad (98-4)$$

مثال ۲۳. خیز کوچک کابلی که به آن یک بار یکنواخت وارد شده و در معرض پی الاستیک قرار گرفته است را با لحاظ پنج المان خطی به دست آورید. نتیجه را با حل دقیق مقایسه کنید. فرض کنید که هر دو انتها ثابت بوده و

$$T = 30 \cdot N, l = 6 \cdot m, f = 4 \text{ N/m} \text{ و } k = 1 \text{ N/m}^2$$

فرض می‌شود که کابل با ۵ المان خطی مساوی مدل شده است. در این حالت ماتریس سفتی و بار یک المان نمونه عبارت است از:

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} 29 & -23 \\ -23 & 29 \end{bmatrix}, F^{(e)} = \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \end{bmatrix}$$

پس از مونتاژ المان‌ها معادلات سیستم عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 29 & -23 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -23 & 58 & -23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -23 & 58 & -23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -23 & 58 & -23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -23 & 58 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -23 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 48 \\ 48 \\ 48 \\ 48 \\ 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F^{(1)}(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F^{(6)}(x_2) \end{bmatrix}$$

پس از اعمال شرایط مرزی $w_1 = w_6 = 0$ و حل معادلات خواهیم داشت:

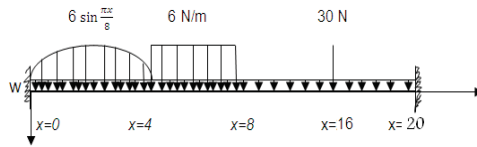
گره	المان محدود	دقیق
۱	۰	۰
۲	۱,۸۵۴۸	۱,۸۱۷۳
۳	۲,۵۹۰۳	۲,۵۴۴۴
۴	۲,۵۹۰۳	۲,۵۴۴۴
۵	۱,۸۵۴۸	۱,۸۱۷۳
۶	۰	۰

حل دقیق ($\alpha^2 = \frac{k}{T}$) عبارت است از:

$$w(x) = \frac{f [\cosh(\alpha l) - 1] \sinh(\alpha x)}{k \sinh(\alpha l)} - \frac{f}{k} \cosh(\alpha x) + \frac{f}{k}$$

مسایل:

مسألة ۴۸. مثال ۲۳ بالا را برای ده المان و یازده گره حل کرده و نتایج را با حل حقیقی مقایسه نمایید.



شکل ۴-۴۸

مسئله ۴۹. خیز یک کابل معلق افقی با شرایط زیر را بیابید. معادله دیفرانسیل حاکم عبارت است از:

$$-\frac{d}{dx}\left(T \frac{dw}{dx}\right) = \rho g \quad 0 < x < 10, \quad w(x) = w(10) = 0$$

$$l = 10 \text{ m}, T = 98 \text{ N}, \rho = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}, g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

مسئله را با استفاده از دو، سه و پنج المان خطی حل کنید. نتایج را با حل دقیق مقایسه کنید.

مسئله ۵۰. یک کابل افقی با کشش اولیه $T=100 \text{ N}$ در هر دو انتها محکم شده است (مطابق شکل ۴-۴۸). چند نوع نیرو بر کابل اثر می‌کنند. نخست نیروی وزن کابل به صورت یکنواخت 0.5 N/m به آن وارد می‌شود. دوم نیروی $F_1=20 \text{ kg}$ که در موقعیت $x=16 \text{ m}$ به طرف پایین وارد می‌شود.

در نهایت، چند وزنه در امتداد یک دهانه‌ی ۸ متری در انتهای چپ کابل آویخته شده است. اثر این اشیاء با نیروی گسترده‌ای که در شکل نشان داده شده است مدل می‌شود. شرایط مرزی مسئله عبارتند از: $w(0)=w(20)=0$ (الف) تغییر مکان عمودی را در $x=8$ بیابید. (ب) نیروی عمودی اعمال شده به هر تکیه‌گاه انتهایی را پیدا کنید ($F(0), F(20)$). شبکه را با سه و پنج المان خطی مدل کنید.

مسئله ۵۱. چنانچه کابل معلق روی یک پی الاستیک تکیه داده باشد خیز کابل را بیابید.

$$-\frac{d}{dx}\left(T \frac{dw}{dx}\right) + kw = \rho g \quad 0 < x < 10, \quad w(x) = w(10) = 0$$

مدول پی $k = 24.5 \text{ N/m}^2$ ، $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ، $\rho = 1 \text{ kg/m}$ ، $T = 98 \text{ N}$ ، $l = 10 \text{ m}$. مسئله را با استفاده از دو، سه و پنج المان خطی حل کنید. نتایج را با حل دقیق مقایسه کنید.

مسئله ۵۲. طنابی به شکل عمودی از ساختمانی آویخته شده است. طول طناب 100 m می‌باشد. بادی به صورت افقی با سرعت 40 km/h می‌وزد. هنگامی که طناب عمودی است کشش در آن عبارت است از:

$$T(z) = \rho_c g A (l - z)$$

که در آن چگالی طناب $\rho_c = 1100 \text{ kg/m}^3$ ، $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ، $A = \frac{\pi D^2}{4}$ ، $D = 0.05 \text{ m}$ ، بار آیرودینامیک گسترده (N/m) اعمال شده روی طناب، ناشی از وزش باد، یک نیروی افقی یکنواخت f در امتداد طول است:

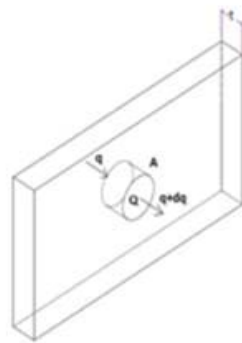
$$f = \frac{1}{2} \rho_a C_D v^2$$

که f نیروی گسترده، ρ_a چگالی هوا، $0.0025 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}$ در 0°C و $C_{D, \text{atom}}$ ضریب درگ عمودی برابر 3.1 است و v سرعت باد (7.3 ft/sec (5 mph ، الف) تغییر مکان افقی انتهایی طناب را پیدا کنید. ب) مقبولیت حل خود را با مقایسه مجموع نیروی افقی روی طناب با نیروی عکس العمل افقی محاسبه شده در بالای طناب چک کنید. (توجه شود که حل تا زمانی قابل استفاده است که تغییر مکان‌ها کوچک باشند، چون مدل تئوری، در خلال حرکت افقی طناب، اجازه بلند شدن را نمی‌دهد)

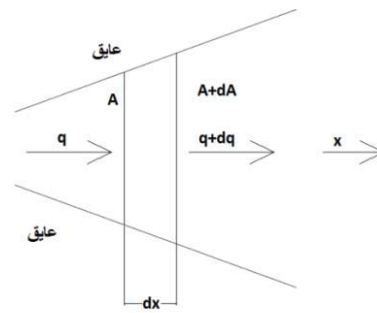
۴-۱۳ هدایت حرارتی دو بعدی

در شکل ۴-۹ بدلیل عایق شدن سطح خارجی و طولی بودن میله، حرارت فقط در داخل سطح و موازی محور آن باید جریان یابد و تنها در دو انتهای میله ممکن است جریان حرارت شروع به انحراف از حالت یک بعدی کند. انرژی حرارتی جریان یافته بر ثانیه در جهت x بر مساحت سطح مقطع یک کمیت برداری معروف به شار حرارت $q(x)$ یا دیمانسیون $(\frac{\text{E}}{\text{ft}^2})$ است. انرژی حرارتی ایجاد شده در یا تزریق شده به داخل المان بر ثانیه بر واحد حجم ماده $(Q(x))$ را منبع حرارت می‌گویند و دارای دیمانسیون $(\frac{\text{E}}{\text{ft}^3})$ خواهد بود. اگر Q منبع یک چاه حرارتی (ft^3/K) است.

در شکل ۴-۱۰ حالت دیگری از هدایت حرارت یک بعدی ملاحظه می‌شود. در امتداد ناحیه مرکزی پانل، حرارت لزوماً عمود بر وجوه پانل سیلان می‌یابد و در نزدیک لبه‌های پانل، سیلان ممکن است از حالت یک بعدی منحرف شود. برای تحلیل حرارتی، خط چین‌ها یک دیسک فرضی را با سطح مقطع ثابت A و ضخامت Δx نشان می‌دهند که از ناحیه مرکزی بریده شده و محور آن بر وجوه عمودند. جریان حرارت در داخل دیسک مجازی همانند سیلان در داخل یک میله استوانه‌ای عایق شده با سطح مقطع ثابت خواهد بود.

$$qA + Q\Delta x = (q + dq)(A + dA) \rightarrow \frac{d}{dx}[q(x)A(x)] = Q(x)A(x) \quad (4-99)$$


شکل ۴-۱۰



شکل ۴-۹

از قانون فوریه داریم:

$$q(x) = -k(x) \frac{dT(x)}{dx} \quad (100-ع)$$

که در آن $T(x)$ ، درجه حرارت و $k(x)$ هدایت ویژه حرارتی هستند. به عبارت دیگر معادله دیفرانسیل حاکم عبارت است از:

$$-\frac{d}{dx} \left[k(x)A(x) \frac{dT(x)}{dx} \right] = Q(x)A(x) \quad (101-ع)$$

حالت خاص: اگر سطح مقطع ثابت باشد

$$-\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dT(x)}{dx} \right] = Q(x) \quad (102-ع)$$

شرط مرزی لازم: توصیف درجه حرارت T

شرط مرزی طبیعی: توصیف شار حرارتی q

از مقایسه معادله بالا با معادله دیفرانسیل عمومی حالت یک بعدی داریم:

$$a(x) = k(x)A(x), \quad \beta(x) = 0, \quad f(x) = Q(x)A(x) \quad (103-ع)$$

هدایت حرارتی عبارت است از: (e) داخل هر المان ثابت باشند معادلات جبری المان خطی QA و kA اگر

$$\begin{bmatrix} \frac{kA}{l} & -\frac{kA}{l} \\ -\frac{kA}{l} & \frac{kA}{l} \end{bmatrix}^{(e)} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{QA}{l} \\ \frac{QA}{l} \end{bmatrix}^{(e)} + \begin{bmatrix} \tilde{q}(x_1)A \\ -\tilde{q}(x_2)A \end{bmatrix}^{(e)} \quad (104-ع)$$

مثال ۴۴. میله‌ای به طول ۰٫۲ متر با دمای ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد در $x=0$ را در نظر بگیرید. فرض شود که منبع حرارت ثابت $Q = 3 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$ در امتداد طول میله و شار حرارتی مرزی $q = 1.8 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$ که از انتهای $x=0.2$ متر حرارت را جذب می‌کند وجود دارند. ضریب هدایت حرارتی $k = 6000 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ است. اگر $A = 0.4 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ با استفاده از پنج المان خطی با طول مساوی، دما و شار را در هر گره محاسبه کنید.

معادلات جبری هر المان برای میله تحت بررسی عبارتند از:

$$60 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = 48 \begin{bmatrix} l/2 \\ l/2 \end{bmatrix}$$

پس از مونتاژ پنج المان، معادلات جبری عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} -60 & -60 & . & . & . & . & . \\ -60 & 120 & -60 & . & . & . & . \\ . & -60 & 120 & -60 & . & . & . \\ . & . & -60 & 120 & -60 & . & . \\ . & . & . & -60 & 120 & -60 & . \\ . & . & . & . & -60 & 60 & . \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \\ 48 \\ 48 \\ 48 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{q}^{(1)}(x_1)A \\ . \\ . \\ . \\ . \\ -\bar{q}^{(6)}(x_7)A \end{pmatrix}$$

$$-\bar{q}^{(6)}(x_7)A = -1.8 \times 10^{-1} \times 0.4 \times 10^{-2} = -720 \text{ (W)}$$

حل دقیق این مساله برای دما عبارتست از

$$T(x) = \frac{2 \times 10^{-1}}{6000} (0.2x - 0.5x^2) - \frac{1.8 \times 10^{-1}x}{6000} + 100$$

و حل دقیق برای شار حرارتی عبارتست از

$$q = -k \frac{dT}{dx} = -6000 \left[\frac{2 \times 10^{-1}}{6000} (0.2 - x) - \frac{1.8 \times 10^{-1}}{6000} \right]$$

جواب المان محدود و حل دقیق در جدول ۴-۱۱ آمده است.

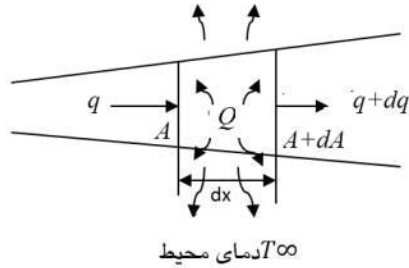
جدول شماره ۴-۱۱

گروه	دما		شماره المان	شار $\left(\frac{10^{-1} \text{ W}}{\text{m}^2}\right)$	
	المان محدود	دقیق		المان محدود	دقیق
۱	۱۰۰	۱۰۰	۱	۱,۲	۰
۲	۹۱,۶	۹۱,۶	۲	۳,۶	۰,۲
۳	۸۲,۴	۸۲,۴	۳	۴	۰,۴
۴	۷۲,۴	۷۲,۴	۴	۶,۲	۰,۶
۵	۶۱,۶	۶۱,۶	۵	۷,۴	۰,۸
۶	۵۰	۵۰		۵	۰,۱
				۵,۶	۰,۱۲
				۶,۲	۰,۱۴
				۶,۸	۰,۱۶
				۷,۴	۰,۱۸
				۸	۰,۲

۴-۱۴ اتلاف حرارتی جابجایی

اگر محیط اطراف میله سیال باشد مکانیزم اصلی اتلاف حرارت از نوع جابجایی خواهد بود. در این حالت دیگر جریان حرارت یک بعدی نیست چرا که حرارت دارای دو مولفه در امتداد موازی و عمود بر محور میله است. هر چند درجه حرارت در هر سطح مقطع تغییر می‌کند اما اگر تنها به درجه حرارت میانگین در هر سطح مقطع علاقه‌مند باشیم آنگاه اتلاف حرارتی از سطح جانبی را نیز می‌توان به صورت اتلاف میانگین در امتداد سطح مقطع پنداشت آن را به صورت یک اتلاف حرارتی داخلی میانگین نمایش داد. در این حالت

$$qA + QAdx = (q + dq)(A + dA) + hPdx(T - T_\infty) \quad (4-10)$$



با صرف نظر از جملات کوچکتر

$$\frac{d}{dx}[q(x)A(x)] + hPT(x) = Q(x)A(x) + hPT_{\infty} \quad (۱۰۶-۴)$$

که $hPdx(T - T_{\infty})$ نرخ اتلاف حرارتی ناشی از جابجایی در امتداد سطح جانبی بر حسب $h \left(\frac{E}{t}\right)$ ضریب انتقال حرارت جابجایی P و محیط استوانه هستند. چون بر اساس قانون فوریه $q = -k \frac{dT}{dx}$ بنابراین داریم:

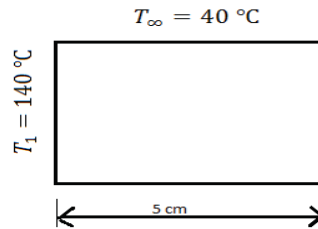
$$-\frac{d}{dx}\left[k(x)A(x)\frac{dT(x)}{dx}\right] + hPT(x) = Q(x)A(x) + hPT_{\infty} \quad (۱۰۷-۴)$$

شرایط مرزی در این حالت. درجه حرارت معین، شار حرارتی معین (عایق) و یا جابجایی هستند. مثلاً دیواره یک منبع حاوی مایع داغ (T_1) که جریان هوا با دمای T_{∞} از روی سطح خارجی آن می‌گذرد و موجب حفظ دمای T_1 در مرز می‌گردد.

$$T_{x=0} = T_1, \quad q_{x=l} = h(T_1 - T_{\infty}) \quad (۱۰۸-۴)$$

یا اگر دیواری، سطح داخلی‌اش عایق شده و سطح خارجی آن یک سطح جابجایی باشد.

$$q_{x=0} = 0, \quad q_{x=l} = h(T_1 - T_{\infty}) \quad (۱۰۹-۴)$$



مثال ۲۵. توزیع دما را در یک فین یک بعدی بدست آورید. مساله را برای یک، دو و سه المان خطی حل کنید. ($h=5 \text{ w/cm}^2\text{C}$ و $k=70 \text{ w/cm}^2\text{C}$ و $R=1 \text{ cm}$)

$$\alpha = kA \quad \beta = hPl \quad f = hPT_{\infty} \quad \square \square \square \quad a_1=T_1, \quad a_2=T_2$$

برای یک المان در این حالت معادلات جبری المان عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \frac{Ak}{l} + \frac{hPl}{2} & -\frac{Ak}{l} + \frac{hPl}{2} \\ -\frac{Ak}{l} + \frac{hPl}{2} & \frac{Ak}{l} + \frac{hPl}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{hPT_{\infty}l}{2} \\ \frac{hPT_{\infty}l}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \end{bmatrix}$$

و چون $A=\pi r^2$, $p=\pi r$, $r=1$

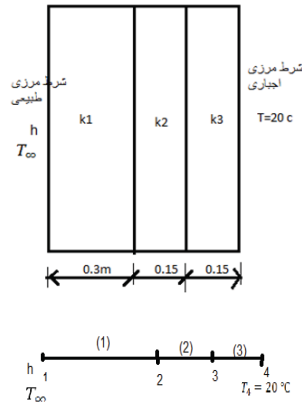
$$\begin{bmatrix} 92 & -17 \\ -17 & 92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

در این حالت شرایط مرزی $T_1=140^\circ\text{C}$ و $\tau_2=0$ لذا $T_2=88.5^\circ\text{C}$

حل با دو المان:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{218}{84} & -\frac{142}{168} \\ 0 & -\frac{142}{168} & \frac{109}{84} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ \frac{1300}{84} \\ \frac{1500}{84} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

مثال ۲۶. دیوار مرکبی متشکل از سه نوع ماده است. دمای بیرونی $T_1=20^\circ\text{C}$. انتقال حرارت ناشی از جابجایی روی سطح داخلی دیوار با $T_{\infty}=80^\circ\text{C}$ و $h=20 \text{ w/m}^2\text{C}$ رخ می دهد. توزیع دما در دیوار را پیدا کند. $k_1=20 \text{ w/m}^2\text{C}$, $k_2=30 \text{ w/m}^2\text{C}$, $k_3=50 \text{ w/m}^2\text{C}$ و $T_{\infty}=80^\circ\text{C}$



شکل ۳-۴

مدلی مرکب از سه المان خطی را در نظر می‌گیریم. برای این مساله داریم:
 $Q(x) = 0$ و شرایط مرزی $-k \frac{dT}{dx} + h(T_1 - T_\infty) = 0$ (توازن شارحرارتی) است.

$$[K]^{(1)} = k_1/l^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{20}{.3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{(2)} = k_2/l^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{20}{.10} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow [k] = 20 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{(3)} = k_3/l^{(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{20}{.10} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

در گره ۱ بواسطه همرفت و شرایط مرزی طبیعی $[-k \frac{dT}{dx} + h(T_1 - T_\infty)]$ باید ماتریس سفتی کل را اصلاح کرد.

$$20 \begin{bmatrix} 1.370 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \times 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow T_1 = 204.6, T_2 = 119, T_3 = 57.1$$

۴-۱۵ هدایت حرارتی یک بعدی صورت دیگر: (المان خطی)

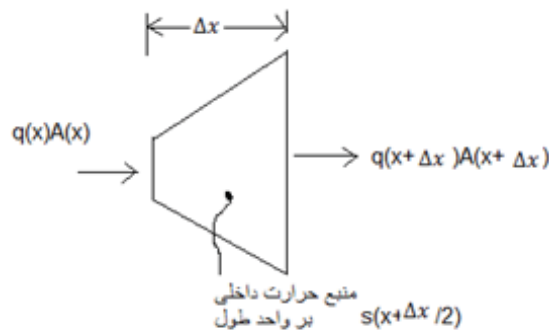
$$s \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x + q(x)A(x) - q(x + \Delta x)A(x + \Delta x) = 0 \quad (110-4)$$

$$\frac{d}{dx} (qA) = s \quad [since: q = -k dT/dx] \quad (111-4)$$

$$-\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) = s \quad 0 < x < l \quad [kA = \alpha] \quad (112-4)$$

$$-\left(kA \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = \bar{t}^{(1)} \quad or \quad T(0) = \bar{T} \quad (113-4)$$

$$\left(kA \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = \bar{t}^{(2)} \quad or \quad T(L) = \bar{T} \quad (114-4)$$



شکل ۴-۱۵

شکل ضعیف عبارت است از:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dw}{dx} Ak \frac{dT}{dx} dx = - (wAk \frac{dT}{dx}) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} ws dx \quad (115-4)$$

در مقایسه با رابطه

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dw}{dx} \alpha \frac{d\tilde{u}}{dx} dx = (w\alpha \frac{d\tilde{u}}{dx}) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \omega f dx \quad (116-4)$$

معادله جبری المان به شکل زیر خواهد بود.

$$\alpha^{(1)} / l^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{sl^{(1)}}{v} \\ \frac{sl^{(1)}}{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1^{(1)} \\ \tau_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (117-4)$$

مثال ۲۷. میله‌ای با منبع حرارت گسترده یکنواخت $S = 0.01 \text{ W/m}^2$ را در نظر بگیرید. میله یک سطح مقطع یکنواخت $A = 0.01 \text{ m}^2$ و هدایت ویژه حرارتی $k = 200 \text{ W/m}^2\text{K}$ دارد. طول میله $l = 1 \text{ m}$ است. شرایط مرزی $T(0) = 0$ و $q(x=l) = 0$ طبق شکل ۴-۱۵۵ است. با دو المان خطی با طول مساوی توزیع دما و گرادیان حرارتی در المان را محاسبه نمایید.

$$[K]^{(1)} = [K]^{(2)} = 0.1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [K] = 0.1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

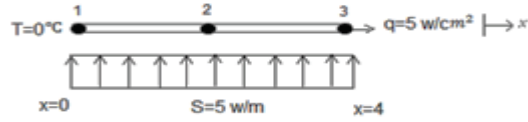
$$F_1^{(1)} = F_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{0.01 \times 1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.005 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با لحاظ شرایط مرزی $\tau_2^{(2)} = Ak \frac{dT}{dx} = -qA = -0.01$ داریم:

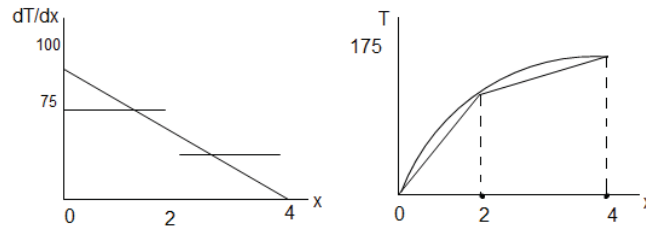
$$0.1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1^{(1)} \\ 0 \\ \tau_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \tau_1^{(1)} \\ 0.01 \\ 0 - 0.01 \end{bmatrix} \Rightarrow \tau_1^{(1)} = 0.01, T_2 = 0.01, T_3 = 0.01$$

$$T^{(1)}(x) = T_2 N_1^{(1)} = \frac{1 \times 0.01}{1} (x - x_1) = 0.01x$$

$$T^{(2)}(x) = T_2 N_1^{(2)} + T_3 N_2^{(2)} = 0.01(\epsilon - x) + 0.01(x - \epsilon) \\ \frac{dT^{(1)}}{dx} = 0.01 \text{ و } \frac{dT^{(2)}}{dx} = 0$$



شکل ۴-۵۰



شکل ۴-۵۶

جواب دقیق:

$$\frac{d}{dx} \left(Ak \frac{dT}{dx} \right) + s = \frac{d}{dx} \left(0.2 \frac{dT}{dx} \right) + 0 = 0, \quad 0 < x < l, \quad \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = -20$$

$$T(\cdot) = 0, \quad q(\xi) = 0 = -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=\xi} \Rightarrow \frac{dT}{dx}(\xi) = -20 \quad \text{و} \quad \frac{d^2 T}{dx^2} = 20$$

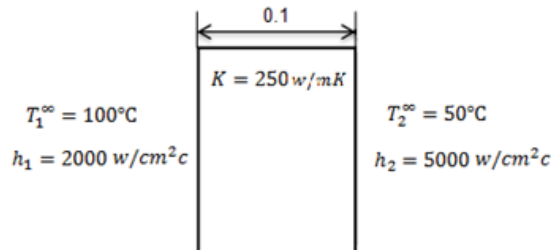
$$\Rightarrow T = 12.5x^2 + 97.5x$$

مسایل:

مسألة ۵۳. دیوار جامدی به عرض $w = 0.1m$ در معرض اختلاف دما قرار گرفته است (شکل ۴-۵۷). با استفاده از پنج المان خطی با طول مساوی، توزیع دما را در امتداد دیوار بیابید.

جواب:

$$T_1^\infty = 59.091^\circ\text{C}, T_2^\infty = 12.227^\circ\text{C}, T_i = 16.264^\circ\text{C}, \\ T_r = 7.0^\circ\text{C}, T_r = 12.626^\circ\text{C}, T_1 = 17.273^\circ\text{C}$$



شکل ۴-۵۷

مسئله ۵۴. معادله دیفرانسیل زیر همراه با شرایط مرزی داده شده حاکم بر انتقال حرارت در یک میله عایق شده می باشد:

$$-d/dx \left(k \frac{dT}{dx} \right) = q, \quad 0 < x < l$$

$$T(0) = T_i, \quad \left[k \frac{dT}{dx} + h(T - T_\infty) + q \right]_{x=l} = 0$$

که داده های مساله عبارتند از:

$$q = 0, q_c = 0, l = 0.1m, K = 0.1Wm^{-1}C^{-1},$$

$$h = 20Wm^{-2}C^{-1}, T_i = 0C, T_\infty = 0C$$

با استفاده از دو المان خطی مساله را حل کنید. دما را در نقاط $x=l/2$ و $x=l$ به دست آورید.

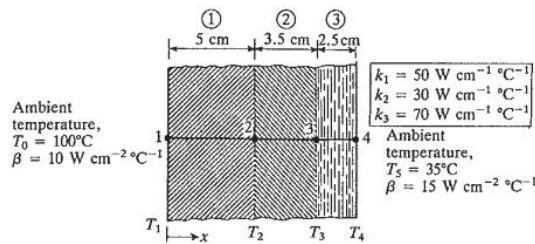
$$T_r = 0.179C, \quad T_l = 27.09C \text{ جواب:}$$

مسئله ۵۵. یک دیوار عایق متشکل از سه لایه متجانس با ضرایب هدایتی k_1, k_2, k_3 می باشد. با استفاده از روش المان محدود، دما را در نقاط ۱ و ۲ و ۳ و ۴ پیدا کنید.

$$k_1 = 0.0Wcm^{-1}C^{-1}, k_2 = 2.0Wcm^{-1}C^{-1}, k_3 = 7.0Wcm^{-1}C^{-1}$$

جواب:

$$q_{def}^{(2)} = -100.11W/m^2, \quad q_{def}^{(1)} = 217.17W/m^2, \quad T_i = 40.341C, \quad T_r = 0.881C, T_l = 28.977C, T_1 = 84.489C$$



شکل ۵۸-۵



شکل ۵۹-۵

۴-۱۶ جریان پوسوله صفحه‌ای (Plane-poiseuille flow)

جریان موازی سیال بین دودیواره مسطح بلند به فاصله $2L$ از هم را در نظر بگیرید. در این شرایط مولفه-های سرعت در راستاهای y و z صفرند. یعنی $V_y=V_z=0$ و مولفه سرعت در راستای x فقط تابعی از y می-تواند باشد ($V_x=u(y)$); زیرا با فرض تراکم‌ناپذیری سیال داریم:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (۱۱۸-۴)$$

و یا

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (۱۱۹-۴)$$

یعنی V_x تابعی از x نیست. همچنین جریان در جهت z یکنواخت فرض می‌شود. لذا $V_x=u(y)$. در غیاب نیروی حجمی (B) معادلات ناویر-استوکس عبارتند از:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (۱۲۰-۴)$$

که بخاطر شرایط بالا خواهیم داشت:

$$\mu \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \quad (۱۲۱-۴)$$

[ملاحظه می‌شود که از معادلات دوم و سوم ناویر-استوکس $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ نتیجه $p=p(x)$ و $\frac{\partial p}{\partial x} = p'$ هرگاه هدف تعیین توزیع سرعت $u(y)$ به ازای فشار ثابت و معین $\frac{dp}{dx}$ با استفاده از روش المان محدود باشد از معادله دیفرانسیل بالا پیداست که حالت خاصی از معادله $-\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{du}{dx} \right) + \beta u = f$ است که در آن

$$\alpha = \mu = cte, \beta = 0, f = -\frac{dp}{dx} = cte = q, x=y \quad (۱۲۲-۴)$$

بنابراین مدل المان محدود تدوین شده برای این مساله نیز معتبر است؛ یعنی:

$$[K]^{(e)} [u]^{(e)} = [f]^{(e)} [r]^{(e)} \quad (۱۲۳-۴)$$

که در آن

$$K_{ij} = \int_{y_A}^{y_B} \mu \frac{d\phi_i^{(e)}}{dy} \frac{d\phi_j^{(e)}}{dy} dy \quad (۱۲۴-۴)$$

$$f_i^{(e)} = \int_{y_A}^{y_B} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \phi_i^{(e)} dy \quad (۱۲۵-۴)$$

$$r_i^{(e)} = \tau_i^{(e)} = - \left(\mu \frac{du}{dy} \right)_{y=y_A}, \quad r_r^{(e)} = \tau_r^{(e)} = \left(\mu \frac{du}{dy} \right)_{y=y_B} \quad (۱۲۶-۴)$$

برای یک مش دو المانی از المان‌های خطی ($h=L$) داریم:

$$\mu/h \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdot \\ -1 & 2 & -1 \\ \cdot & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \frac{q \cdot h}{\gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1^{(1)} \\ \tau_2^{(1)} + \tau_1^{(2)} \\ \tau_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (127-4)$$

برای دو مجموعه شرایط مرزی:

$$u(-L) = u(L) = \cdot \quad \text{یا} \quad U_1 = U_3 = \cdot \quad \text{مجموعه ۱:}$$

$$U_1 = \cdot, U_3 = U. \quad \text{یا} \quad u(-L) = \cdot, u(L) = U. \quad \text{مجموعه ۲:}$$

حل المان محدود، برای این دو حالت عبارتند از:

$$U_2 = \frac{q \cdot L^2}{\gamma \mu} \quad \text{مجموعه ۱:}$$

$$U_2 = \frac{q \cdot L^2}{\gamma \mu} + \frac{U}{\gamma} \quad \text{مجموعه ۲:}$$

برای یک المان مرتبه دو ($h=2L$) داریم:

$$\mu/\lambda L \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \frac{q \cdot L}{\gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1^{(1)} \\ \cdot \\ \tau_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (128-4)$$

و حل عبارتست از:

$$U_2 = \frac{q \cdot L^2}{\gamma \mu} \quad \text{برای مجموعه ۱:}$$

$$U_2 = \frac{q \cdot L^2}{\gamma \mu} + U/\lambda \quad \text{برای مجموعه ۲:}$$

جواب دقیق این مساله برابر است با:

$$u(y) = \frac{q \cdot L^2}{\gamma \mu} \left(1 - \frac{y^2}{L^2} \right) \quad \text{برای مجموعه ۱:}$$

$$u(y) = \frac{U}{\gamma} (1 + y/L) + \frac{q \cdot L^2}{\gamma \mu} \left(1 - \frac{y^2}{L^2} \right) \quad \text{برای مجموعه ۲:}$$

ملاحظه می‌شود که حل‌های المان محدود در گره‌ها با جواب دقیق برابرند. حل المان مرتبه دو برای هر مقدار y با حل دقیق همخوانی دارد.

۴-۱۷ مسایل متقارن محوری

معادله دیفرانسیل زیر، جریان حرارتی شعاعی در یک استوانه طویل دایره‌ای به شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o را بیان می‌کند.

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(a(r) \frac{du}{dr} \right) = q(r) \quad \text{for } R_i < r < R_o \quad (129-4)$$

که a و q توابع مشخصی برحسب متغیر r هستند. در این حالت توزیع دما در هر مقطعی در راستای طول آن یکسان است. از طرفی چون a و q فقط تابعی از r بوده و در هر θ از مقطع، ثابت و یکسان عمل می‌کنند توزیع دما در راستای هر خط شعاعی، یکی است و به این ترتیب مساله $3D$ به $1D$ ختم می‌شود.

$$\bullet = \int_V w \left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(a \frac{du}{dr} \right) - q \right] dV \quad (130-4)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r_A}^{r_B} w \left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(a \frac{du}{dr} \right) - q \right] r dr d\theta dz \quad (131-4)$$

$$= 2\pi \int_{r_A}^{r_B} w \left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(a \frac{du}{dr} \right) - q \right] r dr \quad (131-4)$$

$$\bullet = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} \left(a \frac{dw}{dr} \frac{du}{dr} - rwq \right) dr - \left[2\pi w a \frac{du}{dr} \right]_{r_A}^{r_B} \quad (133-4)$$

$$\bullet = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} \left(a \frac{dw}{dr} \frac{du}{dr} - rwq \right) dr - w(r_A) Q_A^e - w(r_B) Q_B^e \quad (134-4)$$

که

$$Q_A^e = -2\pi \left(a \frac{du}{dr} \right)_{r_A}, \quad Q_B^e = 2\pi \left(a \frac{du}{dr} \right)_{r_B} \quad (135-4)$$

و با انتخاب جواب آزمایشی $u(r) \approx \sum_{j=1}^n u_j N_j^e(r)$ معادله المان محدود به شکل زیر خواهد بود:

$$[K^e] \{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\} \quad (136-4)$$

که در آن



شکل ۴-۶۰

$$K_{ij}^e = \int_{r_A}^{r_B} \pi a \frac{dN_i^e}{dr} \frac{dN_j^e}{dr} dr, \quad (137-4)$$

$$f_i^e = \int_{r_A}^{r_B} \pi N_i^e q r dr \quad (138-4)$$

برای توابع شکل خطی $[N_1^e(r) = \frac{(r_B-r)}{h_e}, N_2^e(r) = \frac{(r-r_A)}{h_e}]$ و فرض $a = a_e r$ & $q = q_e$ داریم:

$$[K^e] = \frac{\pi a_e}{h_e} \left[r_A + \frac{1}{2} h_e \right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{f^e\} = \frac{\pi q_e h_e}{6} \begin{Bmatrix} 3r_A + h_e \\ 3r_A + 2h_e \end{Bmatrix}$$

برای یک سیستم استوانه‌ای:

$$\frac{-1}{r} \frac{d}{dr} \left(\pi r k \frac{dT}{dr} \right) = \pi q \quad (139-4)$$

معادله بالا حالت خاصی از معادله

$$\frac{-1}{r} \frac{d}{dr} \left(a \frac{du}{dr} \right) = q(r) \quad (140-4)$$

با $u=T$ و $a = \pi r k$ و $q \rightarrow \pi q$ است. بطور مشابه می‌توان شکل ضعیف این معادله را با استفاده از یک المان حجمی استوانه تدوین کرد.

مثال ۲۸. یک استوانه توپر بلند به شعاع R_o را در نظر بگیرید که در آن انرژی با یک نرخ ثابت $q \cdot (Wm^{-3})$ تولید می‌شود. سطح مرزی در $r = R_o$ تحت دمای ثابت T نگهداشته شده است. توزیع دما و شار حرارت را پیدا نمایید.

$$(Q = -Ak \frac{dT}{dr} \Big|_r) q(r) = -k \frac{dT}{dr}$$

شرایط مرزی در این حالت عبارتند از:

$$T(R_o) = T, \quad (\pi r k \frac{dT}{dr})_{r=R_o} = 0 \text{ because of symmetry}$$

در این حالت ماتریس سفتی و بردار بار عبارتند از:

$$K_{ij}^e = \int_{r_A}^{r_B} \pi k r \frac{dN_i^e}{dr} \frac{dN_j^e}{dr} dr,$$

$$f_i^e = \int_{r_A}^{r_B} \pi N_i^e q \cdot r dr$$

و نیز داریم:

$$Q_1^e = -\pi k \left(r \frac{dT}{dr} \right)_{r_A}, \quad Q_2^e = \pi k \left(r \frac{dT}{dr} \right)_{r_B}$$

برای مشی با یک المان خطی، $r_A = 0, r_B = R_o = h_e$ داریم:

$$\pi k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \frac{\pi q_o R_o}{r} \begin{Bmatrix} R_o \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

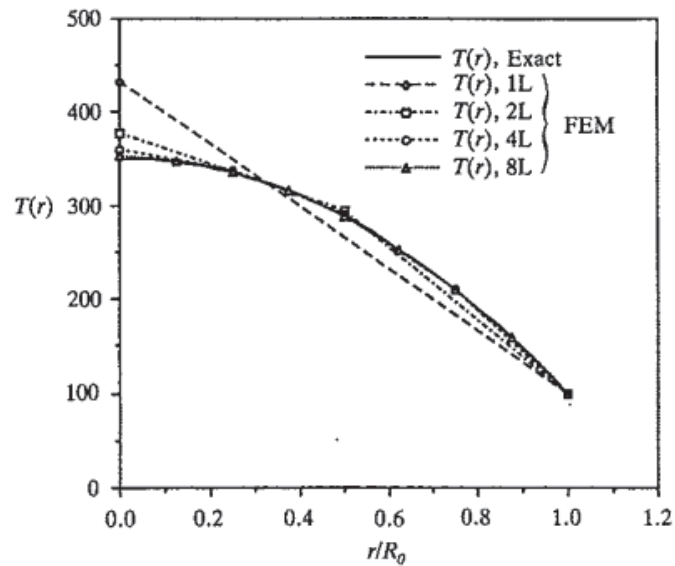
با اعمال شرایط مرزی $T_1 = T_o, Q_1 = 0$ داریم:

$$T_1 = \frac{q_o R_o}{\pi k} + T_o \quad \& \quad Q_2 = \pi k (U_2 - U_1) - \frac{q_o R_o}{r} = -\pi q_o R_o$$

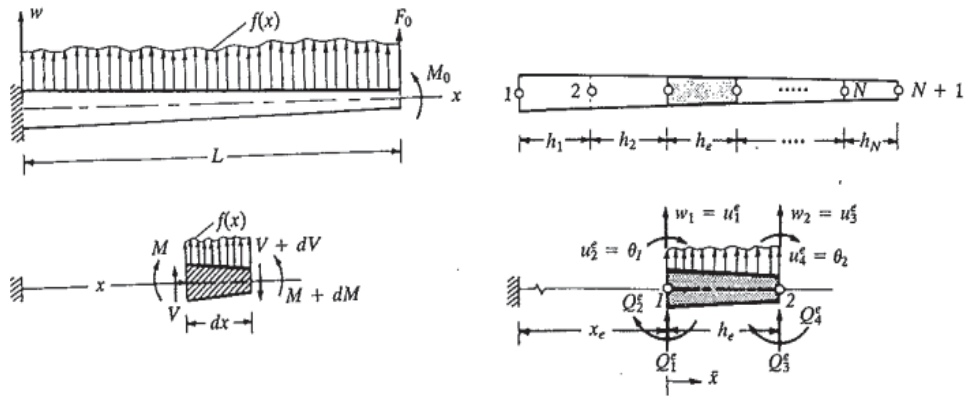
$$T(r) = \frac{q_o R_o}{\pi k} \left(1 - \frac{r}{R_o} \right) + T_o \quad \& \quad q(r) = -k \frac{dT}{dr} = \frac{q_o}{r} R_o$$

اما جواب دقیق عبارت است از:

$$T(r) = \frac{q_o R_o}{\pi k} \left[1 - \left(\frac{r}{R_o} \right)^2 \right] + T_o \quad \& \quad q(r) = \frac{q_o}{r} R_o, \quad Q(R_o) = \pi q_o R_o$$



شکل ۴-۶۱



شکل ۴-۶۲

۴-۱۸ خمش تیرها

روابط حاکم بر تیر مطابق شکل ۴-۶۲ عبارتند از:

$$M = b \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4-142)$$

$$V = \frac{dM}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f(x) \quad 0 < x < L \quad (4-143)$$

$$f = \frac{dV}{dx} \quad (4-144)$$

شرایط مرزی نیز عبارتند از:

EBC: (شیب) w و $\frac{dw}{dx}$

NBC: (نیروی برشی) $\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)$ و (گشتاور خمشی) $b \frac{d^2 w}{dx^2}$

در این تحلیل، متغیر اولیه خیز (w) و شیب ($\frac{dw}{dx}$) هستند و برای راحتی روابط ریاضی $\theta = -\frac{dw}{dx}$ منظور می‌شود. همچنین متغیرهای ثانوی، گشتاور خمشی و نیروی برشی هستند که مقادیر آنها در مرزها بصورت زیر لحاظ می‌شود.

$$Q_1^{(e)} \equiv \left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_1^{(e)}} \quad , \quad Q_2^{(e)} = \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x_1^{(e)}} \quad (4-145)$$

$$Q_3^{(e)} \equiv - \left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_2^{(e)}} \quad , \quad Q_4^{(e)} = - \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x_2^{(e)}} \quad (4-146)$$

در روابط بالا $b=b(x)=EI$ و $f=f(x)$ توابع معلومی از x هستند. شکل ضعیف معادله حاکم به صورت زیر استخراج می‌شود: ($v(x)$ تابع وزن است)

$$\begin{aligned}
\cdot &= \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} v \left[\frac{d^r}{dx^r} \left(b \frac{d^r w}{dx^r} \right) - f \right] dx \\
&= \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} \left[-\frac{dv}{dx} \frac{d}{dx} b \left(\frac{d^r w}{dx^r} \right) - vf \right] dx + \left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^r w}{dx^r} \right) \right]_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} \\
&= \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} \left(b \frac{d^r v}{dx^r} \frac{d^r w}{dx^r} - vf \right) dx + \left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^r w}{dx^r} \right) - \frac{dv}{dx} b \frac{d^r w}{dx^r} \right]_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} \quad (147-ع)
\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی داریم:

$$\begin{aligned}
\cdot &= \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} \left(b \frac{d^r v}{dx^r} \frac{d^r w}{dx^r} - vf \right) dx - v(x_1^{(e)}) Q_1^{(e)} - \left(-\frac{dv}{dx} \right)_{x_1^{(e)}} Q_r^{(e)} - v(x_r^{(e)}) Q_r^{(e)} - \left(-\frac{dv}{dx} \right)_{x_r^{(e)}} Q_1^{(e)} \\
&\quad (148-ع)
\end{aligned}$$

در هر المان چهار شرط (دوتا در هر گره) وجود دارند؛ یعنی

$$\theta(x_r^{(e)}) = u_\xi^{(e)}, w(x_r^{(e)}) = u_r^{(e)}, \theta(x_1^{(e)}) = u_r^{(e)}, w(x_1^{(e)}) = u_\xi^{(e)} \quad (149-ع)$$

بنابراین به یک چند جمله‌ای با چهار ضریب نیاز داریم.

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 = \sum_{j=1}^4 a_j^{(e)} N_j^{(e)} \quad (150-ع)$$

با اعمال شرایط مرزی بالا توابع میانجیایی N_j^e بدست خواهند آمد:

$$\left. \begin{aligned}
a_1^e &= w(x_1^{(e)}) \\
a_2^e &= \left(-\frac{dw}{dx} \right)_{x_1^{(e)}} \\
a_3^e &= w(x_r^{(e)}) \\
a_4^e &= \left(-\frac{dw}{dx} \right)_{x_r^{(e)}}
\end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases}
N_1^e = 1 - \gamma \left(\frac{x-x_1^{(e)}}{l^{(e)}} \right)^\gamma + \gamma \left(\frac{x-x_1^{(e)}}{l^{(e)}} \right)^\gamma \\
N_2^e = -(x-x_1^{(e)}) \left(1 - \frac{x-x_1^{(e)}}{l^{(e)}} \right)^\gamma \\
N_3^e = \gamma \left(\frac{x-x_1^{(e)}}{l^{(e)}} \right)^\gamma - \gamma \left(\frac{x-x_1^{(e)}}{l^{(e)}} \right)^\gamma \\
N_4^e = -(x-x_1^{(e)}) \left[\left(\frac{x-x_1^{(e)}}{l^{(e)}} \right)^\gamma - \frac{x-x_1^{(e)}}{l^{(e)}} \right]
\end{cases} \quad (151-ع)$$

با روش استخراج بالا $N_i^{(e)}$ ها، چندجمله‌ای‌های خانواده «هرمیتی مکعبی» هستند زیرا در هر گره متغیر وابسته و شیب آن در نظر گرفته شدند؛ در حالیکه اگر المانی با چهار گره انتخاب می‌شد باید فقط به هر گره یک متغیر وابسته \bar{w} نسبت داده می‌شد تا توابع مکعبی لاگرانژی به دست می‌آمدند که در این مساله (تئوری تیرهای اولر-برنولی) قابل استفاده خواهند بود. به این ترتیب به روش گالرکین با در نظر گرفتن توابع میانجیاب مکعبی بالا داریم:

$$v = N_i^{(e)} \rightarrow \cdot = \sum_{j=1}^4 \left(\int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} b \frac{d^r N_i^{(e)}}{dx^r} \frac{d^r N_j^{(e)}}{dx^r} dx \right) a_j - \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} N_i^{(e)} f dx - Q_i^{(e)} \quad (152-ع)$$

یا

$$\sum_{j=1}^i K_{ij}^{(e)} a_j^e - F_i^e = 0 \quad (153-ع)$$

که در رابطه بالا:

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} b \frac{d^r N_i^{(e)}}{dx^r} \frac{d^r N_j^{(e)}}{dx^r} dx \quad (154-ع)$$

$$F_i^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} N_i^{(e)} f dx + Q_i^{(e)} \quad (155-ع)$$

شکل ماتریسی:

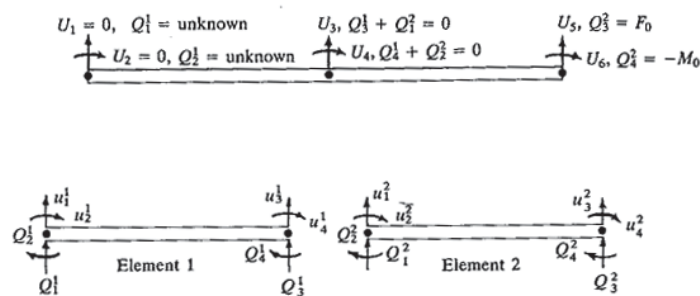
$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}^{(e)} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}^{(e)} \quad (156-ع)$$

اگر یک نیروی متمرکز عرضی $F_i^{(e)}$ در یک نقطه مثل x در داخل المان اعمال گردد آن را در رابطه زیر بین گره‌های المان توزیع می‌کنند:

$$F_i^{(e)} = F_i^{(e)} \phi_i^{(e)}(x) \quad (157-ع)$$

مجددا یادآوری می‌شود F_1^e و F_2^e نیروهای عرضی (برشی) در گره‌های ابتدا و انتها و F_3^e و F_4^e ممان‌های خمشی در این گره‌ها خواهند بود. هرگاه $b=EI$ و f روی المان ثابت باشند آنگاه داریم:

$$[K]^{(e)} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & -2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & -2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad [F]^{(e)} = \frac{f l^{(e)}}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -l \\ 6 \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}^{(e)} \quad (158-ع)$$



شکل ۶۳-ع

مونتاز المانها براساس پیوستگی متغیرهای اولیه خیز و شیب و تعادل بین المانها نسبت به متغیرهای ثانویه نیروی برشی و گشتاور خمشی است.

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= U_1 \\ u_2^{(1)} &= U_2 \\ u_3^{(1)} &= u_3^{(2)} = U_3 \\ u_4^{(1)} &= u_4^{(2)} = U_4 \\ u_5^{(2)} &= U_5 \\ u_6^{(2)} &= U_6 \end{aligned} \quad (159-4)$$

تعادل نیروهای تعمیم یافته در هر گره بین دو المان متصل Ω^e و Ω^f ایجاب می کند که

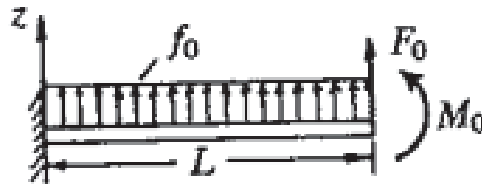
$$\begin{aligned} Q_3^{(e)} + Q_3^{(f)} &= \text{نیروی نقطه ای خارجی اعمال شده در این گره} \\ Q_4^{(e)} + Q_4^{(f)} &= \text{گشتاور خمشی خارجی اعمالی در این گره} \end{aligned} \quad (160-4)$$

به این ترتیب ماتریس سفتی و بار مونتازی عبارتند از:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & \cdot & \cdot \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & \cdot & \cdot \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{34}^{(2)} & K_{35}^{(2)} & K_{36}^{(2)} \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{44}^{(2)} & K_{45}^{(2)} & K_{46}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & K_{51}^{(2)} & K_{52}^{(2)} & K_{53}^{(2)} & K_{54}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & K_{61}^{(2)} & K_{62}^{(2)} & K_{63}^{(2)} & K_{64}^{(2)} \end{bmatrix} [F] = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} + F_3^{(2)} \\ F_4^{(1)} + F_4^{(2)} \\ F_5^{(2)} \\ F_6^{(2)} \end{bmatrix} \quad (161-4)$$




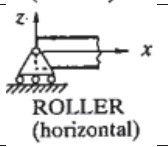
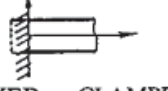
بعضی از شرایط مرزی معمول در جدول ۴-۱۲ ذکر شده اند. شرایط مرزی طبیعی موقعی مشخص می شود که متغیر اولیه نظیر آن مقید نشده باشد.

مثال ۲۹. رویه حل تیر شکل ۴-۶۴ را با دو المان به طول های مساوی $h = \frac{1}{2}L$ بنویسید.



شکل ۴-۶۴

جدول ۴-۱۲ چند نوع شرایط مرزی حاکم در تحلیل تیرها

نوع تکیه گاه	شرایط مرزی جابجایی	شرایط مرزی نیروی
 <p>FREE</p>	-	همه، طبق تعریف مساله
 <p>PINNED</p>	$u = 0, w = 0$	ممان مشخص می‌شود.
 <p>ROLLER (vertical)</p>	$u = 0$	نیروی قائم و ممان خمشی مشخص می‌شوند
 <p>ROLLER (horizontal)</p>	$w = 0$	نیروی افقی و ممان خمشی مشخص می‌شوند
 <p>FIXED or CLAMPED</p>	$u = 0, w = 0, \frac{dw}{dx} = 0$	هیچ کمیتی مشخص نمی‌شود

$$\frac{\sqrt{EI}}{l^3} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma l & -\gamma & -\gamma l & \cdot & \cdot \\ -\gamma l & \gamma l^2 & \gamma l & l^2 & \cdot & \cdot \\ -\gamma & \gamma l & \gamma l & \cdot & -\gamma & -\gamma l \\ -\gamma l & l^2 & \cdot & \varepsilon l^2 & \gamma l & l^2 \\ \cdot & \cdot & -\gamma & \gamma l & \gamma & l \\ \cdot & \cdot & -\gamma l & l^2 & \gamma l & \gamma l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_\gamma \\ U_\gamma \\ U_\gamma \\ U_\varepsilon \\ U_\varepsilon \\ U_\gamma \end{bmatrix} = \frac{f \cdot l}{\sqrt{EI}} \begin{bmatrix} \gamma \\ -l \\ \gamma l \\ \cdot \\ \gamma \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_\gamma \\ Q_\gamma \\ \cdot \\ F \\ -M \end{bmatrix}$$

با اعمال شرایط مرزی $U_\gamma = U_\varepsilon = 0$ و حل معادلات منتهجه داریم:

$$\begin{bmatrix} U_\gamma \\ U_\varepsilon \\ U_\varepsilon \\ U_\gamma \end{bmatrix} = \frac{l^3}{\sqrt{EI}} \begin{bmatrix} \gamma l & \cdot & -\gamma & -\gamma l \\ -\gamma & \gamma l & \gamma & \gamma l \\ -\gamma l & l^2 & \gamma l & \gamma l^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f \cdot l \\ \cdot \\ f + \frac{1}{\gamma} f \cdot l \\ -M + \frac{1}{\gamma} f \cdot l \end{bmatrix} = \frac{h}{\sqrt{EI}} \begin{bmatrix} \varepsilon l^2 F + \gamma l M + \frac{\gamma}{\varepsilon} f \cdot l \\ -\gamma l F - \gamma M - \gamma f \cdot l \\ \gamma l^2 F + \gamma l M + \gamma f \cdot l \\ -\gamma l F - \gamma M - \gamma f \cdot l \end{bmatrix}$$

و نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهی عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} Q_\gamma \\ Q_\gamma \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{EI}}{l^3} \begin{bmatrix} -\gamma & -\gamma l & \cdot & \cdot \\ \gamma l & l^2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_\gamma \\ U_\varepsilon \\ U_\varepsilon \\ U_\gamma \end{bmatrix} - \frac{f \cdot l}{\sqrt{EI}} \begin{bmatrix} \gamma \\ -l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(F + \gamma f \cdot l) \\ \gamma l(F + \gamma f \cdot l) + M \end{bmatrix}$$

پس پردازش:

$$w(x) = \begin{cases} U_\gamma N_\gamma^{(\gamma)} + U_\varepsilon N_\varepsilon^{(\gamma)} & 0 \leq x \leq h \\ U_\gamma N_\gamma^{(\gamma)} + U_\varepsilon N_\varepsilon^{(\gamma)} + U_\varepsilon N_\varepsilon^{(\gamma)} + U_\gamma N_\varepsilon^{(\gamma)} & h \leq h \leq \gamma h \end{cases}$$

گشتاور خمشی در هر نقطه در المان Ω^e عبارت است از:

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = EI \sum_{j=1}^{\xi} u_j^e \frac{d^2 N_j^e}{dx^2}$$

اگر مقطع تیر مستطیلی و به ارتفاع H و عرض B باشد تنش ماکزیمم عبارت است از:

$$\sigma_{max} = \mp \frac{MH}{\gamma I} = \mp \frac{EH}{\gamma} \frac{d^2 w}{dx^2}$$

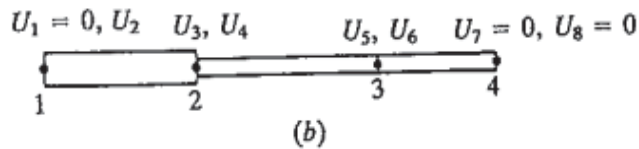
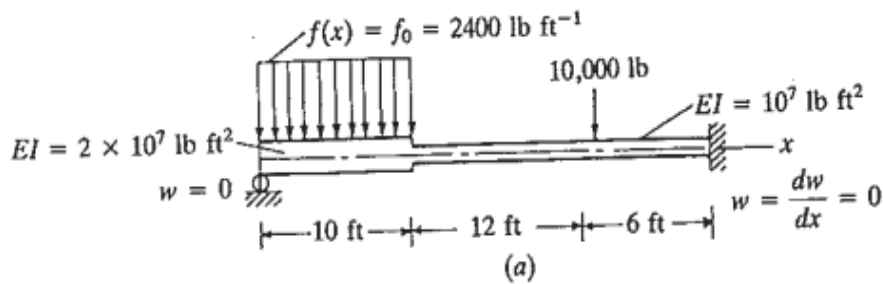
تنش در سطح بالایی منفی و برای سطح پایینی تیر مثبت است.

مثال ۳۰. برای تیر بارگذاری شده شکل ۴-۶۵ با فرض سه المان، درجات آزادی و نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهی را محاسبه نمایید.

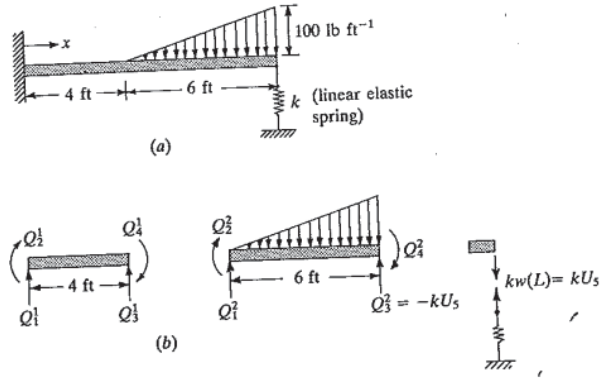
$$EI^{(1)} = 2 \times 10^7 \frac{lb}{ft^2}$$

$$EI^{(2)} = EI^{(3)} = 10^7 \frac{lb}{ft^2}$$

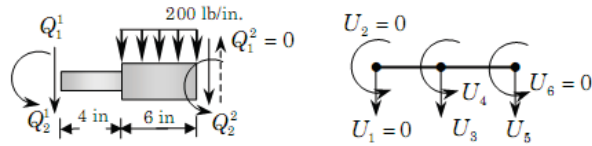
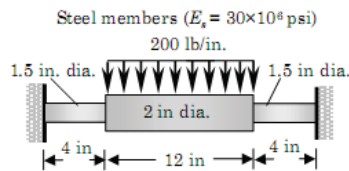
$$f = 2400 \frac{lb}{ft}$$



شکل ۴-۶۵



شکل ۶۶-ε



شکل ۶۷-ε

که در آن $c = \frac{144K}{EI}$ است. به ازای مقادیر مختلف $\frac{K}{EI}$ حل این معادلات متفاوت خواهند بود؛ مثلاً برای $\frac{K}{EI} = 10^2$ داریم.

$$U_7 = \frac{-0.1216 \times 10^4}{EI} (ft), \quad U_8 = \frac{-0.2376 \times 10^4}{EI} (rad)$$

$$U_9 = \frac{-2.132}{EI} (ft), \quad U_{10} = \frac{-0.7617 \times 10^4}{EI} (rad)$$

مثال ۳۲. برای تیر بارگذاری شده شکل ۶۷-ε، با فرض دو المان، درجات آزادی را محاسبه نمایید.

$$A_1 = \pi \left(\frac{1.5}{4}\right)^2 = 1.77 (in^2)$$

$$A_r = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = 3.142 \text{ (in}^2\text{)}$$

$$I_1 = \frac{\pi}{64} (1.5)^4 = 0.985 \text{ (in}^4\text{)}$$

$$I_r = \frac{\pi}{64} (r)^4 = 0.7854 \text{ (in}^4\text{)}$$

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$EI^{(1)} = 7.8505 \times 10^6 \text{ lb-in}^2, \quad EI^{(r)} = 23.562 \times 10^6 \text{ lb-in}^2$$

با توجه به تقارن مساله می توان تنها نصف تیر را تحلیل کرد. ماتریس سختی المان به صورت زیر می باشد:

$$\frac{rEI^{(e)}}{l^{(e)3} \begin{bmatrix} 1 & -3l^{(e)} & -6 & -3l^{(e)} \\ -3l^{(e)} & 3l^{(e)2} & 3l^{(e)} & l^{(e)2} \\ -6 & 3l^{(e)} & 6 & 3l^{(e)} \\ -3l^{(e)} & l^{(e)2} & 3l^{(e)} & 3l^{(e)2} \end{bmatrix}}$$

ماتریس نیروی گسترده روی المان اول صفر و روی المان دوم عبارت است از:

$$[F^{(r)}] = \frac{-200 \cdot l^{(r)}}{12} [1 \quad -l^{(r)} \quad 6 \quad l^{(r)}]^T$$

معادلات سیستم شده عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 1.298 & -2.796 & -1.298 & -2.796 & \cdot & \cdot \\ 7.8505 & 2.796 & 2.796 & 2.796 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2.796 & -1.298 & -1.298 & -3.927 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 22.16 & 3.927 & 7.854 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1.298 & 3.927 & 10.71 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 10.71 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_3^r \\ Q_4^1 + Q_4^r \\ Q_5^1 + Q_5^r \\ Q_6^1 \\ Q_6^r \end{bmatrix}$$

با اعمال شرایط مرزی $Q_2^{(r)} = U_1 = U_2 = U_3 = 0$ ، تعادل نیروهای داخلی $Q_1^{(1)} + Q_2^{(r)} = 0$ و $Q_3^{(1)} + Q_4^{(r)} = 0$ خواهیم داشت:

$$U_2 = -0.00202 \text{ in}, U_4 = +0.00082 \text{ in}, \quad U_5 = -0.00046 \text{ in}$$

علت $Q_2^{(r)} = 0$ این است که $\frac{dM}{dx} = 0$ برنامه APDL نظیر این مثال به شرح زیر است:

```
/PERP
ANTYPE,STATIC
ET,1,BEAM
R,1,1,767,0,2485 !A=1,767, IZZ=0,2485
R,2,3,142,0,7854
MP,EX,1,3E7
```

```

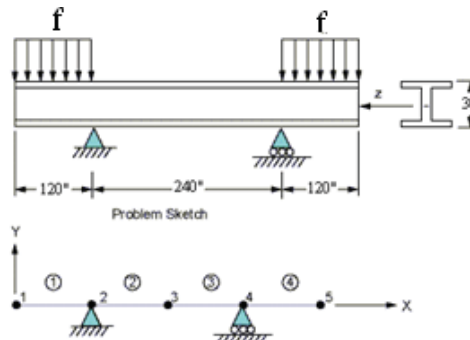
MP,PRXY,1,0,3
N,1
N,2,4
N,3,8,0
E,1,2
REAL,2
E,2,3
D,1,ALL
D,3,ROTZ,0
F,3,FY,0
SFBEAM,2,8,PRES,2,0
OUTPR,BASIC,LAST
FINISH
!*
/SOLU
SOLVE
FINISH
!*
/POST1
PRNSOL,U,Y
PRNSOL,ROT,Z
PRRSOL,F
FINISH
!*

```

مثال ۳۲. یک تیر ۲۰"WF استاندارد، به مساحت سطح مقطع $A = ۵۰.۶۵ \text{ in}^2$ ، طبق شکل ۶۸-۴ روی تکیه‌گاه‌ها و تحت بارگذاری قرار گرفته است. اگر شدت بار گسترده و آرده $f = ۱۰۰۰۰ / ۱۲ \left(\frac{\text{lb}}{\text{in}} \right)$ باشد، ماکزیم تنش خمشی در قسمت میانی تیر و خیز δ در وسط تیر را تعیین کنید.

$$I_z = ۷۸۹۲ \text{ in}^4, E = ۳۰ \times ۱۰^6 \text{ Psi}$$

با استفاده از چهار المان می‌توان سازه را مش‌بندی کرد. البته بخاطر تقارن مساله می‌توان نصف تیر را نیز تحلیل کرد. برای این منظور از المان $BEAM3$ در انسیس استفاده می‌شود. برنامه $APDL$ معادل عبارتست از:



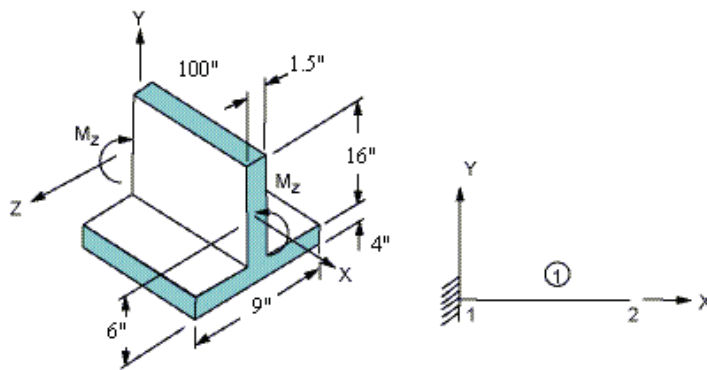
شکل ۶۸-۴

```

/PREP
MP, PRXY, 1, .3
ANTYPE, STATIC
ET, 1, BEAM
KEYOPT, 1, 4, 4 !output at 4 intermediate locations
R, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20
MP, EX, 1, 3.0E6
N, 1
N, 2, 12
N, 3, 24
N, 4, 36
N, 5, 48
E, 1, 2
EGEN, 3, 1, 1
D, 2, UX
D, 2, UY
D, 2, UZ
SFBEAM, 1, 1, PRES, (1000/12)
SFBEAM, 3, 1, PRES, (1E7/12)
FINISH
/SOLU
SOLVE
FINISH
/POST
SET, 1, 1
PRNSOL, U, COMP
PRNSOL, ROT, COMP
PLDISP, 1
ETABLE, STRS, LS, 3
PRETAB, STRS
FINISH
!*
    
```

مقادیر تنش ماکزیمم در قسمت میانی و خیز برابرند با:

$$\sigma = -111.4 \cdot 10^6 \text{ psi}, \delta = 0.182 \text{ in}$$

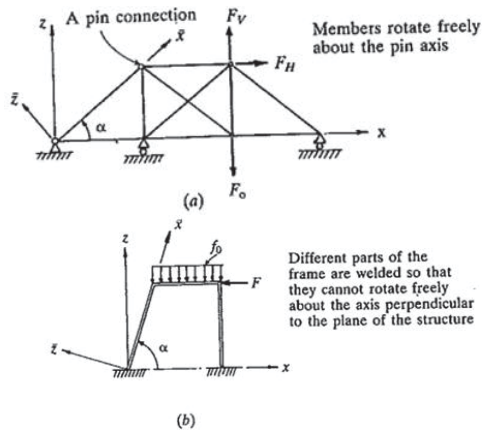


شکل ۴-۶۹

مثال ۳۲. ماکزیم تنش‌های کششی و فشاری در یک تیر T شکل نامتقارن را که در معرض گشتاور خمشی M_z قرار دارد پیدا کنید.
 ابعاد و خواص هندسی مطابق شکل ۶۹-۴ هستند. $I_z = 200 \text{ in}^4, A = 7 \text{ in}^2, E = 3 \times 10^6 M_z = 10000 \text{ in. lb}$ با در نظر گرفتن یک المان از نوع $BEAM5$ (المان تیر نامتقارن مخروطی) در نرم افزار $ANSYS$ برنامه $APDL$ معادل این مثال عبارت است از:

```

/PREP7
MP,PRXY,1,0.3
ANTYPE,STATIC
ET,1,BEAM5
R,1,60,200,136 !AREA,Iz,DISTANCE TO TOP AND BOT HEIGHT
MP,EX,1,3E6
N,1
N,2,100
E,1,2
D,1,ALL
F,2,MZ,10000
FINISH
/SOLU
NSUBST,1
OUTRP,ALL,1
SOLVE
FINISH
/POST1
ETABLE,STRS,B,LS,1
ETABLE,STRS,T,LS,1
PRETAB,STRS-B
PRETAB,STRS-T
FINISH
    
```



شکل ۶۹-۴

ع-۱۹ المان قاب اولر- برنولی

در مورد خرپاهای دو بعدی، ماتریس سفتی المان به شکل زیر تعریف شد:

$$[K]^{(e)} = \frac{A^{(e)}E^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۶۲-ع)$$

از سوپرپوز المان میله با المان تیر، برای المان قاب سه درجه آزادی در هر گره نتیجه می‌شود. $(-\frac{dw}{dx}, w, u)$ اگر سفتی محوری (AE) ، سفتی خمشی (EI) و نیروی گسترده محوری (q) و نیروی گسترده عرضی (f) بطور المانی ثابت باشند، سوپرپوز المان میله خطی با المان تیر اولر-برنولی مکعبی هرمیتی معادلات المانی زیر را ارائه می‌دهد:

$$[\bar{K}]^{(e)} [\bar{d}]^{(e)} = [\bar{F}]^{(e)}$$

که در آن

$$[\bar{d}]^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}^{(e)}, \quad [\bar{F}]^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}qh \\ \frac{1}{2}fh \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}fh^2 \\ \frac{1}{2}qh \\ \frac{1}{2}fh \\ \frac{1}{\sqrt{3}}fh^2 \end{bmatrix}^{(e)} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}^{(e)} \quad (۱۶۴-ع)$$

هرگاه $f=f$ و $q=q$ ثابت باشند خواهیم داشت:

$$[\bar{K}] = \frac{\sqrt{3}AE}{l^{(e)\sqrt{3}}} \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3l & 0 & -6 & -3l \\ 0 & -3l & 3l^2 & 0 & 3l & l^2 \\ -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3l & 0 & 6 & 3l \\ 0 & -3l & 3l^2 & 0 & 3l & 3l^2 \end{bmatrix}, \quad \mu = \frac{A^{(e)}l^{(e)\sqrt{3}}}{2l} \quad (۱۶۵-ع)$$

اگر جابجایی‌های محلی $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ نظیر جابجایی‌های عمومی (u, v, w) باشند در حالت دوبعدی مؤلفه عمود بر صفحه، صفر $(v = \bar{v} = 0)$ بوده و $\theta = -\frac{d\bar{w}}{dx}$ ثابت است. در این حالت ماتریس دوران عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}^{(e)} \\ \bar{w}^{(e)} \\ \bar{\theta}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^{(e)} & \sin \varphi^{(e)} & 0 \\ -\sin \varphi^{(e)} & \cos \varphi^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(e)} \\ w^{(e)} \\ \theta^{(e)} \end{bmatrix} \quad (۱۶۶-ع)$$

و یا

$$[\bar{d}]^{(e)} = [R]^{(e)}[d]^{(e)} \quad (۱۶۷-۴)$$

در نتیجه

$$[d]^{(e)} = [R]^{(e)T}[\bar{d}]^{(e)} \quad (۱۶۸-۴)$$

به همین ترتیب

$$[\bar{F}]^{(e)} = [R]^{(e)}[F]^{(e)} \quad (۱۶۹-۴)$$

لذا داریم:

$$[\bar{k}]^{(e)} = [\bar{d}]^{(e)}[\bar{F}]^{(e)} \quad (۱۷۰-۴)$$

$$[\bar{K}]^{(e)}[R]^{(e)}[d]^{(e)} = [R]^{(e)}[F]^{(e)} \quad (۱۷۱-۴)$$

و یا

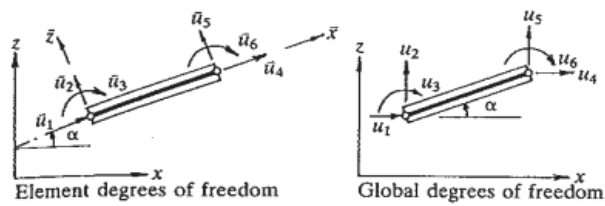
$$[R]^{(e)T}[\bar{K}]^{(e)}[R]^{(e)}[d]^{(e)} = [F]^{(e)} \quad (۱۷۲-۴)$$

بنابراین ماتریس سفتی المان در سیستم عمومی در این حالت عبارت است از:

$$[K]^{(e)} = [R]^{(e)T}[\bar{K}]^{(e)}[R]^{(e)} \quad (۱۷۳-۴)$$

و ماتریس بار المان در سیستم عمومی برابر است با:

$$[F]^{(e)} = [R]^{(e)T}[\bar{F}]^{(e)} \quad (۱۷۴-۴)$$



(b)
شکل ۷۱-۴

به این ترتیب بر اساس شکل‌های زیر، ماتریس دوران المانی عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(e)} \\ \bar{u}_2^{(e)} \\ \bar{u}_3^{(e)} \\ \bar{u}_4^{(e)} \\ \bar{u}_5^{(e)} \\ \bar{u}_6^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^{(e)} & \sin \varphi^{(e)} & . & . & . & . \\ -\sin \varphi^{(e)} & \cos \varphi^{(e)} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \cos \varphi^{(e)} & \sin \varphi^{(e)} & . & . & . & . \\ -\sin \varphi^{(e)} & \cos \varphi^{(e)} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ u_3^{(e)} \\ u_4^{(e)} \\ u_5^{(e)} \\ u_6^{(e)} \end{bmatrix} \quad (175-ع)$$

بر اساس این ماتریس دوران، ماتریس سفتی عمومی عبارت است از:

$$[K^{(e)}] = \frac{\gamma EI}{l^3} \begin{bmatrix} \mu C^\gamma + \gamma S^\gamma & & & & & & & & \\ (\mu - \gamma)CS & \mu S^\gamma + \gamma C^\gamma & & & & & & & \text{sym.} \\ \gamma l S & -\gamma l S & \gamma l^\gamma & & & & & & \\ -(\mu C^\gamma + \gamma S^\gamma) & -(\mu - \gamma)CS & -\gamma l S & \mu C^\gamma + \gamma S^\gamma & & & & & \\ -(\mu - \gamma)CS & -(\mu S^\gamma + \gamma C^\gamma) & \gamma l C & (\mu - \gamma)CS & \mu S^\gamma + \gamma C^\gamma & & & & \\ \gamma l S & -\gamma l S & l^\gamma & -\gamma l S & \gamma l C & \gamma l^\gamma & & & \end{bmatrix} \quad (176-ع)$$

$$[\mu = \frac{A^{(e)} h^{(e)\gamma}}{\gamma l^{(e)}}, \quad S = \sin \varphi^{(e)}, \quad C = \cos \varphi^{(e)}] \quad (177-ع)$$

و ماتریس نیرو عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \\ F_3^{(e)} \\ F_4^{(e)} \\ F_5^{(e)} \\ F_6^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 C - \bar{F}_2 S \\ \bar{F}_1 S + \bar{F}_2 C \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 C - \bar{F}_5 S \\ \bar{F}_4 S + \bar{F}_5 C \\ \bar{F}_6 \end{bmatrix} \quad (178-ع)$$

مثال ۳۵. مطلوبست تحلیل قاب زیر

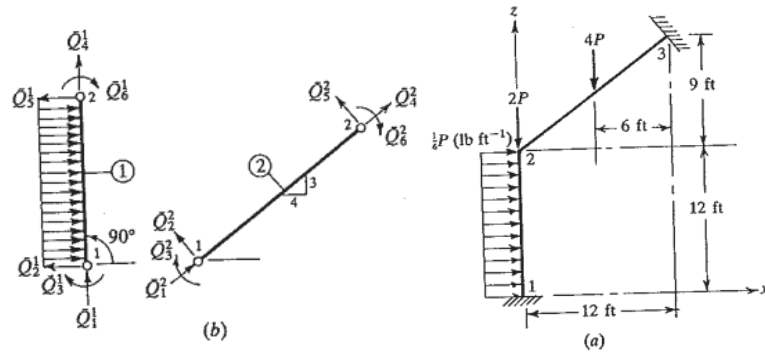
$$\varphi^{(1)} = 90^\circ, l^{(1)} = 144 \text{ in}, A^{(1)} = 10 \text{ in}^2, I^{(1)} = 10 \text{ in}^4,$$

$$E^{(1)} = 10^6 \text{ Psi}, f^{(1)} = \frac{P}{\gamma^2} \text{ lb} - \text{in}^{-1}$$

$$\varphi^{(2)} = 36.87^\circ, l^{(2)} = 180 \text{ in}, A^{(2)} = 10 \text{ in}^2, I^{(2)} = 10 \text{ in}^4,$$

$$E^{(2)} = 10^6 \text{ Psi}, f^{(2)} = .$$

نیروی وسط المان ۲ طبق رابطه $F_i^{(2)} = F_o^{(2)} N_i^{(2)}(x_o)$ به دو گره ۲ و ۳ تقسیم می‌شود. برای همین آن را به دو مولفه عمودی و محوری تجزیه می‌کنیم.



شکل ۴-۷۷

$$\bar{F}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{-P}{1} \right) 12 \\ \frac{-1}{12} \left(\frac{-P}{1} \right) 12 \times 12^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{-P}{1} \right) 12 \\ \frac{1}{12} \left(\frac{-P}{1} \right) 12 \times 12^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ 24P \\ -P \\ -24P \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}_1^{(2)} = \frac{-12P}{0} \left(\frac{\bar{x}_r^{(2)} - \bar{x}}{\bar{x}_r^{(2)} - \bar{x}_1^{(2)}} \right) = \frac{-12P}{0} \left(\frac{10 - 10/2}{10} \right) = \frac{-12P}{10}$$

$$\bar{Q}_2^{(2)} = \frac{-16P}{0} [1 - 2(0.5)^2 + 2(0.5)^3] = \frac{-16P}{10}$$

$$\bar{Q}_3^{(2)} = \frac{-16P}{0} \left[-\frac{10}{2} (1 - 0.5)^2 \right] \times 12 = 72P$$

$$\bar{Q}_4^{(2)} = \frac{-12P}{0} \left(\frac{\bar{x} - \bar{x}_1^{(2)}}{\bar{x}_r^{(2)} - \bar{x}_1^{(2)}} \right) = \frac{-12P}{0} \left(\frac{10/2 - 0}{10} \right) = \frac{-12P}{10}$$

$$\bar{Q}_5^{(2)} = \frac{-16P}{0} [2(0.5)^2 - 2(0.5)^3] = \frac{-16P}{10}$$

$$\bar{Q}_6^{(2)} = \frac{-16P}{0} \left[\frac{-10}{2} (0.5^2 - 0.5) \right] \times 12 = -72P$$

بنابراین ماتریس بار المان اول در سیستم Z-X عبارت است از:

$$F^{(1)} = \begin{bmatrix} P \\ \cdot \\ 24P \\ P \\ \cdot \\ -24P \end{bmatrix}$$

در گره (۲) مجموع مولفه‌های نیرو و گشتاور خارجی در سیستم عمومی Z-X برای المانهای (۱) و (۲) عبارت خواهند بود از:

$$F_x = \frac{-12P}{10} \times \frac{12}{10} + \frac{16P}{10} \times \frac{9}{10} + P = P$$

$$F_Z = \frac{-12P}{10} \times \frac{9}{10} - \frac{16P}{10} \times \frac{12}{10} - 2P = -\xi P$$

$$M = 72P - 2\xi P = \xi 8P$$

شرایط مرزی لازم عبارت هستند از: $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = U_5 = U_6 = 0$

ماتریس سفتی و ماتریس بارسیستم با سوپرپوز سه سطر اول و سه ستون آخر المان ۱ با سه سطر و ستون المان ۲ بدست می آید.

$$10^6 \begin{bmatrix} 0.206 & 0.2666 & -0.0178 \\ 0.2666 & 0.8846 & -0.0148 \\ -0.0178 & -0.0148 & 0.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_\xi \\ U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\xi \\ \xi 8 \end{bmatrix} P \Rightarrow$$

$$\begin{cases} U_\xi = 0.829 \times 10^{-4} P \text{ (in)} \\ U_0 = -0.781 \times 10^{-4} P \text{ (in)} \\ U_1 = 0.911 \times 10^{-4} P \text{ (in)} \end{cases} \rightarrow [Q]^{(e)} = [K]^{(e)}[u]^{(e)} - [f]^{(e)}$$

و با تبدیل معکوس می توان $[Q]^{(e)}$ را به سیستم محلی برگرداند؛ یعنی:

$$[\bar{Q}]^{(e)} = [R]^{(e)}[Q]^{(e)}$$

در مورد این مثال داریم:

$$[\bar{Q}]^{(1)} = \begin{bmatrix} 4.731 \\ 0.725 \\ -10.9 \\ -4.731 \\ 1.275 \\ 0.045 \end{bmatrix} P, \quad [\bar{Q}]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.458 \\ -0.180 \\ 21.500 \\ -1.458 \\ 0.180 \\ 10.870 \end{bmatrix}$$

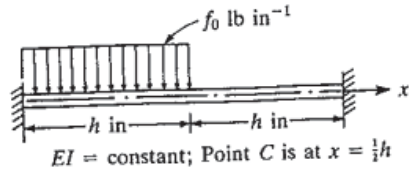
مسائل

مسائل ۵۶ تا ۷۱. برای تیرهای نشان داده شده در شکل‌های ۴-۶۱ تا ۴-۷۶، از المان تیر اولر-برنولی استفاده کرده و

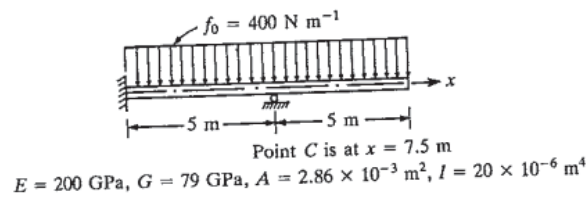
الف) ماتریس سفتی و نیروی سیستم؛

ب) جابجائی‌ها و نیروهای عمومی مشخص شده و شرایط تعادل؛

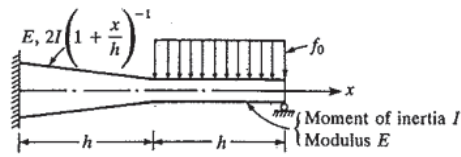
ج) معادلات ماتریسی به ازای مجهولات اولیه (جابجایی‌ها) و مجهولات ثانویه (نیروهای تعمیم یافته) را جداگانه تعیین نمایید. اگر کمتر از چهار جابجایی مجهول وجود داشته باشد، جابجایی‌ها را تعیین نموده و گشتاور خمشی $M^c = EI \frac{d^2x}{dx^2}$ در نقطه c را با استفاده از میانبایی المان محدود \square وقتی که معادلات حل نمی شوند، M^c را بر حسب مقادیر گرهی المان مناسب) ارزیابی نمایید. از حداقل تعداد المان‌های مورد نیاز در هر مساله استفاده نمایید.



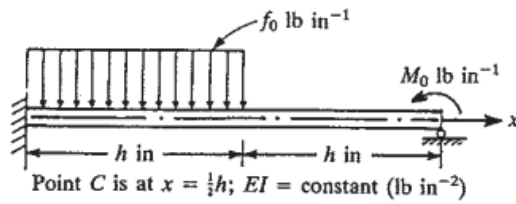
شکل ۷۳-ع



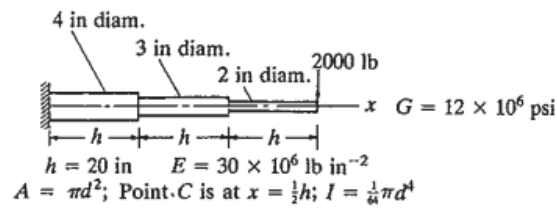
شکل ۷۴-ع



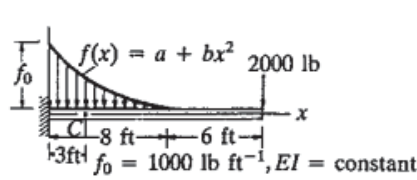
شکل ۷۵-ع



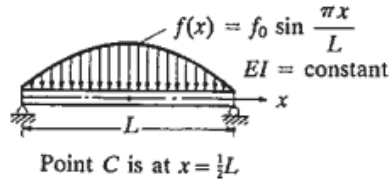
شکل ۷۶-ع



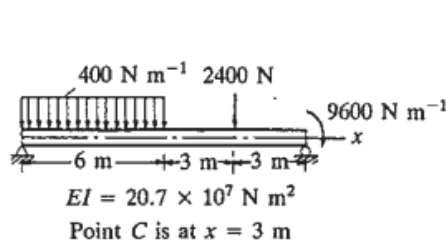
شکل ۷۷-ع



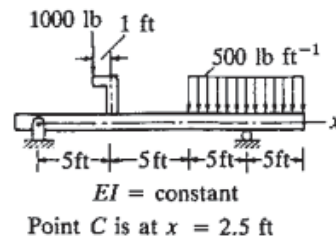
شکل ۷۹-ع



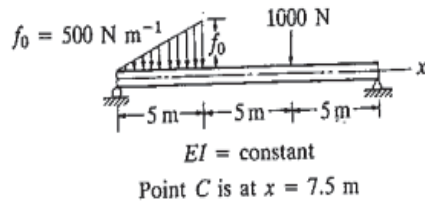
شکل ۷۸-ع



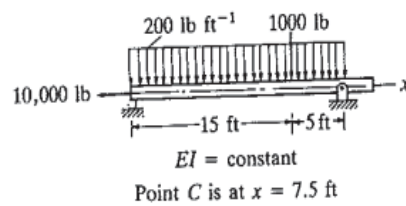
شکل ۸۱-ع



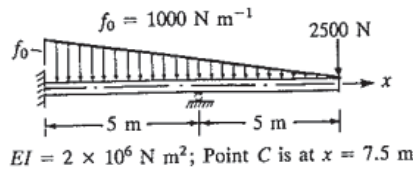
شکل ۸۰-ع



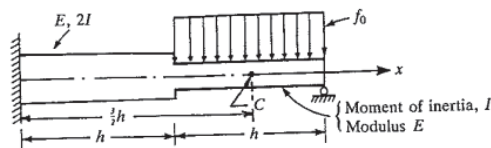
شکل ۸۳-ع



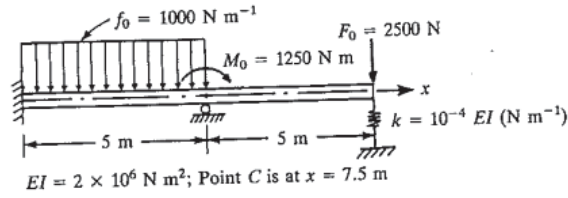
شکل ۸۲-ع



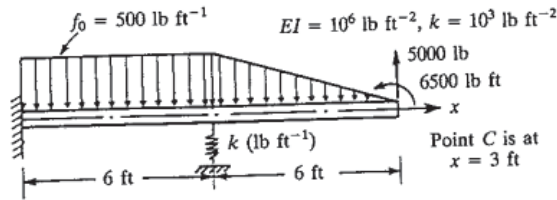
شکل ۸۴-ع



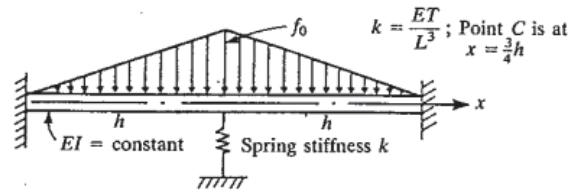
شکل ۸۵-ع



شکل ۸۶-۴



شکل ۸۷-۴



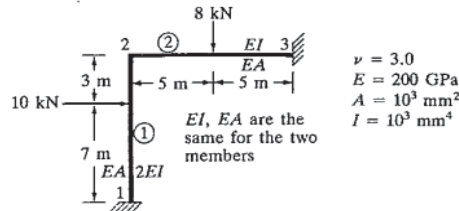
شکل ۸۸-۴

مسئله ۷۲. یک تیر با تکیه‌گاه‌های ساده را روی یک پی‌الاستیک (با مدول پی k) در معرض بارگذاری عرضی یکنواخت در نظر بگیرید. جابجایی عرضی در وسط تیر را با استفاده از یک المان تیر اولر-برنولی تعیین نمایید.

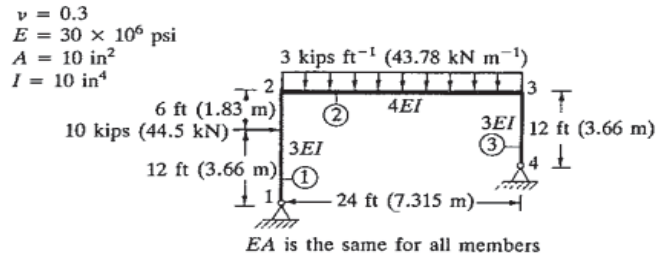
مسائل ۷۳ تا ۷۷. برای قاب‌های نشان داده شده در شکل‌های ۸۹-۴ تا ۹۳-۴، مطلوب است:

(الف) ماتریس‌های المانی دوران یافته؛ (ب) ماتریس المانی سفتی سیستم؛

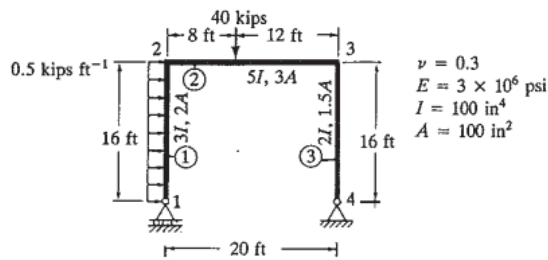
(ج) حل معادلات ماتریسی برای جابجایی‌ها و نیروهای تعمیم یافته مجهول.



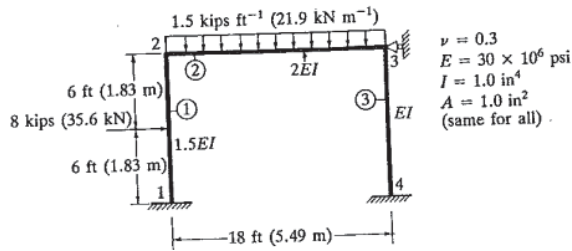
شکل ۸۹-۴



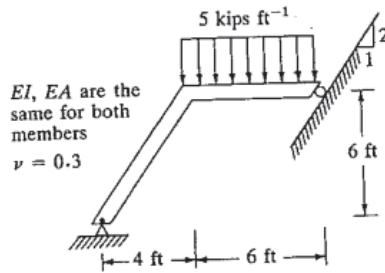
شکل ۹۰-ع



شکل ۹۱-ع



شکل ۹۲-ع



شکل ۹۳-ع

۴-۲ بیان دیگری برای معادلات جبری سیستم

همانطوریکه قبلاً مشاهده شد شکل قوی معادلات حاکم بر میله الاستیک تحت بارگذاری محوری عبارت است از:

$$\begin{aligned} a) \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + b &= \cdot & \cdot < x < l \quad (179-4) \\ b) \sigma(\cdot) = \left(E \frac{du}{dx} \right)_{x=0} &= -\bar{t} & N.B.C \quad (180-4) \\ c) u(l) &= \bar{u} & E.B.C \quad (181-4) \end{aligned}$$

برای تدوین معادلات المان محدود، معادلات دیفرانسیل را باید به فرم انتگرالی، معروف به «شکل ضعیف» مجدداً فرمول‌بندی کرد. در تحلیل تنش به این شکل ضعیف «معادله کار مجازی» هم می‌گویند. برای تبیین شکل ضعیف معادلات حاکم ابتدا معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی طبیعی را به ازای یک حل آزمایشی در یک تابع وزن اختیاری مثل $w(x)$ ضرب کرده و سپس روی دامنه مساله انتگرال می‌گیرند؛ بعبارت دیگر:

$$a) \int_0^l w \left[\frac{d}{dx} \left(AE \frac{d\bar{u}}{dx} \right) + b \right] dx = \cdot \quad \forall w \text{ where } w(l) = \cdot \quad (182-4)$$

$$b) (wA \left(E \frac{d\bar{u}}{dx} + \bar{t} \right))_{x=0} = \cdot \quad \forall w \quad (183-4)$$

در اینجا می‌توان تابع وزن را طوری انتخاب کرد که $w(l) = 0$ باشد (تابع وزن در مرز مربوط به شرایط مرزی لازم اینگونه انتخاب می‌شود). همچنین در روابط بالا فرض گردیده که $\bar{u}(x)$ تقریبی از حل دقیق □□□□ است که بعنوان حل آزمایشی در نظر گرفته می‌شود و حاصل انتگرال به گونه‌ای خواهد بود که \bar{u} نزدیکترین حالت به جواب دقیق می‌باشد و میزان خطا را کمینه خواهد کرد. بعبارت دیگر، حل آزمایشی‌ای که به ازای هر تابع هموار $w(x)$ (با شرط $w(l) = 0$) معادله بالا را ارضا می‌کند، یک جواب مجاز خواهد بود. این حل آزمایشی شرایط $\bar{u}(l) = \bar{u}$ را هم ارضا می‌کند. به طور مشابه یک تابع وزن هموار که در $E.B$ صفر باشد «تابع مجاز» می‌باشد.

بعنوان مثال اگر حل آزمایشی‌ای به صورت $\bar{u}^{(e)}(x) = \alpha^{(e)} + \alpha_1^{(e)} x$ که یک تابع کامل با پیوستگی C^0 است (المان خطی) را در نظر بگیریم با فرض مقدار جابجایی نظیر گره‌های (۱) و (۲) بترتیب برابر با $\bar{u}_1^{(e)}$ و $\bar{u}_2^{(e)}$ داریم:

$$\bar{u}^{(e)}(x_1^e) = \bar{u}_1^{(e)} = \alpha^{(e)} + \alpha_1^{(e)} x_1^e \quad (184-4)$$

$$\bar{u}^{(e)}(x_2^e) = \bar{u}_2^{(e)} = \alpha^{(e)} + \alpha_1^{(e)} x_2^e$$

بعبارت دیگر به صورت ماتریسی می‌توان نوشت:

$$\tilde{u}^{(e)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{(e)} \\ \alpha_2^{(e)} \end{bmatrix} = p(x)\alpha^{(e)} \quad (185-ع)$$

همچنین داریم:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1^{(e)} \\ \tilde{u}_2^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(e)} \\ 1 & x_2^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^{(e)} \\ \tilde{u}_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad d^{(e)} = M^{(e)}\alpha^{(e)} \quad (186-ع)$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$\alpha^{(e)} = (M^{(e)})^{-1}d^{(e)} \quad (187-ع)$$

بعبارت دیگر، هرگاه جابجایی های گرهی معلوم باشند می توان حل آزمایشی پیشنهادی را بجای تعریف بر حسب متغیر مستقل (x) بر حسب جابجایی های گرهی تعریف کرد. بنابراین ضرایب مجهول $\alpha_1^{(e)}, \alpha_2^{(e)}$ را می توان از رابطه بالا بر حسب جابجایی ها بدست آورد.

$$\tilde{u}^{(e)}(x) = p(x)\alpha^{(e)} = p(x)(M^{(e)})^{-1}d^{(e)} = N^{(e)}d^{(e)} = [N_1^{(e)} N_2^{(e)}] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^{(e)} \\ \tilde{u}_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad (188-ع)$$

که

$$N_1^{(e)} = \frac{x-x_2^{(e)}}{x_1^{(e)}-x_2^{(e)}} \quad , \quad N_2^{(e)} = \frac{x_1^{(e)}-x}{x_1^{(e)}-x_2^{(e)}} \quad (189-ع)$$

بعبارت دیگر:

$$\tilde{u}^{(e)}(x) = N_1^{(e)}\tilde{u}_1^{(e)} + N_2^{(e)}\tilde{u}_2^{(e)} = \sum_{I=1}^{n_{en}} (N_I^{(e)}(x) \tilde{u}_I^{(e)}) \quad (190-ع)$$

توابع $N_I^{(e)}$ که به توابع شکل المان معروفند دارای دو خاصیت زیر هستند:

$$N_I^{(e)}(x_j) = \delta_{IJ} \quad (191-ع)$$

$$\sum_{I=1}^{n_{en}} (N_I^{(e)}(x_j)) = 1 \quad (192-ع)$$

در شکل ضعیف معادلات، به مشتق اول حل آزمایشی و توابع وزن نیاز داریم:

$$\frac{d\tilde{u}^{(e)}}{dx} = \frac{d}{dx} (N^{(e)}d^{(e)}) = \frac{dN^{(e)}}{dx} d^{(e)} = \frac{dN_1^{(e)}}{dx} \tilde{u}_1^{(e)} + \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \tilde{u}_2^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^{(e)} \\ \tilde{u}_2^{(e)} \end{bmatrix} = B^{(e)}d^{(e)} \quad (193-ع)$$

در رابطه آخر

$$B^{(e)} = \left[\frac{dN_1^{(e)}}{dx} \quad \frac{dN_r^{(e)}}{dx} \right] = \left[\frac{-1}{l^{(e)}} \quad \frac{1}{l^{(e)}} \right] \quad (194-ع)$$

همانطور که قبلاً اشاره شد در روش گالرکین توابع وزن همان توابع شکل در نظر گرفته می‌شوند.

بنابراین خواهیم داشت:

$$w^{(e)}(x) = N^{(e)}(x)w^e, \quad \frac{dw^{(e)}(x)}{dx} = \frac{dN^{(e)}}{dx}w^e = B^{(e)}w^{(e)} \quad (195-ع)$$

حل آزمایشی روی کل دامنه را می‌توان بر حسب جابجایی‌ها بصورت زیر نوشت:

$$\tilde{u}(x)^{(e)} = u_1^{(e)}N^{(e)}_1(x) + u_r^{(e)}N^{(e)}_r(x) \quad (196-ع)$$

و به همین ترتیب

$$w(x) = w^{(e)}_1N^{(e)}_1(x) + w^{(e)}_rN^{(e)}_r(x) \quad (197-ع)$$

به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$\tilde{u}(x)^{(e)} = \sum_{e=1}^{n_{el}} d^{(e)}U^{(e)} = \left(\sum_{e=1}^{n_{el}} N^{(e)}L^{(e)} \right) d = Nd = \sum_{I=1}^{n_{ep}} N_I d_I \quad (198-ع)$$

به همین ترتیب برای تابع وزن هم داریم:

$$W = \sum_{e=1}^{n_{el}} N^{(e)}w^{(e)} = \left(\sum_{e=1}^{n_{el}} N^{(e)}L^{(e)} \right) W = Nw = \sum_{I=1}^{n_{ep}} N_I w_I \quad (199-ع)$$

بنابراین توابع شکل عمومی عبارتند از:

$$N = \left(\sum_{e=1}^{n_{el}} N^{(e)}L^{(e)} \right) \quad (200-ع)$$

با تعریف بالا

$$N^T = \sum L^{(e)T} N^{(e)T} \quad (201-ع)$$

به عنوان مثال برای یک مش بندی متشکل از دو المان خطی به شکل زیر توابع شکل عمومی عبارتند از:

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^{(1)} \\ \tilde{u}_r^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_r \\ u_r \end{bmatrix} = L^{(1)}d \quad (202-ع)$$

$$d^{(2)} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^{(2)} \\ \tilde{u}_r^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_r \\ u_r \end{bmatrix} = L^{(2)}d \quad (203-ع)$$

$$\begin{aligned}
 N &= N^{(s)}L^{(s)} + N^{(r)}L^{(r)} & (20.4-4) \\
 &= [N_1^{(s)} \quad N_2^{(s)}] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + [N_1^{(r)} \quad N_2^{(r)}] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \\
 &= [N_1^{(s)} \quad N_2^{(s)} + N_1^{(r)} \quad N_2^{(r)}]
 \end{aligned}$$

یعنی تعداد توابع شکل عمومی با تعداد گره‌ها برابر خواهد بود. برای تعیین معادله گسسته، شبکه‌ای (مشی) با دو المان خطی را در نظر بگیرید. شکل ضعیف معادلات حاکم به صورت ماتریسی عبارت است از:

$$\int_0^1 \left(\frac{dw}{dx} \right)^T A E \left(\frac{d\bar{u}}{dx} \right) dx - \int_0^1 w^T b dx - (w^T \bar{E} A)_{x=1} = 0 \quad (20.5-4)$$

انتگرال بالا را می‌توان روی کل دامنه با جمع انتگرال‌ها روی تمام دامنه‌های المانی جایگزین کرد:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \left\{ \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \left(\frac{dw^{(e)}}{dx} \right)^T A^{(e)} E^{(e)} \left(\frac{d\bar{u}^{(e)}}{dx} \right) dx - \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} w^{(e)T} b dx - (w^{(e)T} A^{(e)} \bar{E})_{x=2} \right\} = 0 \quad (20.6-4)$$

از طرف دیگر داشتیم:

$$\bar{u}^{(e)} = N^{(e)} d^{(e)} \quad \& \quad \frac{d\bar{u}^{(e)}}{dx} = B^{(e)} L^{(e)} \quad (20.7-4)$$

$$w^{(e)T} = w^{(e)T} N^{(e)T} \quad \& \quad \left(\frac{dw^{(e)}}{dx} \right)^T = w^{(e)T} B^{(e)T} \quad (20.8-4)$$

بنابراین با جایگذاری روابط بالا در شکل ضعیف خواهیم داشت:

$$\sum_{e=1}^{n_e} w^{(e)T} \left\{ \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} B^{(e)T} A^{(e)} E^{(e)} B^{(e)} dx d^{(e)} - \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} N^{(e)T} b dx - (N^{(e)T} A^{(e)} \bar{E})_{x=2} \right\} = 0 \quad (20.9-4)$$

در روابط بالا ماتریس سختی المان

$$K^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} B^{(e)T} A^{(e)} E^{(e)} B^{(e)} dx \quad (21.0-4)$$

و ماتریس بار المان:

$$f^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} N^{(e)T} b dx + (N^{(e)T} A^{(e)} \bar{E})_{T_2^{(e)}} \quad (21.1-4)$$

می‌باشند. با توجه به اینکه $W^{(e)} = L^{(e)} w^{(e)}$ و یا $W^{(e)T} = w^{(e)T} L^{(e)T}$ به شکل عمومی خواهیم داشت:

$$w^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} L^{(e)T} K^{(e)} L^{(e)} d - \sum_{e=1}^{n_e} L^{(e)T} f^{(e)} \right) = 0 \quad (21.2-4)$$

با توجه به اینکه $K = \sum_{e=1}^{n_{e1}} L^{(e)T} K^{(e)} L^{(e)}$ و $F = \sum_{e=1}^{n_{e1}} L^{(e)T} f^{(e)}$ به ترتیب ماتریس‌های سختی و بار سیستم هستند داریم:

$$W^T(Kd - F) = 0 \quad (213-ع)$$

با فرض $r = Kd - F$ (که r به باقیمانده معروف است) و با توجه به شکل مساله که $r_1 \neq 0$ و $w_1 = 0$ هستند داریم:

$$W^T r = w_r r_r + w_r r_r = 0 \quad (214-ع)$$

یعنی به ازای مقادیر دلخواه w_r و w_r باید $r_r = 0$ باشند. خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (215-ع)$$

که همان معادلات بدست آمده از بخش‌های قبل هستند. فقط بیان ماتریس سختی و بار کمی با بخش‌های قبلی متفاوت است.

به عنوان مثال برای یک المان دو گرهی (خطی) با سطح مقطع و مدول الاستیسیته ثابت داریم:

$$N^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{x_r^{(e)} - x}{x_r^{(e)} - x_1^{(e)}} & \frac{x - x_1^{(e)}}{x_r^{(e)} - x_1^{(e)}} \end{bmatrix} = \frac{1}{l^{(e)}} [(x_r^{(e)} - x) \quad (x - x_1^{(e)})] \quad (216-ع)$$

$$B^{(e)} = \frac{1}{l^{(e)}} [-1 \quad 1] \quad (217-ع)$$

$$K^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} B^{(e)T} A^{(e)} E^{(e)} B^{(e)} dx = \quad (218-ع)$$

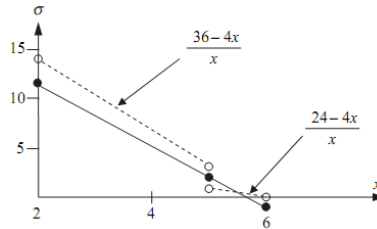
$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} \frac{1}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} A^{(e)} E^{(e)} \frac{1}{l^{(e)}} [-1 \quad 1] dx = \frac{A^{(e)} E^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

□ اگر $b(x) = N^{(e)} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ فرض شود

$$f^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} N^{(e)T} b dx = \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} N^{(e)T} N^{(e)} dx b = \frac{l^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (219-ع)$$

مثال ۳۶. میله الاستیک مخروطی شکل ۹۴-۹۵ را در نظر بگیرید و با انتخاب یک مش المان محدود متشکل از یک المان مرتبه دو حل تقریبی مساله و تنش در هر نقطه داخل میله را تعیین نمایید.

$$E = 10^8 \text{ Pa}, P_{x=0} = 24 \text{ N}, b = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



شکل ۹-۴ مقایسه نتایج المان محدود (خط پیوسته) با حل دقیق (خطوط نقطه چین).

برای المان مرتبه دوم توابع عبارتند از:

$$N_1^{(e)} = \frac{(x_r^{(e)} - x)(x_r^{(e)} - x)}{(x_r^{(e)} - x_1^{(e)})(x_r^{(e)} - x_2^{(e)})} = \frac{(x - \varepsilon)(x - \gamma)}{\lambda}, B_1^{(e)} = 1/\gamma(x - \varepsilon)$$

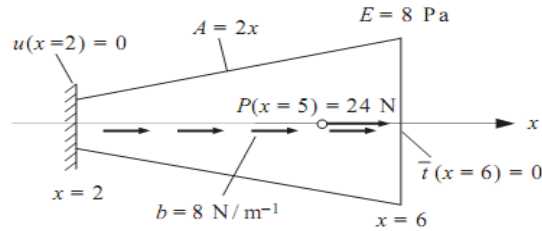
$$N_2^{(e)} = -1/\varepsilon(x - \gamma)(x - \gamma), B_2^{(e)} = 1/\gamma(\varepsilon - x)$$

$$N_3^{(e)} = (x - \gamma)(x - \varepsilon)/\lambda, B_3^{(e)} = (x - \gamma)/\varepsilon$$

در نتیجه ماتریس سفتی المان عبارت است از:

$$\begin{aligned} K^{(e)} &= K = \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} B^{(e)T} A^{(e)} E^{(e)} B^{(e)} dx \\ &= \int_{\gamma}^{\varepsilon} 1/\varepsilon \begin{bmatrix} x - \varepsilon \\ \lambda - \gamma x \\ x - \gamma \end{bmatrix} (\gamma x)(\lambda) 1/\varepsilon [x - \varepsilon \quad \lambda - \gamma x \quad x - \gamma] dx \\ &= \int_{\gamma}^{\varepsilon} \begin{bmatrix} x(x - \varepsilon)^2 & x(x - \varepsilon)(\lambda - \gamma x) & x(x - \varepsilon)(x - \gamma) \\ x(\lambda - \gamma x)(x - \varepsilon) & x(\lambda - \gamma x)^2 & x(\lambda - \gamma x)(x - \gamma) \\ x(x - \varepsilon)(x - \gamma) & x(\lambda - \gamma x)(x - \gamma) & x(x - \gamma)^2 \end{bmatrix} dx \\ &= \begin{bmatrix} 27.67 & -22 & 5.33 \\ \text{Sym.} & 10.33 & -53.33 \\ & & \varepsilon\lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\Omega} &= f_{\Omega}^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_r^{(e)}} N^{(e)T} b dx + (N^{(e)T} P)_{x=\varepsilon} \\ &= \int_{\gamma}^{\varepsilon} \begin{bmatrix} .120(x - \varepsilon)(x - \gamma) \\ -.20(x - \gamma)(x - \gamma) \\ .120(x - \gamma)(x - \varepsilon) \end{bmatrix} \times \lambda dx + \begin{bmatrix} .120(x - \varepsilon)(x - \gamma) \\ -.20(x - \gamma)(x - \gamma) \\ .120(x - \gamma)(x - \varepsilon) \end{bmatrix}_{x=\varepsilon} \times 2\varepsilon \\ f_{\Omega} &= \begin{bmatrix} 2.33 \\ 39.33 \\ 14.33 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



شکل ۹۴-۴

سیستم عمومی منتجه عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 26.17 & -22 & 0.23 \\ -22 & 80.23 & -0.23 \\ 0.23 & -0.23 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2.23 \\ 29.23 \\ 14.23 \end{bmatrix} \quad u_1 = 2.1193, \quad u_2 = 2.7044$$

بنابراین حل تقریبی این مساله عبارت است از:

$$\tilde{u}(x) = u_1 N_1^{(1)} + u_2 N_2^{(1)} + u_3 N_3^{(1)} = -0.198105x^2 + 2.24805x - 2.7044$$

$$\sigma(x) = E \frac{du}{dx} = -3.17x + 17.99$$

۲۱-۴ برنامه نویسی المان محدود

برای فهم مفاهیم بنیادین المان محدود، خیلی مفید (بلکه گاهی ضروری) است که اسکلت ساختار برنامه رایانه‌ای تحلیل المان محدود را درک کرد. مراحل اصلی در تحلیل المان محدود عبارتند از:

- (۱) خواندن داده‌های ورودی و اختصاص آرایه‌های مناسب؛
- (۲) محاسبه ماتریس‌ها و بردارهای المانی برای هر المان؛
- (۳) مونتاژ ماتریس‌ها و بردارهای المانی در قالب ماتریس و بردار سیستم؛
- (۴) اعمال شرایط مرزی به ماتریس و بردار سیستم؛
- (۵) حل معادله ماتریسی برای متغیرهای گرهی اولیه؛
- (۶) محاسبه متغیرهای ثانوی؛
- (۷) رسم یا چاپ نتایج مورد نظر.

در ادامه، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را به همراه شرایط مرزی آن در نظر می‌گیریم:

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + \beta \frac{du}{dx} + \gamma u = f(x), \quad 0 < x < L, \quad u(0) = u(L) = 0 \quad (220-4)$$

فرمول‌بندی شکل ضعیف این معادله عبارت است از:

$$\int^L \left\{ -\alpha \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + \beta w \frac{du}{dx} + \gamma w u \right\} dx = \int^L w f(x) dx - \left[\alpha w \frac{du}{dx} \right]^L \quad (221-ع)$$

با انتخاب توابع شکل خطی، ماتریس المانی برای المان e ام به شکل زیر در خواهد آمد:

$$[K]^{(e)} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(-\alpha \begin{bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} [N_1' \quad N_2'] + \beta \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} [N_1' \quad N_2'] + \gamma \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2] \right) dx \quad (222-ع)$$

که در آن علامت پریم نشان‌دهنده مشتق اول نسبت به x است. ارزیابی انتگرال نتیجه می‌دهد:

$$[K]^{(e)} = -\frac{\alpha}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\gamma l^{(e)}}{\gamma} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (223-ع)$$

از طرف دیگر، بردار بار المانی عبارت است از:

$$F^{(e)} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f(x) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} dx \quad (224-ع)$$

با فرض $f(x)=f$ این بردار برابر می‌شود با:

$$F^{(e)} = \frac{f l^{(e)}}{\gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (225-ع)$$

ع-۲۱-۱ داده‌های ورودی

پارامترهای ورودی اصلی در برنامه *FEA* عبارتند از:

- تعداد کل گره‌های سیستم؛
- تعداد کل المان‌های سیستم؛
- مختصات هر گره بر حسب سیستم مختصات عمومی؛
- انواع هر المان؛ شامل تعداد گره‌ها در هر المان و تعداد درجات آزادی هر گره؛
- اطلاعات مربوط به شرایط مرزی؛
- ضرایب α, β, γ و نیز f

اطلاعات مربوط به مش‌بندی را می‌توان از طریق یک پیش‌پردازنده و یا به صورت محاسبات دستی تعیین نمود. اگر از یک نوع المان در کل دامنه استفاده می‌شود نیازی به تعریف نوع المان برای تمام المانها نیست ولی در صورت استفاده از انواع مختلف، اطلاعات مربوط به هر المان برای المانهای مختلف مورد نیاز خواهد بود. در اینجا برای سادگی فقط از المانهای خطی استفاده می‌شود. برای مثال اگر از پنج اندازه مساوی از المانهای خطی استفاده کنیم تعداد کل گره‌ها $mnode=6$ و تعداد کل المانها $nel=5$ خواهند بود. چون مساله یک بعدی است هر گره فقط یک مختصه x دارد. اگر آرایه محتوی مقادیر مختصات *gcoord* نامیده شود آنگاه برای مساله‌ای با دامنه $0 < x < 1$ خواهیم داشت:

$$gcoord(1)=0,0; \quad gcoord(2)=0,2; \quad gcoord(3)=0,4;$$

$$gcoord(4)=0,6; \quad gcoord(5)=0,8; \quad gcoord(6)=1,0;$$

تعداد گره در هر گره $nrel=2$ و تعداد درجات آزادی هر گره $ndof=1$ می‌باشند. به این ترتیب تعداد درجات کل آزادی سیستم برابر است با:

$$Sdof=ndof*nnode$$

در کل، اطلاعات مربوط به نحوه اتصال گره‌ها برای هر المان یک ورودی به برنامه است. به این، «توپولوژی المان» هم گفته می‌شود. این اطلاعات برای ارزیابی ماتریس‌ها و بردارهای المانی و مونتاژ آنها مهم‌اند. در مساله یک بعدی اینجا با استفاده از المان‌های خطی، این اطلاعات را به سادگی می‌توان در برنامه ایجاد کرد. اگر شماره‌گذاری گره‌ها و المان‌ها از اولین گره تا آخرین گره به طور ترتیبی انجام بگیرد این شماره‌گذاری در آرایه‌ای به نام $nodes$ ذخیره سازی می‌شود. این آرایه دوبعدی است. اندیس اول شماره المان و اندیس دوم شماره گره‌های مربوط به المان را نشان می‌دهند. به عنوان مثال در حالت فرض شده در اینجا، i امین المان دارای دو گره i ام و $(i+1)$ ام خواهد بود. یعنی:

$$Nodes(i,1)=i+1 \quad nodes(i,2)=i+1 \quad \forall i=1,2,3,4,5$$

اطلاعات مربوط به شرایط مرزی شامل درجات آزادی گرهی و نیروهای خارجی (یا شارها) هستند. برای مشخص کردن درجات آزادی گرهی، باید شماره گره‌ها و درجات آزادی نظیر آنها را تعیین کنیم. به علاوه، مقادیر قیدی از پیش تعیین شده را باید داد. برای مساله فعلی، اطلاعات گره‌های مقید عبارتند از:

$$bcdof(1)=1, \quad bcdof(2)=6$$

یعنی $bcdof$ شماره‌های گرهی گره‌های مقید را در خود نگه می‌دارد. به عبارت دیگر سایر آرایه $bcdof$ دو است زیرا دو گره مقید وجود دارد و اولین و دومین شماره‌های گرهی مقید به ترتیب ۱ و ۶ هستند. مقادیر هر یک از درجات آزادی در آرایه $bcdof$ به صورت زیر خواهند بود:

$$bcval(1)=0,0, \quad bcval(2)=0,0$$

در اینجا مقدار اول مربوط به گره ۱ و مقدار دوم مربوط به گره ۶ است. برای محاسبه ماتریس المانی به ضرایب α ، β و γ نیاز است. برای این مساله $\alpha=1$ ، $\beta=-1$ و $\gamma=2$ فرض می‌شوند. همچنین برای محاسبه بردار المانی $f=1$ فرض می‌شود.

۴-۲۱-۲ موتاژ ماتریس‌ها و بردارهای المانی

پس از محاسبه ماتریس‌ها و بردارهای المانی، به اطلاعاتی نیاز است که جای ماتریس و بردار المانی را در ماتریس و بردار سیستم نشان بدهد. این اطلاعات از آرایه‌ای به نام $index$ به دست می‌آید که اندازه‌اش مساوی تعداد درجات آزادی هر المان (در اینجا ۲) است. چون هر گره یک درجه آزادی ($nodf=1$) دارد، اندازه آرایه $index$ مساوی آرایه $nods$ است.

برای المان i ام: $index(2)=i+1$ $index(1)=i$

مثال زیر موتاژ ماتریس‌ها و بردارهای المانی را نشان می‌دهد.

آرایه k و f را به عنوان ماتریس و بردار هر المان فرض کنید. اگر kk و ff ماتریس و بردار سیستم باشند، آرایه $index$ شامل درجات آزادی مربوط به المان خواهد بود. پس k و ff در kk و ff به صورت زیر ذخیره می‌شوند. این رویه برای المان‌های دیگر تکرار می‌شود.

```
edof=nnel*ndof;          % edof=number of degree of freedom per node
for ir=1:edof;          % loop for element rows
    irs=index(ir);      % address for the system row
    ff(irs)=f(ir);      % assembly into the system vector
for ic=1:edof;          % loop for element columns
    ics=index(ic);      % address for the system column
    kk(irs,ics)=kk(irs,ics)+k(ir+ic) %assembly into system matrix
end                      %end of row loop
end                      %end of column loop
```

۴-۲۱-۳ اعمال قیود

اگر قیدی به درجه آزادی n ام در معادله ماتریسی اعمال شود، معادله n ام در ماتریس با معادله قید جایگزین خواهد شد. مثال زیر الگوریتم اعمال قیود را به گونه‌ای که تقارن ماتریس سیستم را خراب نکند نشان می‌دهد.

```
for ic=1:2              % loop for two constraints
    id=bc dof(ic);      % extract the degree of freedom for constraint
    val=bceval(ic);     % extract the corresponding constrained value
    for i=1:sdof;       % loop for number of equation in system
        ff(i)=ff(i)-val*kk(i,id); % modify column using constrained value
        kk(id,i)=0;     % set all the idth row to zero
        kk(i,id)=0;     % set all the idth column to zero
    end
end
```

```

end
kk(id,id)=1;      % set the idth diagonal to unity
ff(id)=val;      % put the constrained value in the column
end

```

به مجرد اصلاح معادله ماتریسی سیستم، برای تعیین مجهولات گرهی اولیه حل می‌شود. در متلب حل را می‌توان به صورت زیر انجام داد:

```

u=kk\ff;

```

که kk معادله ماتریسی اصلاح شده است. پس از تعیین متغیرهای گرهی اولیه (u) شرایط مرزی طبیعی (متغیرهای ثانوی) از رابطه مقابل پیدا می‌شوند.

```

ff=kk*u

```

مثال: اگر ضرایب در معادله دیفرانسیل مرجع $\alpha=1$ ، $\beta=-3$ و $\gamma=2$ فرض شوند و $f(x)=1$ در نظر گرفته شود برای دامنه $0 \leq x \leq 1$ و با پنج المان خطی مساوی معادله را به روش المان محدود حل نمایید.

برنامه کامپیوتری نوشته شده به زبان متلب و نتایج آن به شرح زیر می‌باشند.

```

%-----
% EXr.o,m
% to solve the ordinary differential equation given as
% au''+bu'+cu=1, 0<x<1
% u(0) = 0 and u(1) = 0
% using o linear elements
%
% Variable descriptions
% k = element matrix
% f = element vector
% kk = system matrix
% ff = system vector
% index = a vector containing system dofs associated with each element
% bcdof = a vector containing dofs associated with boundary conditions
% bcval = a vector containing boundary condition values associated with
%         the dofs in bcdof
%-----
%
%-----
% input data for control parameters
%-----
nel=5;      % number of elements
nnel=2;     % number of nodes per element
ndof=1;     % number of dofs per node
nnode=10;  % total number of nodes in system
sdof=nnode*ndof; % total system dofs
%

```



```

%-----
% input data for nodal coordinate values
%-----
gcoord(1)=1; gcoord(2)=0; gcoord(3)=0;
gcoord(4)=0; gcoord(5)=1; gcoord(6)=0;
%
%-----
% input data for nodal connectivity for each element
%-----
nodes(1,1)=1; nodes(1,2)=2; nodes(2,1)=2; nodes(2,2)=3; nodes(3,1)=3;
nodes(3,2)=4; nodes(4,1)=4; nodes(4,2)=5; nodes(5,1)=5; nodes(5,2)=6;
%
%-----
% input data for coefficients of the □□E
%-----
acoeff=1; % coefficient 'a' of the diff eqn
bcoeff=-2; % coefficient 'b' of the diff eqn
ccoeff=2; % coefficient 'c' of the diff eqn
%
%-----
% input data for boundary conditions
%-----
bcdof(1)=1; % first node is constrained
bcval(1)=0; % whose described value is 0
bcdof(2)=2; % 2th node is constrained
bcval(2)=0; % whose described value is 0
%
%-----
% initialization of matrices and vectors
%-----
ff=zeros(s dof); % initialization of system force vector
kk=zeros(s dof\ s dof); % initialization of system matrix
index=zeros(nnel*ndof); % initialization of index vector
%
%-----
% computation of element matrices and vectors and their assembly
%-----
for iel=1:nel % loop for the total number of elements
%
nl=nodes(iel); nr=nodes(iel); % extract nodes for (iel)-th element
xl=gcoord(nl); xr=gcoord(nr); % extract nodal coord values
eleng=xr-xl; % element length
index=feeldof(iel:nel:ndof); % extract system dofs associated
%
k=feodevl(acoeff\bcoeff\ccoeff\eleng); % compute element matrix
f=fevl(xl\xr); % compute element vector

```

```

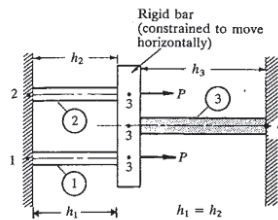
kk=feasmbly(kk,ff,if,index); % assemble element matrices and vectors
%
end % end of loop for total elements
%
%-----
% apply boundary conditions
%-----
kk=feaplyc(kk,ff,bcdof,bcval);
%
%-----
% solve the matrix equation
%-----
fsol=kk\ff;
%
%-----
% analytical solution
%-----
c1=0.5*exp(x);
c2=0.5*(1+1*exp(x));
for i=1:nnode
x=gcoord(i);
esol(i)=c1*exp(x)+c2*exp(x)+1/2;
end
%-----
% print both exact and fem solutions
%-----
num=1:nndof;
results=[num' fsol esol'];
%
%-----

```

ع-۲۱-ع اتصال المانها

اگر تناظر بین شماره‌های گرهی المانی با شماره‌های گرهی عمومی معلوم باشد می‌توان ضریب عمومی مونتاژ شده را بر حسب ضرایب المانی نوشت. این تناظر را می‌توان به صورت ماتریس $[B]$ معروف به ماتریس اتصال (*connectivity matrix*) بیان کرد که ضرایب b_{ij} آن معنی زیر را می‌دهند:

b_{ij} شماره گرهی عمومی نظیر j زمین گره از المان i است.



شکل ع-۹۶-هندسه و مش المان محدود یک سازه میله‌ای

مثال ۳۹) برای سازه نشان داده شده در شکل ۹۶-۴ زیر ماتریس $[B]$ از مرتبه ۳×۳ (۳ المان و ۲ گره در هر المان) است.

$$[B] = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$k_{۱۱} = k_{۱۱}^۱, k_{۱۲} = ۰, k_{۱۳} = k_{۱۲}^۱, k_{۱۴} = k_{۱۳}^۱ = ۰, k_{۲۱} = ۰, k_{۲۲} = k_{۲۲}^۱, k_{۲۳} = k_{۲۳}^۱$$

$$k_{۲۴} = k_{۲۴}^۱ = ۰, k_{۳۱} = k_{۳۱}^۱, k_{۳۲} = k_{۳۲}^۱, k_{۳۳} = k_{۳۳}^۱$$

$$k_{۳۴} = k_{۳۴}^۱ + k_{۳۴}^۲ + k_{۳۴}^۳, k_{۴۱} = k_{۴۱}^۱, k_{۴۲} = k_{۴۲}^۱$$

$$f_۱ = f_۱^۱, Q_۱ = Q_۱^۱$$

$$f_۲ = f_۲^۱, Q_۲ = Q_۲^۱$$

$$f_۳ = f_۳^۱ + f_۳^۲ + f_۳^۳, Q_۳ = Q_۳^۱ + Q_۳^۲ + Q_۳^۳$$

$$f_۴ = f_۴^۱, Q_۴ = Q_۴^۱$$

۲۲-۴ روش وردشی ریتز (Ritz Variational Method: RVM)

علاوه بر روش‌های باقی‌مانده وزنی (WRM)، روش وردشی ریتز یکی دیگر از ملاک‌های بهینه‌سازی در FEA است. این روش معمولاً زمانی قابل اعمال است که برای مسأله فیزیکی بتوان یک تابعی (functional) تعریف نمود. برای استخراج شکل وردشی، معادله دیفرانسیل عمومی را در اولین وردش u ضرب کرده و روی حوزه تعریف مسأله انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{\Omega} \delta u \left[\alpha \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{du}{dx} \right) + \beta u - f \right] dx = ۰ \quad (۲۲۶-۴)$$

$$\int_{\Omega} \delta u \left[\alpha \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{du}{dx} \right) \right] dx + \int_{\Omega} \delta u (\beta u - f) dx = ۰ \quad (۲۲۷-۴)$$

با انتگرال‌گیری جز به جز از اولین عبارت طرف چپ، خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} \alpha \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + \int_{\Omega} \beta u \delta u dx - \int_{\Omega} f \delta u dx - \delta u \left(\alpha \frac{du}{dx} \right)_{\Omega} = ۰ \quad (۲۲۸-۴)$$

معادله (۲۲۸-۴) شکل ضعیف یا وردشی معادله دیفرانسیل عمومی است. با توجه به روش‌های حساب وردش‌ها می‌توان نوشت:

$$\delta \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \alpha \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta u^2 - fu \right] dx - u \left(\alpha \frac{du}{dx} \right)_{\Omega} \right\} = 0 \quad (229-4)$$

به این ترتیب یک کمیت انتگرالی پیدا شد که اولین وردش آن صفر است و آن تابعی از $\pi(u)$ است:

$$\pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\alpha \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \beta u^2 \right] dx - \int_{\Omega} fu dx - u \left(\alpha \frac{du}{dx} \right)_{\Omega} \quad (230-4)$$

که

$$\pi \delta(u) = 0 \quad (231-4)$$

۴-۲۲-۱ تقریب ریتز

الف) با استفاده از شکل ضعیف: تقریب ریتز را می‌توان مستقیماً برای معادله (۲۲۸-۴) یعنی شکل ضعیف معادله دیفرانسیل به کار گرفت. هرگاه حل آزمایشی به صورت زیر فرض شود:

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^n a_j N_j + N. \Rightarrow \delta \tilde{u} = \sum_{i=1}^n \delta a_i N_i \quad (232-4)$$

از قرار دادن روابط ۲۳۲-۴ در ۲۲۸-۴ داریم:

$$\sum_{i=1}^n \delta u_i \left\{ \int_{\Omega} \left[\alpha \frac{dN_i}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j \frac{dN_j}{dx} + \frac{dN.}{dx} \right) + \beta N_i \left(\sum_{j=1}^n u_j N_j + N. \right) + N_i f \right] dx - N_i \left(\alpha \frac{d\tilde{u}}{dx} \right)_{\Omega} \right\} = 0 \quad (233-4)$$

چون δu_i وردشهای اختیاری از u_i بوده و u_i ها بطور خطی مستقلند، لذا ضرایب δu_i به ازای $i=1, 2, \dots, n$ باید صفر باشند. به این ترتیب پس از مرتب کردن جملات، n معادله برای پارامتر u_j به دست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} \left(\alpha \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + \beta N_i N_j \right) dx \right] a_j - \int_{\Omega} \left(N_i f - \alpha \frac{dN_i}{dx} \frac{dN.}{dx} - \beta N_i N. \right) dx - N_i \left(-\alpha \frac{du}{dx} \right)_{\Omega} = 0 \quad (234-4)$$

معادلات (۲۳۴-۴) به شکل اندیسی عبارتند از:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} u_j - F_i = 0 \quad (235-4)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \left(\alpha \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + \beta N_i N_j \right) dx \quad (236-4)$$

$$F_i = \int_{\Omega} \left(N_i f - \alpha \frac{dN_i}{dx} \frac{dN.}{dx} - \beta N_i N. \right) dx - N_i \left(-\alpha \frac{du}{dx} \right)_{\Omega} \quad (237-4)$$

به مجرد انتخاب N_i و N_j ، ضرایب ماتریس سفتی $[K]$ و بردار بار $[F]$ را می‌توان محاسبه کرد. سپس معادلات جبری خطی (۲۳۵-۴) را برای ضرایب u_j حل نمود و در نتیجه حل تقریبی مساله را به دست آورد.

ب) با استفاده از تابعی: در عبارت تابعی $\pi(u)$ به جای u حل آزمایشی \tilde{u} را قرار می‌دهیم. چون N_j ها عبارات معلومی از x هستند لذا انتگرال را نسبت به متغیر x می‌توان محاسبه کرد. نتیجه آن است که π در نهایت به صورت تابع معلومی از پارامترهای u_i در می‌آید:

$$\Pi[\tilde{u}(x, a)] = \Pi(a) \quad (238-4)$$

و مساله از حوزه آنالیز تابعی به حوزه متداول حساب انتقال می‌یابد. حال Π را می‌توان با شرط موسوم حساب دیفرانسیل پایدار ساخت. یعنی $d\Pi = 0$. بنابراین:

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial u_n} du_n = 0 \quad (239-4)$$

چون هر کدام از a_j ها را می‌توان مستقلاً تغییر داد، لذا در معادله (۱۱) ضرایب da_j باید جداگانه صفر شوند؛ یعنی:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (240-4)$$

در این حالت نیز همانند اعمال تقریب ریتز روی شکل ضعیف معادله دیفرانسیل، دستگاهی با n معادله جبری برای n مجهول u_j به دست می‌آید.

مثال (۴۰) تابع $T(x)$ را با استفاده از روش ریتز به گونه‌ای بیابید که معادله یک بعدی پواسن زیر با شرایط مرزی مشخص شده ارضا شوند:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{Q}{K}, \quad 0 < x < l, \quad T(0) = T(l) = 0$$

حل آزمایشی مساله را به صورت یک چندجمله‌ای مرتبه دو در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{T} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

با قرار دادن شرایط مرزی در حل آزمایشی داریم:

$$\tilde{T} = \alpha_2 (x^2 - lx)$$

می‌توان نشان داد که تابعی معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$\Pi(T) = \int_0^l \left[\frac{1}{2} K \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 - QT \right] dx$$

با قرار دادن حل آزمایشی در تابعی مساله پس از انتگرال گیری داریم:

$$\Pi(\tilde{T}) = \frac{AK \alpha_r^\gamma l^\gamma}{\gamma} + \frac{A \alpha_r^\gamma Ql^\gamma}{\gamma}$$

که A سطح مقطع میله بوده و ثابت فرض می شود. حال باید a_r را به طوری به دست آورد که Π حداقل شود یعنی:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_r} = \frac{\gamma AK a_r l^\gamma}{\gamma} + \frac{A Q l^\gamma}{\gamma} = 0 \Rightarrow a_r = -\frac{Q}{\gamma K}$$

بنابراین حل آزمایشی عبارت می شود از:

$$\tilde{T}(x) = \frac{Q(lx - x^\gamma)}{\gamma K}$$

که با حل حقیقی مساله منطبق است.

مثال ۴۱) معادله دیفرانسیل مرتبه دو زیر را همراه شرایط مرزی در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

حل تقریبی معادله را با استفاده از حل های آزمایشی زیر به دست آورید:

$$\tilde{u}(x, a) = a_1 x(1-x), \quad \tilde{u}(x, a) = a_1 x(l-x) + a_2 x^\gamma(l-x)$$

حل حقیقی معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$u(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(1)} - x$$

تابعی متناظر مساله به شکل زیر قابل استخراج است:

$$\pi(u) = \int_0^1 \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 - u^2 - \gamma ux \right] dx$$

به ازای حل آزمایشی اول تابعی به صورت زیر به دست می آید:

$$I = \int_0^1 [a_1^2(1-x)^2 - a_1^2(x-x^\gamma)^2 - \gamma x a_1(x-x^\gamma)^2] dx = \frac{1}{3} a_1^2 - \frac{1}{3\gamma} a_1^2 - \frac{1}{\gamma} a_1$$

در این حالت $I(a_1)$ وقتی حداقل می شود که:

$$\frac{dl}{da_1} = \frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{10}a_1 - \frac{1}{1} = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{0}{18}$$

که در این حالت حل آزمایشی عبارت خواهد شد از:

$$\tilde{u}(x) = \frac{0}{18}x(1-x)$$

برای حل آزمایشی دوم به همین روش خواهیم داشت:

$$\tilde{u}(x) = \frac{71}{369}x(1-x) + \frac{7}{81}x^2(1-x)$$

مسئله ۷۸) برای مساله هدایت حرارتی یک بعدی به معادله $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{q}{K}$ با شرایط مرزی $T(0) = T(l) = 0$ انتخاب حل آزمایشی زیر، با استفاده از روش ریتز مساله را حل نمایید:

$$\tilde{T} = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

حل آزمایشی به دست آمده را با حل حقیقی $T(x) = \frac{q(lx-x^2)}{2K}$ مقایسه کنید.

مسائل:

مسئله ۷۹) مساله قبل را با شرایط مرزی زیر حل کنید. $T(0) = 0, q(l) = -q_0$

مسئله ۸۰) با استفاده از روش ریتز حل معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -f, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

از حل آزمایشی زیر استفاده کنید:

$$\tilde{u} = a_1x(x-l) + a_2x^2(x-l)$$

مسئله ۸۱) صورت ضعیف معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید. حلی براساس روش ریتز با یک پارامتر پیدا کنید

$$-\frac{d}{dx}\left(u \frac{du}{dx}\right) + 1 = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \frac{du}{dx}(0) = 0, \quad u(1) = \sqrt{2}$$

برای حل یک پارامتری ریتز فرض کنید: $N_1 = 1-x, \quad N_2 = \sqrt{x}$

مسئله ۸۲) صورت ضعیف معادله دیفرانسیل زیر را همراه با شرایط مرزی داده شده پیدا کنید.

حلی براساس روش ریتز با یک پارامتر به دست آورید.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2w}{dx^2}\right) + P \frac{d^2w}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < l$$

$$w_{x=0,l} = 0, \quad \left(EI \frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=0,l} = 0$$

$$w = a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

برای حل یک پارامتری ریتز فرض کنید:

ع-۲۳ کوادراتور گوسی

بطور کلی، شکل ضعیف معادلات حاکم را نمی‌توان به فرم بسته انتگرالگیری کرد. بنابراین به انتگرالگیری عددی نیاز خواهد بود. کوادراتور گوسی یکی از کارآمدترین روش‌ها برای توابعی است که بصورت چندجمله‌ای یا نزدیک به آن هستند. فرمول‌های کوادراتور گوسی روی یک دامنه $[-1, 1]$ ارائه می‌شوند. برای انتگرالی بصورت

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (241-ع)$$

که در آن x روی دامنه $[a, b]$ تغییر می‌کند به یک تغییر متغیر یا نگاشت بصورت زیر نیاز است:

$$x = \frac{1}{\sqrt{c}}(a+b) + \frac{1}{\sqrt{c}}\xi(b-a), \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (242-ع)$$

$$x = x_1 N_1(\xi) + x_2 N_2(\xi) = a \frac{1-\xi}{\sqrt{c}} + b \frac{\xi+1}{\sqrt{c}} \quad (243-ع)$$

با تغییر متغیر بالا خواهیم داشت:

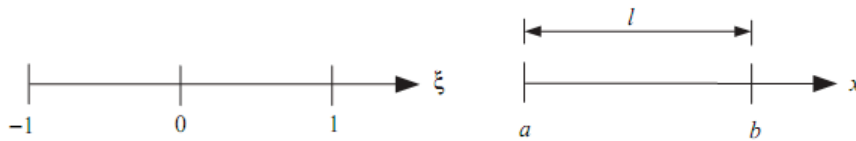
$$dx = \frac{1}{\sqrt{c}}(b-a)d\xi = \frac{l}{\sqrt{c}}d\xi = Jd\xi \quad (J: \text{ژاکوبین}) \quad (244-ع)$$

به این ترتیب

$$I = J \int_{-1}^1 f(\xi) dx = J \hat{I} \quad (245-ع)$$

در انتگرالگیری گوسی، انتگرال بصورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\hat{I} = w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + \dots = \underbrace{[w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n]}_{\text{وزنها } w^T} \underbrace{\begin{bmatrix} f(\xi_1) \\ f(\xi_2) \\ \vdots \\ f(\xi_n) \end{bmatrix}}_f = w^T f \quad (246-ع)$$



شکل ع-۹۷ نگاشت دامنه یک بعدی از دامنه فیزیکی $[\bar{a}, \bar{b}]$ دامنه طبیعی $[-1, 1]$

اگر $f(\xi)$ را به صورت یک چندجمله‌ای فرض کنیم

$$f(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = P(\xi)\alpha \quad (247-4)$$

به این ترتیب

$$\begin{cases} f(\xi_1) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_1^2 + \dots \\ f(\xi_2) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \dots \\ \vdots \\ f(\xi_r) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_r + \alpha_2 \xi_r^2 + \dots \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} f(\xi_1) \\ f(\xi_2) \\ \vdots \\ f(\xi_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \xi_r & \xi_r^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad f = M\alpha \quad (248-4)$$

$$\hat{I} = w^T f = w^T M \alpha \quad \text{و داریم:}$$

کوادراتورگوسی، وزن‌ها و نقاط انتگرالگیری‌ای را ارائه می‌کند که یک انتگرال دقیق از یک چندجمله‌ای از مرتبه معین را نتیجه می‌دهند.

برای تعیین وزن‌ها و نقاط کوادراتور از چندجمله‌ای $f(\xi)$ انتگرال می‌گیریم:

$$\hat{I} = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 1 d\xi & \int_{-1}^1 \xi d\xi & \int_{-1}^1 \xi^2 d\xi & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 & \dots \end{bmatrix} \alpha = \hat{P} \alpha \quad (249-4)$$

جدول ۴-۱۳

Position of Gauss points and corresponding weights.

n_{gp}	Location, ξ_i	Weights, W_i
1	0.0	2.0
2	$\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$	1.0
3	± 0.7745966692 0.0	0.555 555 5556 0.888 888 8889
4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.347 854 8451 0.652 145 1549
5	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0.0	0.236 926 8851 0.478 628 6705 0.568 888 8889
6	± 0.9324695142 ± 0.6612093865 ± 0.2386191861	0.171 324 4924 0.360 761 5730 0.467 913 9346

w_p و ξ_p طوری انتخاب می‌شوند که

$$w^T M \alpha = \hat{p} \alpha \quad \text{یا} \quad w^T M = \hat{p}^T \quad (20-4)$$

سیستم بالا یک سیستم از معادلات غیرخطی نسبت به ماتریس‌های مجهول w و M است. اگر در چندجمله‌ای مرتبه p در محاسبه انتگرال استفاده کنیم $p+1$ پارامتر (α) برای محاسبه وجود خواهد داشت. چون هر دو w, ξ قابل تنظیم هستند اگر تعداد نقاط گوسی n_{gp} باشد، $2n_{gp}$ پارامتر قابل تنظیم برای انتگرال گیری دقیق یک چندجمله‌ای از مرتبه p خواهیم داشت؛ لذا باید $2n_{gp} \geq (p+1)$ یا $n_{gp} \geq \frac{p+1}{2}$ باشد. مثلاً برای چندجمله‌ای مرتبه دو ($p=2$)، حداقل به دو نقطه گوسی ($n_{gp} = 2$) نیاز داریم. در جدول (4-13)، نقاط و وزن‌ها برای تعداد مختلف از نقاط گوسی ذکر شده‌اند.

مثال 4.2. انتگرال زیر را به روش کوادراتورگوسی محاسبه کنید.

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (x^3 + x^2) dx$$

چون بالاترین مرتبه موجود در تابع زیر انتگرال سه است داریم:

$$2n_{gp} - 1 = 3 \rightarrow n_{gp} = 2$$

$$\xi_1 = \xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad w_1 = w_2 \quad \text{در جدول (4-13) برای دو نقطه گوسی داریم:}$$

اگر $a = \frac{1}{3}$ و $b = \frac{1}{2}$ باشند:

$$x = \frac{1}{3}(a+b) + \frac{1}{3}\xi(b-a) = 2.0 - 1.0\xi$$

$$f(\xi) = (2.0 + 1.0\xi)^3 + (2.0 + 1.0\xi)^2 \quad \text{وبه این ترتیب داریم:}$$

$$I = \hat{I} = \frac{1}{2} w_1 [(2.0 + 1.0\xi)^3 + (2.0 + 1.0\xi)^2] + \frac{1}{2} w_2 [(2.0 + 1.0\xi)^3 + (2.0 + 1.0\xi)^2]$$

$$[(2.0 + 1.0\xi)^3 + (2.0 + 1.0\xi)^2] = 27.818 + 103.422\xi = 191.20$$

از طرف دیگر انتگرال دقیق برابر است با:

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (x^3 + x^2) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = 191.20$$

۴-۲۴ شکل‌های قوی و ضعیف برای مسایل میدانی چند بعدی

تعاریف

(۱) تعریف ماتریسی بردار:

$$\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} \equiv q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \quad (۲۵۱-۴)$$

(۲) بیان ماتریسی ضرب نقطه‌ای دو بردار:

$$\vec{q} \cdot \vec{r} = q_x r_x + q_y r_y \equiv q^T r = [q_x \quad q_y] \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = [r_x \quad r_y] \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = r^T \quad (۲۵۲-۴)$$

(۳) بیان ماتریسی گرادیان کمیت اسکالر:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) \text{ و } \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \nabla \theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (۲۵۳-۴)$$

(۴) بیان ماتریسی دیورژانس:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot (q_x \vec{i} + q_y \vec{j}) = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = \text{div} \vec{q} \quad (۲۵۴-۴)$$

(۵) قضیه گرین: اگر θ تابع عددی بصورت $\theta(x, y) \in C^1$ و انتگرال پذیر باشد آنگاه:

بیان برداری:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \theta d\Omega = \oint_{\Gamma} \theta \vec{n} d\Gamma \quad (۲۵۵-۴)$$

بیان ماتریسی:

$$\int_{\Omega} \nabla \theta d\Omega = \oint_{\Gamma} \theta n d\Gamma \equiv \begin{cases} \oint_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} \theta n_x d\Gamma \\ \oint_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial y} d\Omega = \oint_{\Gamma} \theta n_y d\Gamma \end{cases} \quad (۲۵۶-۴)$$

(۶) قضیه دیورژانس: اگر q تابع برداری مقدار و انتگرال پذیر باشد آنگاه:

بیان برداری:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} d\Omega = \oint_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (۲۵۷-۴)$$

بیان ماتریسی:

$$\int_{\Omega} \nabla^T q \, d\Omega = \oint_{\Gamma} q^T n \, d\Gamma \quad (258-4)$$

(7) می توان نشان داد با بیان برداری:

$$\int_{\Omega} w \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \, d\Omega = \oint_{\Gamma} w \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} w \cdot \vec{q} \, d\Omega \quad (259-4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (w \vec{q}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot (w q_x \vec{i} + w q_y \vec{j}) \quad \text{اثبات:}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial w}{\partial x} q_x + \frac{w \partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} q_y + \frac{w \partial q_y}{\partial y} \\ &= w \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} q_x + \frac{\partial w}{\partial y} q_y \right) \\ &= w \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \vec{\nabla} w \cdot \vec{q} \end{aligned}$$

پس:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (w \vec{q}) \, d\Omega = \int_{\Omega} w (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} w \cdot \vec{q} \, d\Omega$$

با اعمال قضیه دیورژانس به سمت چپ رابطه و مرتب کردن معادله بالا داریم:

$$\int_{\Omega} w (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) \, d\Omega = \oint_{\Gamma} w \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} w \cdot \vec{q} \, d\Omega \quad (260-4)$$

و یا به بیان ماتریسی:

$$\int_{\Omega} w \nabla^T q \, d\Omega = \oint_{\Gamma} w q^T n \, d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla w)^T q \, d\Omega \quad (261-4)$$

مثال 43. تئوری بنیادین حساب در یک بعد، حالت خاصی از رابطه گرین می باشد. از این تئوری داریم:

$$\int_{\Omega} \frac{d\theta}{dx} \, dx = (\theta n) \Big|_{\Gamma}$$

که n بردار یکه به سمت خارج مرز است بطوریکه در $n = -i$ $x = 0$ و در $n = i$ $x = L$ هستند. رابطه

$$\int_{\Omega} w (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) \, d\Omega = \oint_{\Gamma} w \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} w \cdot \vec{q} \, d\Omega$$

در حالت یک بعدی بصورت زیر خواهد بود:

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right) \, dx = (w q_x)_{x=L} - (w q_x)_{x=0} - \int_{\Omega} q_x \frac{\partial w}{\partial x} \, dx$$

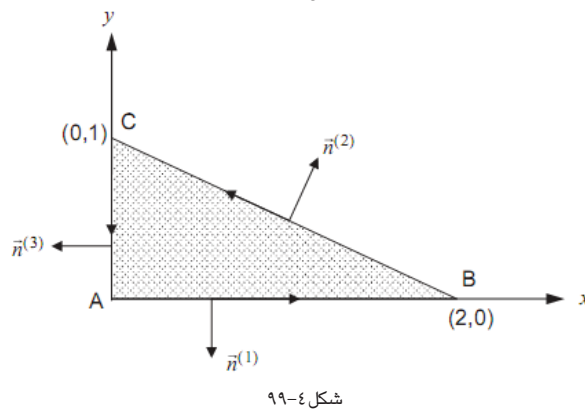
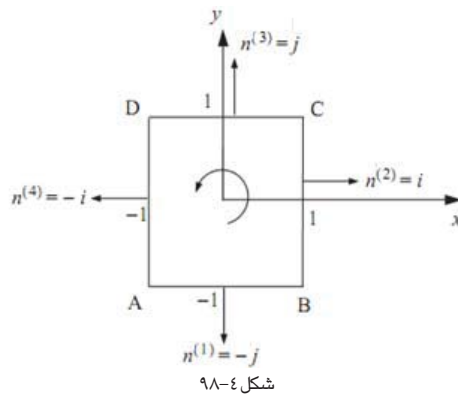
مثال ۴۴. یک دامنه مستطیلی مانند شکل ۹۸-۴ را در نظر بگیرید. تابع عددی $\theta = x^2 + 2y^2$ داده شده است. اگر \vec{q} گرادیان θ بصورت $\vec{q} = \vec{\nabla}\theta$ باشد، خطوط کانتور، خطوطی هستند که در امتداد آنها یک تابع ثابت است (است. a) بردار نرمال بر خط کانتور عبوری از نقطه $(0,0,0)$ را بیابید (b) قضیه دیورژانس را در مورد \vec{q} تحقیق کنید.

$$a) \vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\theta}{|\vec{\nabla}\theta|} = \left. \left(\frac{2x\vec{i} + 4y\vec{j}}{\sqrt{4x^2 + 16y^2}} \right) \right|_{(0,0,0)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$b) \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 2 + 4 = 6$$

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} d\Omega = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 6 dy \right) dx = 6$$

$$\oint_T \vec{q} \cdot \vec{n} dT = \int_{-1}^1 (-4y) dx + \int_{-1}^1 (2x) dy + \int_{-1}^1 (4y) dx + \int_{-1}^1 (-2x) dy = 6$$



مثال ۴۵. یک میدان برداری با مولفه‌های $q_x = 3x^2y + y^2$ و $q_y = 3x + y^2$ روی دامنه نشان داده شده در شکل ۹۹-۴ تعریف می‌شود. قضیه دیورژانس را تحقیق نمایید.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 3xy + 2y^2$$

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} d\Omega = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (3xy + 2y^2) dy \right) dx = 1.0$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Gamma &= \int_{AB} \vec{q} \cdot (-\vec{j}) d\Gamma + \int_{BC} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{CA} \vec{q} \cdot (-\vec{i}) d\Gamma \\ &= \int_0^1 (-3x) dx + \int_{BC} (q_x \vec{i} + q_y \vec{j}) \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j}) d\Gamma + \int_0^1 y^2 dy = 1.0 \end{aligned}$$

۹-۲۴-۱ شکل قوی

با استفاده از معادله توازن انرژی داریم: حرارت تولیدی = حرارت خروجی

بیان برداری:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - s = 0 \quad (۲۶۲-۴)$$

بیان ماتریسی:

$$\nabla^T \vec{q} - s = 0 \quad (۲۶۳-۴)$$

که $s(x, y)$ حرارت تولید شده بر واحد سطح است. قانون هدایت حرارت فوریه برای یک ماده همسانگرد دو بُعدی می‌گوید:

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T \quad (۲۶۴-۴)$$

با جایگذاری رابطه فوریه در معادله توازن انرژی می‌توان نوشت:

$$K \nabla^T T + s = 0 \quad (\text{معادله پواسون}) \quad (۲۶۵-۴)$$

$$\text{که } \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

قانون فوریه تعمیم یافته می‌گوید:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = -D \nabla T \quad (266-4)$$

به این ترتیب

$$\nabla^T (D \nabla T) + s = 0 \quad (267-4)$$

برای یک ماده همسانگرد $D = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = kl$ در هر نقطه از مرز، درجه حرارت یا شار عمودی (نرمال) باید تعیین شده باشند. برای یک ماده همسانگرد، شار نرمال (q_n) متناسب با گرادیان درجه حرارت در جهت نرمال و یا $q_n = -kn^T \nabla T$ می باشد. بنابراین شکل قوی برای هدایت حرارتی عبارت است از:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - s = 0 \quad (268-4) \quad \text{الف) توازن انرژی روی } \Omega$$

$$\vec{q} = -K \vec{\nabla} T \quad (269-4) \quad \text{ب) قانون فوریه روی } \Omega$$

$$q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = \bar{q} \quad (270-4) \quad \text{ج) شرایط مرزی طبیعی روی } \Gamma_q$$

$$T = \bar{T} \quad (271-4) \quad \text{د) شرایط مرزی لازم روی } \Gamma_T$$

شکل قوی با بیان ماتریسی برای هدایت حرارت عبارت است از:

$$\nabla^T q - s = 0 \quad (272-4) \quad \text{الف) توازن انرژی روی } \Omega$$

$$q = -D \nabla T \quad (273-4) \quad \text{ب) قانون فوریه روی } \Omega$$

$$q_n = q^T n = \bar{q} \quad (274-4) \quad \text{ج) شرایط مرزی طبیعی روی } \Gamma_q$$

$$T = \bar{T} \quad (275-4) \quad \text{د) شرایط مرزی لازم روی } \Gamma_T$$

s, D, \bar{T}, \bar{q} داده های مساله هستند

	1	constant
x	y	linear
x ²	xy	quadratic
x ³	x ² y	cubic
	xy ²	
	y ²	
	y ³	

شکل ۴-۱۰۰-۱ مثلث پاسکال در دو بعد

۴-۲۴-۴ شکل ضعیف معادلات

$$a) \int_{\Omega} w(\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - s) d\Omega = 0 \quad \forall w \quad (۲۷۶-۴)$$

$$b) \int_{\Gamma_q} w(\bar{q} - \vec{q} \cdot \vec{n}) d\Gamma = 0 \quad \forall w$$

با اعمال فرمول گرین

$$\int_{\Omega} w(\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) d\Omega = \oint_{\Gamma} w\vec{q} \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} w \cdot \vec{q} d\Omega$$

داریم:

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} w \cdot \vec{q}) d\Omega = \oint_{\Gamma} w\vec{q} \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} wsd\Omega \quad (۲۷۷-۴)$$

$$= \int_{\Gamma_q} w\vec{q} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_T} w\vec{q} \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} wsd\Omega \quad \forall w \in U.$$

چون روی $w=0, \Gamma_T$ و بر اساس (ب) $\int_{\Gamma_q} w\vec{q} \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_q} w\bar{q} d\Gamma$ لذا خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} w \cdot \vec{q}) d\Omega = \int_{\Gamma_q} w\bar{q} d\Gamma - \int_{\Omega} wsd\Omega \quad \forall w \in U. \quad (۲۷۸-۴)$$

در اینجا U مجموعه توابع همواری است که روی $E.B.C$ صفر می‌باشند. به شکل ماتریسی:

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^T q d\Omega = \int_{\Gamma_q} w\bar{q} d\Gamma - \int_{\Omega} wsd\Omega \quad \forall w \in U. \quad (۲۷۹-۴)$$

بنابراین باید $T \in U$ را طوری جستجو کرد که در معادله زیر صدق کند:

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^T D \nabla T d\Omega = - \int_{\Gamma_q} w\bar{q} d\Gamma + \int_{\Omega} wsd\Omega \quad \forall w \in U.$$

۴-۲۴-۴ حل‌های آزمایشی

برای کامل بودن چندجمله‌ای بکار رفته بعنوان تابع تقریب و در نتیجه همگرایی جوابها، می‌توان از مثلث دویبعدی پاسکال برای انتخاب جملات چندجمله‌ای استفاده کرد. بنابراین توابع تقریب عبارت خواهند بود

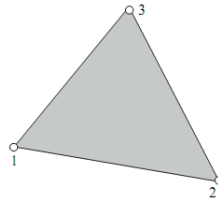
از:

$$\theta^e(x, y) = \alpha_0^{(e)} + \alpha_1^{(e)}x + \alpha_2^{(e)}y \quad \text{خطی}$$

$$\theta^e(x, y) = \alpha_0^{(e)} + \alpha_1^{(e)}x + \alpha_2^{(e)}y + \alpha_3^{(e)}x^2 + \alpha_4^{(e)}xy + \alpha_5^{(e)}y^2 \quad \text{درجه دو}$$

درجه سه

$$\theta^e(x, y) = \alpha_0^{(e)} + \alpha_1^{(e)}x + \alpha_2^{(e)}y + \alpha_3^{(e)}x^2 + \alpha_4^{(e)}xy + \alpha_5^{(e)}y^2 + \alpha_6^{(e)}x^3 + \alpha_7^{(e)}x^2y + \alpha_8^{(e)}y^3 + \alpha_9^{(e)}y^2x + \alpha_{10}^{(e)}y^3$$



شکل ۱-۱-۱۰ المان مثلثی سه گرهی

برای پیوستگی C^1 بین دو المان مثلثی مجاور هم با توابع تقریب

$$\theta^{(1)} = \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}x + \alpha_3^{(1)}y \quad \text{و} \quad \theta^{(2)} = \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)}x + \alpha_3^{(2)}y \quad (281-1)$$

باید $\theta^{(1)}(S) = \theta^{(2)}(S)$ باشد، یعنی $\alpha_i^{(1)}$ و $\alpha_i^{(2)}$ به دقت انتخاب شوند.

۲۵-۴ المان مثلثی سه گرهی

هرگاه برای حل آزمایشی یک المان مثلثی سه گرهی طبق شکل انتخاب شود تابع تقریب را می‌توان به

$$\theta^{(e)} = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x + \alpha_3^{(e)}y \quad \text{شکل انتخاب کرد.}$$

نامگذاری گره‌های محلی $I = 1, 2, 3$ و $(x_I^{(e)}, y_I^{(e)})$ طبق حرکت پادساعتگرد خواهد بود. تابع تقریب بصورت ماتریسی عبارتست از:

$$\theta^{(e)}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{(e)} \\ \alpha_2^{(e)} \\ \alpha_3^{(e)} \end{bmatrix} = p(x, y)\alpha^{(e)} \quad (282-1)$$

مقادیر گرهی در این حالت عبارتند از:

$$\begin{aligned} \theta^{(e)}(x_1^{(e)}, y_1^{(e)}) &= \theta_1^{(e)} = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x_1 + \alpha_3^{(e)}y_1 \\ \theta^{(e)}(x_2^{(e)}, y_2^{(e)}) &= \theta_2^{(e)} = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x_2 + \alpha_3^{(e)}y_2 \\ \theta^{(e)}(x_3^{(e)}, y_3^{(e)}) &= \theta_3^{(e)} = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x_3 + \alpha_3^{(e)}y_3 \end{aligned} \quad (283-1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_1^{(e)} \\ \theta_2^{(e)} \\ \theta_3^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(e)} & y_1^{(e)} \\ 1 & x_2^{(e)} & y_2^{(e)} \\ 1 & x_3^{(e)} & y_3^{(e)} \end{bmatrix} \Rightarrow d \begin{bmatrix} \alpha_1^{(e)} \\ \alpha_2^{(e)} \\ \alpha_3^{(e)} \end{bmatrix} \equiv d^{(e)} = M^{(e)}\alpha^{(e)} \quad (284-1)$$

و یا

$$\theta^{(e)}(x, y) = p(x, y)(M^{(e)})^{-1}d^{(e)} = N^{(e)}(x, y)d^{(e)} \quad (285-1)$$

که در آن

$$(M^{(e)})^{-1} = \frac{1}{\tau A^{(e)}} \begin{bmatrix} y_r^{(e)} - y_l^{(e)} & y_r^{(e)} - y_l^{(e)} & y_l^{(e)} - y_r^{(e)} \\ x_r^{(e)} - x_l^{(e)} & x_l^{(e)} - x_r^{(e)} & x_r^{(e)} - x_l^{(e)} \\ x_r^{(e)} y_l^{(e)} - x_l^{(e)} y_r^{(e)} & x_r^{(e)} y_l^{(e)} - x_l^{(e)} y_r^{(e)} & x_l^{(e)} y_r^{(e)} - x_r^{(e)} y_l^{(e)} \end{bmatrix} \quad (286-2)$$

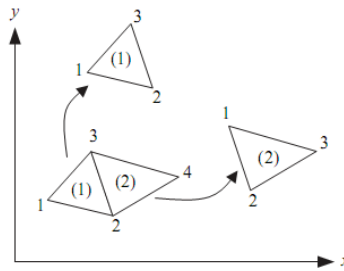
و $\tau A^{(e)} = \det M^{(e)}$

بنابراین توابع شکل این المان بصورت زیر همه عبارات خطی نسبت به x و y بوده و ضرایب آنها برحسب مختصات گرهی هستند:

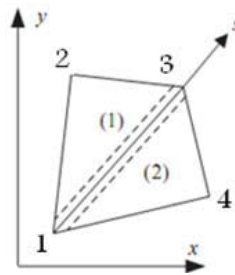
$$\begin{aligned} N_1^{(e)} &= \frac{1}{\tau A^{(e)}} (x_r^{(e)} y_l^{(e)} - x_l^{(e)} y_r^{(e)}) + (y_r^{(e)} - y_l^{(e)})x + (x_r^{(e)} - x_l^{(e)})y \\ N_2^{(e)} &= \frac{1}{\tau A^{(e)}} (x_r^{(e)} y_l^{(e)} - x_l^{(e)} y_r^{(e)}) + (y_l^{(e)} - y_r^{(e)})x + (x_l^{(e)} - x_r^{(e)})y \\ N_3^{(e)} &= \frac{1}{\tau A^{(e)}} (x_l^{(e)} y_r^{(e)} - x_r^{(e)} y_l^{(e)}) + (y_l^{(e)} - y_r^{(e)})x + (x_r^{(e)} - x_l^{(e)})y \end{aligned} \quad (287-2)$$

توابع شکل بالا هم میانیاب هستند؛ یعنی:

$$N_I^{(e)}(x_j^{(e)}, y_j^{(e)}) = \delta_{IJ} \quad (288-2)$$



شکل ۱۰۲-۲. مشی با دو المان مثلثی: شماره گذاری محلی و عمومی



شکل ۱۰۳-۲ پیوستگی بین دو المان مثلثی

۴-۲۶ تقریب عمومی و پیوستگی

حل‌های آزمایشی با یک ترکیب خطی از توابع شکل عمومی تقریب زده می‌شود

$$\theta^h = Nd = \sum_{l=1}^{nnp} N_l \theta_l \quad \left[N^T = \sum_{\theta=1}^{n_{el}} L^{(e)T} N^{(e)T} \right] \quad (289-4)$$

پیوستگی C: توابع شکل عمومی، در امتداد لبه مشترک بین دو المان مجاور را می‌توان بصورت زیر توصیف کرد: لبه مشترک المان‌های □□ و □□ یک معادله پارامتری برحسب پارامتر (s) چنان تعریف می‌شود که s=0 در گره □□ و s=1 در گره □□ برقرار باشد (شکل ۴-۱۰۲).

$$\begin{cases} x = x_r + (x_r - x_l)s \\ y = y_r + (y_r - y_l)s \end{cases} \quad (290-4)$$

چون توابع شکل در امتداد هر لبه خطی هستند، توابع دو المان □□ و □□ در امتداد لبه مشترک را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\theta^{(1)}(s) = \beta_1^{(1)} + \beta_1^{(1)}s, \quad \theta^{(2)}(s) = \beta_1^{(2)} + \beta_1^{(2)}s \quad (291-4)$$

برای توابعی از $\beta_i^{(e)}$ و $\alpha_i^{(e)}$ لذا از مختصات گرهی هستند. چون $\theta^{(1)}(s)$ در $s=0$ و $s=1$ باید به ترتیب با θ_l و θ_r برابر باشند لذا:

$$\theta_r = \beta_1^{(1)} \text{ و } \theta_l = \beta_1^{(1)} + \beta_1^{(1)}, \quad \theta_r = \beta_1^{(2)} \text{ و } \theta_l = \beta_1^{(2)} + \beta_1^{(2)} \quad (292-4)$$

و یا

$$\theta_r = \beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)}, \quad \beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)} = \theta_r - \theta_l \quad (293-4)$$

بنابراین هر دو تابع المان در امتداد فصل مشترک مساوی هستند و به تبع در تمام فصل مشترک پیوسته می‌باشند. این آرگومان برای تمام فصل مشترک‌ها در مش برقرار بوده و لذا این تقریب بطور کلی C است.

مشتقات توابع شکل برای المان مثلثی سه گرهی

$$\nabla \theta^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} \theta_1^{(e)} + \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial x} \theta_r^{(e)} + \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial x} \theta_r^{(e)} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} \theta_1^{(e)} + \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial y} \theta_r^{(e)} + \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial y} \theta_r^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_7^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_7^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_7^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_7^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^{(e)} \\ \theta_7^{(e)} \\ \theta_7^{(e)} \end{bmatrix} \quad (294-4)$$

یا

$$\nabla \theta^{(e)} = B^{(e)} d^{(e)} \quad (295-4)$$

و با توابع شکل بالا داریم:

$$B^{(e)} = \begin{bmatrix} \gamma_7^{(e)} - \gamma_1^{(e)} & \gamma_7^{(e)} - \gamma_1^{(e)} & \gamma_7^{(e)} - \gamma_1^{(e)} \\ x_7^{(e)} - x_1^{(e)} & x_7^{(e)} - x_1^{(e)} & x_7^{(e)} - x_1^{(e)} \end{bmatrix} \quad (296-4)$$

یعنی در هر المان $B^{(e)}$ ثابت است.

۲۷-۴ فرمول بندی المان محدود برای مسایل هدایت حرارتی ۲D

باید $T(x,y) \in U$ را طوری پیدا کرد که

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^T D \nabla T d\Omega = - \int_{\Gamma_q} w^T \bar{q} d\Gamma + \int_{\Omega} w^T s d\Omega \quad \forall w \in U. \quad (297-4)$$

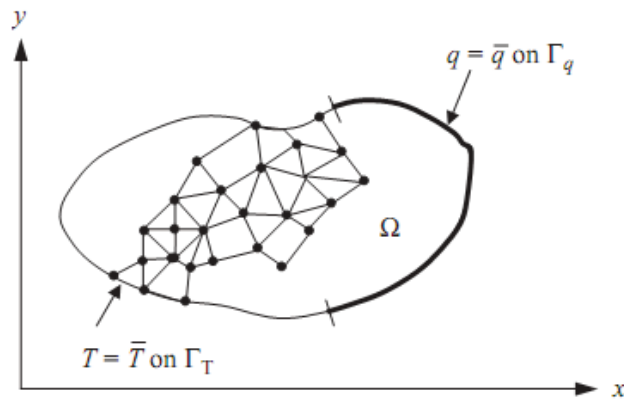
برقرار باشد.

$$D = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}, \nabla T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (298-4)$$

$$T(x,y) \approx T^{(e)}(x,y) = N^{(e)}(x,y) d^{(e)} = \sum_{l=1}^{n_{el}} N_l^{(e)}(x,y) T_l^{(e)} \quad (299-4)$$

$$w(x,y) \approx w^{(e)}(x,y) = N^{(e)}(x,y) w^{(e)} = \sum_{l=1}^{n_{el}} N_l^{(e)}(x,y) w_l^{(e)} \quad (300-4)$$

$$d^{(e)} = [T_1^{(e)} \quad T_7^{(e)} \quad \dots \quad T_{n_{en}}^{(e)}], w^{(e)} = [w_1^{(e)} \quad w_7^{(e)} \quad \dots \quad w_{n_{en}}^{(e)}] \quad \text{که}$$



شکل ۱۰-۴-۱

و

$$d^{(e)} = L^{(e)} d \Rightarrow \begin{cases} a) T^{(e)}(x, y) = N^{(e)}(x, y) L^{(e)} d \\ b) w^{(e)T}(x, y) = (N^{(e)}(x, y) w^{(e)})^T = w^T L^{(e)T} N^{(e)T}(x, y) \end{cases} \quad (3.1-4)$$

$$\nabla T^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{nen}^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{nen}^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} d^{(e)} = B^{(e)} L^{(e)} d \quad (3.2-4)$$

$$(\nabla w^{(e)})^T = (B^{(e)} w^{(e)})^T = w^{(e)T} B^{(e)T} = (L^{(e)} w)^T B^{(e)T} = w^T L^{(e)T} B^{(e)T} \quad (3.3-4)$$

$$w^T \left\{ \sum_{e=1}^{nel} L^{(e)T} \left[\int_{\Omega^{(e)}} B^{(e)T} D^{(e)} B^{(e)} d\Omega L^{(e)} d + \int_{\Gamma_q^{(e)}} N^{(e)T} \bar{q} d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} N^{(e)T} s d\Omega \right] \right\} = . \quad (3.4-4)$$

و ماتریس کنداکتانس المانی عبارت است از:

$$d = \begin{bmatrix} d_E \\ d_F \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} W_E \\ W_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ W_F \end{bmatrix} \quad (3.5-4)$$

$$K^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} B^{(e)T} D^{(e)} B^{(e)} d\Omega^{(e)} \quad (3.6-4)$$

ماتریس شار المان:

$$f^{(e)} = - \int_{\Gamma_q^{(e)}} N^{(e)T} \bar{q} d\Gamma + \int_{\Omega^{(e)}} N^{(e)T} s d\Omega \quad (3.7-4)$$

شکل ضعیف:

$$W^T \left[\left(\sum_{e=1}^{nel} L^{(e)T} K^{(e)} L^{(e)} \right) d - \left(\sum_{e=1}^{nel} L^{(e)T} f^{(e)} \right) \right] = . \quad (3.8-4)$$

$$W^T r = . \quad \forall W f \quad \text{و} \quad r = kd - f \quad (3.9-4)$$

ماتریس‌های عمومی بصورت زیر مونتاژ می‌شوند:

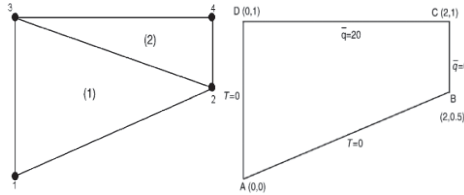
$$K = \sum_{e=1}^{nel} L^{(e)T} K^{(e)} L^{(e)} \quad f = \sum_{e=1}^{nel} L^{(e)T} f^{(e)} \quad (3.10-4)$$

$$W_F^T r_F + W_E^T r_E = . \xrightarrow{W_E = \cdot, W_F \text{ is arbitrary}} r = \begin{bmatrix} r_E \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_E & K_{EF} \\ K_{EF}^T & K_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_E \\ d_F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_E \\ f_F \end{bmatrix} \quad (3.11-4)$$

مثال ۴۶. برای شرایط شکل ۴-۱۰۵، دمای گره ۴ و شارهای حرارتی المان‌ها را محاسبه کنید.

$$D = k \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad k = \sigma w / C, \quad s = \tau w / m^r$$

$$B^{(e)} = \frac{1}{\tau A^{(e)}} \begin{bmatrix} (y_r^{(e)} - y_1^{(e)}) & (y_r^{(e)} - y_1^{(e)}) & (y_1^{(e)} - y_r^{(e)}) \\ (x_r^{(e)} - x_1^{(e)}) & (x_r^{(e)} - x_1^{(e)}) & (x_1^{(e)} - x_r^{(e)}) \end{bmatrix} \quad (3.12-4)$$



شکل ۱۰-۵-۴

$$\rightarrow \begin{cases} B^{(1)} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} -\dots & \dots & -\dots \\ -\sqrt{2} & \dots & \sqrt{2} \\ \dots & \dots & -\dots \end{bmatrix} \\ B^{(2)} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & -\dots \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{cases} \quad (313-4)$$

$$\sqrt{A}^{(e)} = (x_r^{(e)} y_r^{(e)} - x_r^{(e)} y_r^{(e)}) - (x_1^{(e)} y_1^{(e)} - x_r^{(e)} y_1^{(e)}) + (x_1^{(e)} y_r^{(e)} - x_r^{(e)} y_1^{(e)}) \rightarrow \begin{cases} A^{(1)} = \sqrt{2} \\ A^{(2)} = \sqrt{2} \end{cases} \quad (314-4)$$

چون $D^{(e)}=kI$ و $B=cte$ & $k=cte$ پس:

$$[K]^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} B^{(e)T} D^{(e)} B^{(e)} d\Omega^{(e)} = B^{(e)T} B^{(e)} k \int_{\Omega^{(e)}} d\Omega^{(e)} = k A^{(e)} B^{(e)T} B^{(e)} \quad (315-4)$$

$$[K]^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.2120 & -0.620 & -4.6870 \\ -0.620 & 1.20 & -0.620 \\ -4.6870 & -0.620 & 0.2120 \end{bmatrix} \begin{matrix} [Y] \\ [Z] \\ [X] \end{matrix} \quad (316-4)$$

$$[K]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & \dots \\ -1.0 & 1.0620 & -0.620 \\ \dots & -0.620 & 0.620 \end{bmatrix} \begin{matrix} [Y] \\ [Z] \\ [X] \end{matrix} \quad (317-4)$$

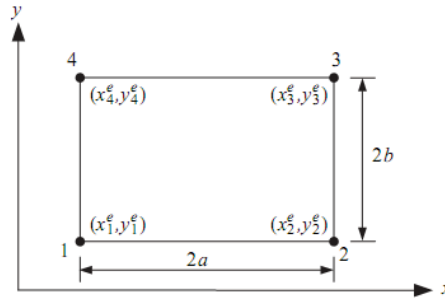
$$[K] = \begin{bmatrix} 0.2120 & -0.620 & -4.6870 & \dots \\ -0.620 & 1.20 & -0.620 & -1.0 \\ -4.6870 & -0.620 & 0.9370 & -0.620 \\ \dots & -1.0 & -0.620 & 1.0620 \end{bmatrix} \quad (318-4)$$

$$f_{\Omega}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} N^{(e)T} s d\Omega = s \int N^{(e)T} d\Omega = \frac{sA^{(e)}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{cases} f_{\Omega}^{(1)} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \\ X \end{bmatrix} \\ f_{\Omega}^{(2)} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \\ X \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow f_{\Omega} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \\ X \end{bmatrix} \quad (319-4)$$

$$f_{\Gamma_q}^{(e)} = - \int_{\Gamma_q^{(e)}} N^{(e)T} \bar{q} d\Gamma \quad (320-4)$$

$$\Rightarrow N^{(1)}|_{y=1} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots x \\ -\dots x + 1 \end{bmatrix} \quad (321-4)$$

$$f_{\Gamma}^{(1)} = -\sqrt{2} \int_{x=0}^{x=2} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots x \\ -\dots x + 1 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \dots \\ -2.0 \\ -2.0 \end{bmatrix} \Rightarrow f_{\Gamma} = \begin{bmatrix} \dots \\ -2.0 \\ -2.0 \end{bmatrix} \quad (322-4)$$



شکل ۴-۱۰۶

$$f_r + f_a + r = \begin{bmatrix} \gamma + r_x \\ \gamma + r_y \\ r_x - \gamma \\ -\gamma \end{bmatrix} \quad (۳۲۳-۴)$$

از حل معادلات عمومی داریم:

$$d^{(s)} = [0, 0, 0]^T, \quad d^{(r)} = [0, -1.788, 0]^T, \quad T_i = -1.788 \quad (۳۲۴-۴)$$

$$q^{(s)} = -kIB^{(s)}d^{(s)} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad q^{(r)} = \begin{bmatrix} ۴.۴۷ \\ ۱۲.۸۸ \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس‌های شار عبارتند از}$$

۴-۲۸ المان‌های مستطیلی چهارگره‌ای

چون المان چهارگره دارد لازم است با یک چندجمله‌ای با چهار پارامتر شروع کنیم؛ اما طبق مثلث پاسکال باید از ردیف سوم یکی از عبارات x^2 یا y^2 یا xy انتخاب شود تا چهار جمله در چندجمله‌ای داشته باشیم. اما کدام یک باید انتخاب شوند؟ جواب این است که چون انتخاب x^2, y^2 در امتداد لبه‌های مشترک که باید خطی باشند که پیوستگی را تضمین کند ایجاد غیرخطیت و ناپیوستگی می‌کنند لذا جمله xy انتخاب خواهد شد و داریم:

$$\theta^{(e)}(x,y) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x + \alpha_3^{(e)}y + \alpha_4^{(e)}xy \quad (۳۲۵-۴)$$

از روابط قبل می‌توان $\alpha_i^{(e)}$ را برحسب $\theta_i^{(e)}$ محاسبه کرد ولی محاسبه نمادین $(M^{(e)})^{-1}$ مشکل است. توابع شکل دوبعدی را می‌توان با ضرب تانسوری توابع شکل یک بعدی نیز به صورت زیر بدست آورد:

$$N_{[I,J]}^{(e)}(x,y) = N_I^{(e)}(x)N_J^{(e)}(y) \quad I=1,2, \quad J=1,2 \quad (۳۲۶-۴)$$

این توابع دارای خاصیت میانبایی هستند.

$$N_{[I,J]}^{(e)} = \bar{x}_M^{(e)} \bar{y}_L^{(e)} \square \square N_I^{(e)}(x_M) N_J^{(e)}(y_L) \square \delta_{IM} \delta_{JL} \quad (۳۲۷-۴)$$

جدول ۴-۱۴

K	I	J	$N_1^e(x_i^e)$	$N_2^e(x_i^e)$	$N_1^e(y_i^e)$	$N_2^e(y_i^e)$	2D: $N_K^e(x, y) = N_{[I, J]}^e(x, y)$
1	1	1	1	0	1	0	$N_1^e(x)N_1^e(y)$
2	2	1	0	1	1	0	$N_2^e(x)N_1^e(y)$
3	2	2	0	1	0	1	$N_2^e(x)N_2^e(y)$
4	1	2	1	0	0	1	$N_1^e(x)N_2^e(y)$

و یا

$$\begin{aligned}
 N_1^{(e)}(x, y) &= \frac{x-x_1^{(e)}}{x_1^{(e)}-x_r^{(e)}} \frac{y-y_1^{(e)}}{y_1^{(e)}-y_r^{(e)}} = \frac{1}{A^{(e)}}(x-x_r^{(e)})(y-y_1^{(e)}) \\
 N_r^{(e)}(x, y) &= \frac{-1}{A^{(e)}}(x-x_1^{(e)})(y-y_1^{(e)}) \\
 N_2^{(e)}(x, y) &= \frac{1}{A^{(e)}}(x-x_1^{(e)})(y-y_r^{(e)}) \\
 N_s^{(e)}(x, y) &= \frac{-1}{A^{(e)}}(x-x_r^{(e)})(y-y_r^{(e)})
 \end{aligned} \quad (۳۲۸-۴)$$

اگر در المانی لبهٔ مشترکی به صورت $x=y$ وجود داشته باشد از روابط بالا ملاحظه می‌شود که در امتداد آن لبه، N_i از درجهٔ دو بوده و شرایط پیوستگی دیگر ارضا نمی‌شود. یعنی توابع شکل بالا فقط برای حالت مش مستطیلی مناسبند و باید روش قدرتمندتری برای تعریف توابع شکل به کار بُرد.

۴-۲۹ المان چهار ضلعی چهار گرهی

در کوادراتور گوسی یک بعدی بازهٔ استاندارد $[-۱, ۱]$ تعریف شد و به بازهٔ فیزیکی نگاشته شد.

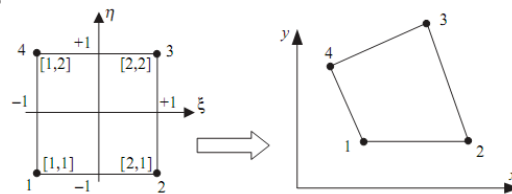
$$x = x_1^{(e)}N_1^{(e)}(\xi) + x_r^{(e)}N_r^{(e)}(\xi) = x_1^{(e)}\frac{1-\xi}{2} + x_r^{(e)}\frac{1+\xi}{2} \quad \xi \in [-۱, ۱] \quad (۳۲۹-۴)$$

به نام مختصهٔ طبیعی روی دامنهٔ المان والدین معروف است. اما ξ

$$\theta_1 \theta_1^{(e)} \frac{x-x_1^{(e)}}{x_1^{(e)}-x_r^{(e)}} \theta_1^{(e)} \frac{x-x_1^{(e)}}{x_r^{(e)}-x_1^{(e)}} \quad (۳۳۰-۴)$$

$$\theta_1 \theta_1^{(e)} \frac{x_1^{(e)}(1-\xi) + x_r^{(e)}(1+\xi) - 2x_1^{(e)}}{2(x_1^{(e)}-x_r^{(e)})} \theta_1^{(e)} \frac{x_1^{(e)}(1-\xi) + x_r^{(e)}(1+\xi) - 2x_r^{(e)}}{2(x_r^{(e)}-x_1^{(e)})}$$

$$\theta_1 \theta_1^{(e)} \frac{1-\xi}{2} \theta_1^{(e)} \frac{1+\xi}{2}$$



شکل ۴-۱۰۷

چون مختصات فیزیکی با همان توابع شکلی که برای تقریب به کار می‌روند نگاشته می‌شوند به این المانها، المان‌های ایزوپارامتریک می‌گویند. نگاشت مختصات فیزیکی به طبیعی:

$$x(\xi, \eta) = N^{\xi Q}(\xi, \eta) x^{(e)} \quad (321-4)$$

$$y(\xi, \eta) = N^{\eta Q}(\xi, \eta) y^{(e)} \quad (322-4)$$

هستند که در آنها

$$x^{(e)} = [x_1^{(e)} \quad x_2^{(e)} \quad x_3^{(e)} \quad x_4^{(e)}]^T \quad (323-4)$$

$$y^{(e)} = [y_1^{(e)} \quad y_2^{(e)} \quad y_3^{(e)} \quad y_4^{(e)}]^T \quad (324-4)$$

توابع شکل را می‌توان با جایگزین کردن (ξ, η) با (\bar{x}, \bar{y}) و مختصات گرهی در مختصات دامنه فیزیکی (\bar{x}_I, \bar{y}_I) با مختصات گرهی در المان طبیعی (ξ_I, η_I) در توابع شکل مستطیلی به دست آورد:

$$N_I^{\xi Q}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_I \xi) (1 + \eta_I \eta) \quad (325-4)$$

توابع شکل بالا دارای یک جمله ثابت و یک جمله برحسب ξ می‌باشند و اصطلاحاً تابع شکل دوخطی (bilinear) است. در این حالت حل آزمایشی به صورت

$$\theta^{(e)}(\xi, \eta) = N^{\xi Q}(\xi, \eta) d^{(e)} \quad (326-4)$$

خواهد بود. با نوشتن این حل برحسب α_i داریم:

$$\theta^{(e)}(\xi, \eta) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)} \xi + \alpha_3^{(e)} \eta + \alpha_4^{(e)} \xi \eta \quad (327-4)$$

مشتقات توابع شکل ایزوپارامتریک عبارتند از:

$$\nabla \theta^{(e)} = B^{(e)} d^{(e)}$$

$$B^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial x} & \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial x} & \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial x} & \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (328-4)$$

از طرف دیگر

$$\frac{\partial N_I^{\xi Q}}{\partial \xi} = \frac{\partial N_I^{\xi Q}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_I^{\xi Q}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (329-4)$$

$$\frac{\partial N_I^{\xi Q}}{\partial \eta} = \frac{\partial N_I^{\xi Q}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_I^{\xi Q}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

و یا

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I^{\xi Q}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I^{\xi Q}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I^{\xi Q}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I^{\xi Q}}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I^{\xi Q}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I^{\xi Q}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (340-4)$$

و داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I^{iQ}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I^{iQ}}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbb{J}^{(e)-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I^{iQ}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I^{iQ}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (341-4)$$

$$\nabla N_I^{iQ} = \mathbb{J}^{(e)-1} G N_I^{iQ} \quad (342-4)$$

که در این رابطه $G = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}$ است. چون

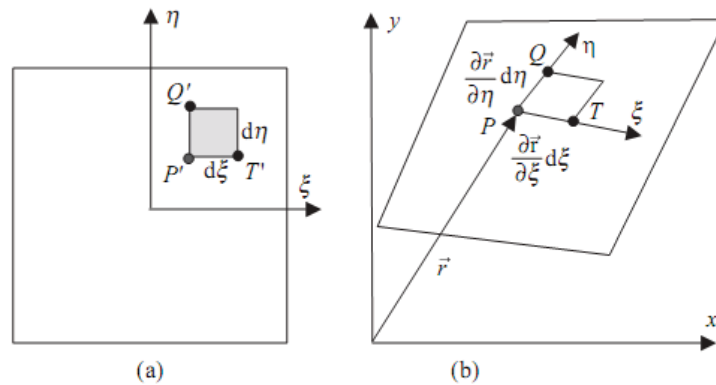
$$J^{(e)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\xi} \frac{\partial N_I^{iQ}}{\partial \xi} x_I^{(e)} & \sum_{i=1}^{\eta} \frac{\partial N_I^{iQ}}{\partial \xi} y_I^{(e)} \\ \sum_{i=1}^{\xi} \frac{\partial N_I^{iQ}}{\partial \eta} x_I^{(e)} & \sum_{i=1}^{\eta} \frac{\partial N_I^{iQ}}{\partial \eta} y_I^{(e)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{iQ}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_r^{iQ}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_r^{iQ}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_i^{iQ}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1^{iQ}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_r^{iQ}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_r^{iQ}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i^{iQ}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(e)} & y_1^{(e)} \\ x_r^{(e)} & y_r^{(e)} \\ x_r^{(e)} & y_r^{(e)} \\ x_i^{(e)} & y_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (343-4)$$

$$J^{(e)} = \mathbb{N}^{iQ} [x^{(e)} \quad y^{(e)}] \quad (344-4)$$

$$B^{(e)} = \mathbb{J}^{(e)-1} \mathbb{N}^{iQ} \quad (345-4)$$

برای اینکه نگاشت $x(\xi, \eta) \rightarrow x^e$ و $y(\xi, \eta) \rightarrow y^e$ منحصر به فرد باشد لازم است $det J^{(e)} \neq 0$. همچنین باید $|J^{(e)}| = det J^{(e)} > 0$ باشد. این شرط معادل آن است که تمام زوایای چهارضلعی کمتر از 180° درجه باشند.



شکل ۴-۸ نگاشت یک مساحت بسیار کوچک از □□□ دامنه طبیعی به □□□ دامنه فیزیکی

۳-۴ کوادراتور گوسی در دو بعد

یک انتگرال نمونه را که روی دامنه یک المان چهارضلعی تعریف شده در نظر بگیرید (شکل ۴-۱۰۸):

$$I = \int_{\Omega^{(e)}} f(\xi, \eta) d\Omega \quad (346-4)$$

□ نقطه دلخواهی در دامنه فیزیکی است:

$$\vec{r} = \vec{x}i + \vec{y}j \quad (347-4)$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} d\xi = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} \right) d\xi \quad (348-4)$$

$$\vec{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} d\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{j} \right) d\eta \quad (349-4)$$

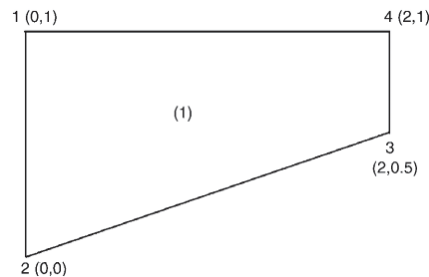
$$d\Omega = k \cdot (a \times b) = k \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta \quad (350-4)$$

$$I = \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 |J^{(e)}(\xi, \eta)| f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_{gp}} \sum_{j=1}^{n_{gp}} w_i w_j |J^{(e)}(\xi_i, \eta_j)| f(\xi_i, \eta_j) \quad (351-4)$$

مثال ۴۷. مسأله هدایت حرارت مثال قبل را (شکل ۴-۱۰۹) با یک المان چهارضلعی مدل کرده و با استفاده از کوادراتور گوسی 2×2 برای انتگرال گیری تحلیل نمائید.

ماتریس مختصات المانی عبارت است از:

$$[x^{(e)} \quad y^{(e)}] = \begin{bmatrix} x_1^{(e)} & y_1^{(e)} \\ x_2^{(e)} & y_2^{(e)} \\ x_3^{(e)} & y_3^{(e)} \\ x_4^{(e)} & y_4^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$



شکل ۴-۱۰۹

توابع شکل المان چهارضلعی در دامنه والدین عبارتند از:

$$\begin{aligned} N_1^{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(\xi - \eta)(1 - \eta) \\ N_2^{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(\xi + \eta)(1 - \eta) \\ N_3^{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(\xi + \eta)(1 + \eta) \\ N_4^{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(\xi - \eta)(1 + \eta) \end{aligned}$$

بنابراین گرادیان ($GN^{\xi\eta}$) عبارت است از:

$$GN^{\xi\eta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{\xi\eta}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1^{\xi\eta}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2^{\xi\eta}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2^{\xi\eta}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_3^{\xi\eta}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3^{\xi\eta}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4^{\xi\eta}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4^{\xi\eta}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta - 1 & 1 - \eta & 1 + \eta & -1 - \eta \\ \xi - 1 & -\xi - 1 & 1 + \xi & 1 - \xi \end{bmatrix}$$

ژاکوبین، دترمینان و معکوس آن برابرند با:

$$J^{(e)} = (GN^{\xi\eta})[x^{(e)} \quad y^{(e)}] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot 120\eta - \cdot 370 \\ 1 & \cdot 120\xi + \cdot 120 \end{bmatrix}$$

$$\det J^{(e)} = -\cdot 120\eta + \cdot 370$$

$$(J^{(e)})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1 + \xi}{3 - \eta} & 1 \\ \frac{1}{\eta - 3} & \cdot \end{bmatrix}$$

$$B^{(s)} = (J^{(s)})^{-1} \square N^{\xi\eta} \square (J^{(s)})^{-1} \begin{bmatrix} \eta - 1 & 1 - \eta & 1 + \eta & -1 - \eta \\ \xi - 1 & -\xi - 1 & 1 + \xi & 1 - \xi \end{bmatrix}$$

با استفاده کوادراتورگوسی 2×2 ماتریس کنداکتانس و ماتریس شار در نقاط و وزن‌های زیر محاسبه می-شوند:

$$\xi_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad w_1 = w_2 = 1$$

$$K = K^{(s)} = k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^{(s)T} B^{(s)} |J^{(s)}| d\xi d\eta$$

$$= k \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j |J^{(s)}(\xi_i, \eta_j)| B^{(s)T}(\xi_i, \eta_j) B^{(s)}(\xi_i, \eta_j)$$

$$\square \square \square = \begin{bmatrix} 4.76 & -3.01 & -2.48 & 1.73 \\ & 4.12 & 1.73 & -2.36 \\ & & 6.04 & -0.24 \\ sym. & & & 0.91 \end{bmatrix}$$

$$f_{\bar{n}} = \int_{\Omega^{(e)}} s(N^{\xi\eta})^T \square \Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 s(N^{\xi\eta})^T |J^{(s)}| \square \xi \square \eta$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5\eta + 0.5\xi \\ 0.5 - 0.5\eta + 0.5\xi \\ 0.5 - 0.5\eta - 0.5\xi \\ 0.5 + 0.5\eta - 0.5\xi \end{bmatrix} d\xi d\eta = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 2.0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

تنها مرزی که در ماتریس شار سهم دارد لبه $\square\square$ است. اما جهت مثبت ξ در دامنه المان والدین از گره ۱ به گره ۲ و جهت مثبت η از گره ۱ به گره ۴ هستند. بنابراین لبه $\square\square$ در دامنه فیزیکی متناظر $\xi = -1$ در دامنه المان می‌باشد. ماتریس شار مرزی را می‌توان تحلیلی یا با کوادراتورگوسی انتگرال‌گیری کرد.

$$f_r = - \int_{r_{CD}} \bar{q} (N^{iQ})^T dr = - \int_{x=-1}^{x=1} \bar{q} N^{iQ}(\xi = -1, \eta) dx$$

$$= - \frac{b-a}{2} \bar{q} \int_{-1}^1 N^{iQ}(\xi = -1, \eta)^T d\eta = -2.0 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0.5(1-\eta) \\ \cdot \\ \cdot \\ 0.5(1+\eta) \end{bmatrix} d\eta = \begin{bmatrix} -2.0 \\ \cdot \\ \cdot \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

و خواهیم داشت:

$$f_\Omega + f_r + r = \begin{bmatrix} r_1 - 17.0 \\ r_2 + 2.0 \\ r_3 + 2 \\ -18 \end{bmatrix}$$

و سیستم عمومی معادلات عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 4.76 & -3.01 & -2.98 & 1.73 \\ -3.01 & 4.12 & 1.73 & 2.26 \\ -2.98 & 1.73 & 6.04 & -0.29 \\ 1.73 & -2.26 & -0.29 & 0.91 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 - 17.0 \\ r_2 + 2.0 \\ r_3 + 2 \\ -18 \end{bmatrix} \Rightarrow T_i = -3.04$$

ماتریس شار منتجه در نقاط گوسی محاسبه می‌شود:

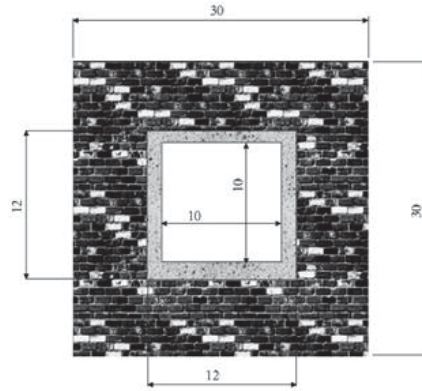
$$q^{(1)} = -k \nabla \theta = -k B^{(1)} d^{(1)}$$

$$q^{(1)}(\xi_1, \eta_1) = -k B^{(1)}(\xi_1, \eta_1) d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

$$q^{(1)}(\xi_2, \eta_2) = \begin{bmatrix} -2.2 \\ 19.8 \end{bmatrix}$$

$$q^{(1)}(\xi_3, \eta_3) = \begin{bmatrix} 4.95 \\ 19.8 \end{bmatrix}$$

$$q^{(1)}(\xi_4, \eta_4) = \begin{bmatrix} 0.81 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$



شکل ۴-۱۱۰

مثال ۴۸. کوره‌ای با ابعاد سطح مقطع نشان داده شده در شکل ۴-۱۱۰ از دو جنس مختلف ساخته شده است. دیوار داخلی از سیمان با هدایت حرارتی $k_c = 0.01 \frac{W}{m \cdot K}$ و دیوار خارجی از آجر با هدایت ویژه حرارتی $k_b = 0.0057 \frac{W}{m \cdot K}$ ساخته شده‌اند. درجه حرارت داخل کوره $272K$ و ضریب انتقال حرارت همرفت $h_1 = 0.208 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ می‌باشد. دیوار بیرونی کوره در معرض هوای $202K$ و ضریب همرفت $h_2 = 0.068 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ قرار دارد. توزیع درجه حرارت داخل دیوارهای سیمان و آجر در شرایط پایدار و همچنین شارهای حرارتی داخل هر دیوار را تعیین نمایید.

برنامه *APDL* معادل این مثال در محیط انسیس عبارت است از:

```

/PREPv
!*
ET,1,PLANE55
!*
MP,KXX,1,0,01
MP,KXX,2,0,0057
!*
RECTNG,0,15,15,15
RECTNG,6,6,6,6
!*
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
!*
RECTNG,6,6,6,6
RECTNG,5,5,5,5
!*
ASBA,2,3
NUMCMP,AREA
!*
ESIZE,0.5
!*
AGLUE,ALL
!*
ASEL,S,AREA,,2

```

```

AATT,1
ASEL,1,NVE
AATT,2
ASEL,ALL
AMESH,ALL
!*
LSEL,S,LOC,X,-5
LSEL,A,LOC,X,5
LSEL,A,LOC,Y,-5
LSEL,A,LOC,Y,5
SFL,ALL,CONV,1,208,633
LSEL,ALL
LSEL,S,LOC,X,-15
LSEL,A,LOC,X,15
LSEL,A,LOC,Y,-15
LSEL,A,LOC,Y,15
SFL,ALL,CONV,1,68,253
LSEL,ALL
!*
FINISH
!*
/SOLU
SOLVE
FINISH
!*
/POST1
PLNSOL,TEMP
PLVECT,TF
FINISH
!*

```

ع-۳۱ فرمول بندی المان محدود برای مسایل میدان برداری

ع-۳۱-۱ الاستیسیته خطی - سینماتیک

۱) بردار جابجایی $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$ را به صورت ماتریسی می‌توان به صورت $u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$ نوشت.

۲) کرنش در دو بعد با ماتریسی به شکل زیر قابل بیان است:

$$\varepsilon = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T \quad (ع-۳۱-۲)$$

و خواهیم داشت:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \nabla_s u = \nabla_s \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (ع-۳۱-۳)$$

∇_s ماتریس گرادیان، متقارن است.

ع-۳۱-۲ تنش و ترکشن

ماتریس تنش عبارت است از:

$$\sigma^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}] \quad \underline{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (ع-۳۱-۴)$$

و ترکشن عبارت است:

$$t = \tau n$$

$$(۳۵۵-۴)$$

۴-۳۱-۳ معادلات تعادل

معادلات تعادل به صورت $div \tau + b = 0$ بیان می‌شوند. بیان ماتریسی این معادلات عبارتند از:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 = \vec{\nabla} \cdot \sigma_x + b_x \quad (۳۵۶-۴)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0 = \vec{\nabla} \cdot \sigma_y + b_y \quad (۳۵۷-۴)$$

$$\nabla_s^T \sigma + b = 0 \quad (۳۵۸-۴)$$

در این رابطه σ و ∇_s برابرند با:

$$\nabla_s^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial}{\partial y} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \text{ و } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (۳۵۹-۴)$$

۴-۳۱-۴ معادله بنیادین

در حالت دوعبدهی رابطه تنش و کرنش برای یک جسم جامد الاستیک خطی عبارت است از:

$$\sigma = D \varepsilon \quad (۳۶۰-۴)$$

ماتریس ضرایب D در حالت تنش صفحه‌ای به صورت زیر است:

[E مدول الاستیک و ν نسبت پواسون هستند]

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \cdot \\ \nu & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1-\nu}{\nu} \end{bmatrix} \quad (۳۶۱-۴)$$

و در حالت کرنش صفحه‌ای عبارت است از:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \cdot \\ \nu & 1-\nu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1-2\nu}{\nu} \end{bmatrix} \quad (۳۶۲-۴)$$

۴-۳۱-۵ شکل‌های قوی و ضعیف معادلات حاکم

در بخش‌های قبل معادلات زیر استخراج شدند:

$$\nabla_s^T \sigma + b = 0 \quad (۳۶۳-۴) \quad \text{معادلات تعادل:}$$

$$\varepsilon = \nabla_s u \quad (۳۶۴-۴) \quad \text{معادلات سینماتیک:}$$

$$\sigma = D \varepsilon \quad (۳۶۵-۴) \quad \text{معادله بنیادین:}$$

$$\vec{\sigma}_y \cdot \vec{n} = \bar{t}_y \text{ و } \vec{\sigma}_x \cdot \vec{n} = \bar{t}_x \quad \text{یا} \quad \tau_n = \bar{t} \quad (۳۶۶-۴) \quad \text{شرایط مرزی روی } T_t:$$

$$\vec{u} = \vec{\bar{u}} \quad \text{یا} \quad u = \bar{u} \quad (۳۶۷-۴) \quad \text{شرایط مرزی روی } T_u:$$

بنابراین شکل قوی برای جامد الاستیک خطی به صورت زیر خواهد بود:

$$(a) \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_x + b_x = \cdot \quad \text{and} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_y + b_y = \cdot \quad \text{on } \Omega \quad (368-4)$$

$$(b) \sigma = D \nabla_T u$$

$$(c) \vec{\sigma}_x \cdot \vec{n} = \bar{t}_x \quad \text{and} \quad \vec{\sigma}_y \cdot \vec{n} = \bar{t}_y \quad \text{on } \Gamma_t \quad (369-4)$$

$$(d) \vec{u} = \vec{u} \quad \text{on } \Gamma_u$$

برای بدست آوردن شکل ضعیف داریم:

$$(a) \int_{\Omega} w_x \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_x d\Omega + \int_{\Omega} w_x b_x d\Omega = \cdot \quad \forall w_x \in U. \quad (370-4)$$

$$(b) \int_{\Omega} w_y \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_y d\Omega + \int_{\Omega} w_y b_y d\Omega = \cdot \quad \forall w_y \in U.$$

$$(c) \int_{\Gamma_t} w_x (\bar{t}_x - \vec{\sigma}_x \cdot \vec{n}) d\Gamma = \cdot \quad \forall w_x \in U.$$

$$(d) \int_{\Gamma_t} w_x (\bar{t}_y - \vec{\sigma}_y \cdot \vec{n}) d\Gamma = \cdot \quad \forall w_y \in U.$$

که در روابط بالا وزن به صورت $\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j}$ یا $w = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}$ در نظر گرفته شده است. از قضیه گرین داریم:

$$\int_{\Omega} w_x \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_x d\Omega = \oint_{\Gamma_t} w_x \vec{\sigma}_x \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} w_x \cdot \vec{\sigma}_x d\Omega \quad (371-4)$$

$$\int_{\Omega} w_y \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_y d\Omega = \oint_{\Gamma_t} w_y \vec{\sigma}_y \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} w_y \cdot \vec{\sigma}_y d\Omega \quad (372-4)$$

با جمع کردن دو معادله خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} w_x \cdot \vec{\sigma}_x + \vec{\nabla} w_y \cdot \vec{\sigma}_y) d\Omega = \oint_{\Gamma_t} (w_x \vec{\sigma}_x \cdot \vec{n} + w_y \vec{\sigma}_y \cdot \vec{n}) d\Gamma + \int_{\Omega} (w_x b_x + w_y b_y) d\Omega \quad (373-4)$$

یا:

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} w_x \cdot \vec{\sigma}_x + \vec{\nabla} w_y \cdot \vec{\sigma}_y) d\Omega = \oint_{\Gamma_t} \vec{w} \cdot \vec{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \vec{w} \cdot \vec{b} d\Omega \quad (374-4)$$

همچنین:

$$\vec{\nabla} w_x \cdot \vec{\sigma}_x + \vec{\nabla} w_y \cdot \vec{\sigma}_y = \frac{\partial w_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \sigma_{xy} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \sigma_{yy} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial w_y}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = (\nabla_s w)^T \sigma \quad (375-4)$$

به این ترتیب:

$$\int_{\Omega} (\nabla_s w)^T \sigma d\Omega = \int_{\Gamma_t} w^T \vec{t} d\Gamma + \int_{\Omega} w^T \vec{b} d\Omega \quad \forall w \in v_0 \quad (376-4)$$

و شکل ضعیف در دو بعد عبارت است از:

$$\int_{\Omega} (\nabla_s w)^T D \nabla_s u \, d\Omega = \int_{\Gamma_t} w^T \bar{t} \, d\Gamma + \int_{\Omega} w^T b \, d\Omega \quad \forall w \in U. \quad (377-4)$$

$$U = \{u | u \in H^1, u = \bar{u} \text{ on } \Gamma_u\}, U_c = \{w | w \in H^1, w = 0 \text{ on } \Gamma_u\}$$

در روابط بالا:

ع-۳۲ گسسته‌سازی المان محدود

در این حالت ماتریس جابجایی‌های عمومی عبارت است از:

$$d = [u_{x_1} \quad u_{y_1} \quad u_{x_2} \quad u_{y_2} \quad \dots \quad u_{x_{n_{np}}} \quad u_{y_{n_{np}}}]^T \quad (378-4)$$

با انتخاب حل آزمایشی و وزن‌ها به صورت زیر:

$$\begin{cases} u(x, y) \approx u^{(e)}(x, y) = N^{(e)}(x, y) d^{(e)} & (x, y) \in \Omega^e \\ w^T(x, y) \approx w^{(e)T}(x, y) = w^{(e)T} N^{(e)}(x, y)^T & (x, y) \in \Omega^e \end{cases} \quad (379-4)$$

که ماتریس توابع شکل عبارت است از:

$$N^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & \cdot & N_r^{(e)} & \cdot & \dots & N_{n_{en}}^{(e)} & \cdot \\ \cdot & N_1^{(e)} & \cdot & N_r^{(e)} & \dots & \cdot & N_{n_{en}}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (380-4)$$

و ماتریس جابجایی و ماتریس وزن‌های المانی به شکل زیر خواهد بود:

$$d^{(e)} = [u_{x_1}^{(e)} \quad u_{y_1}^{(e)} \quad u_{x_2}^{(e)} \quad u_{y_2}^{(e)} \quad \dots \quad u_{x_{n_{en}}}^{(e)} \quad u_{y_{n_{en}}}^{(e)}] \quad (381-4)$$

$$w^{(e)} = [w_{x_1}^{(e)} \quad w_{y_1}^{(e)} \quad w_{x_2}^{(e)} \quad w_{y_2}^{(e)} \quad \dots \quad w_{x_{n_{en}}}^{(e)} \quad w_{y_{n_{en}}}^{(e)}] \quad (382-4)$$

و تقریب المان محدود عبارت است از:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega^e} \nabla_s w^{(e)T} D^{(e)} \nabla_s u^{(e)} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t^e} w^{(e)T} \bar{t} \, d\Gamma - \int_{\Omega^e} w^{(e)T} b \, d\Omega \right\} = 0 \quad (383-4)$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \approx \varepsilon^{(e)} = \nabla_s u^{(e)} = \nabla_s N^{(e)} d^{(e)} = B^{(e)} d^{(e)} \quad (384-4)$$

که

$$B^{(e)} = \nabla_s N^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial x} & \cdot & \dots & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial x} & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \cdot & \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial y} & \dots & \cdot & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (385-4)$$

$$(\nabla_s w^{(e)})^T = (B^{(e)} w^{(e)})^T = w^{(e)T} B^{(e)T} \quad (387-ع)$$

همچنین داریم:

$$d^{(e)} = L^{(e)} d, \quad w^{(e)T} = w^T L^{(e)T} \quad (387-ع)$$

بنابراین می توان نوشت:

$$w^{(T)} \left\{ \sum_{e \in \Omega} L^{(e)T} \left[\int_{\Omega^{(e)}} B^{(e)T} D^{(e)} B^{(e)} d\Omega L^{(e)} d - \int_{\Gamma_t^{(e)}} N^{(e)T} \bar{t} d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} N^{(e)T} b d\Omega \right] \right\} = 0 \quad \forall w_F \quad (388-ع)$$

و ماتریس های سفتی المانی و نیروی خارجی المانی عبارتند از:

$$K^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} B^{(e)T} D^{(e)} B^{(e)} d\Omega \quad (389-ع)$$

$$f^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} N^{(e)T} b d\Omega + \int_{\Gamma_t^{(e)}} N^{(e)T} \bar{t} d\Gamma = f_{\Omega}^{(e)} + f_{\Gamma}^{(e)} \quad (390-ع)$$

به این ترتیب شکل ضعیف را می توان به صورت زیر نوشت:

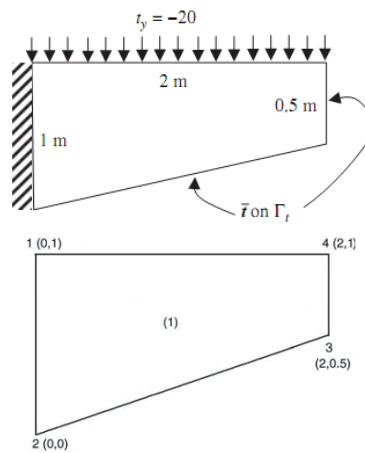
$$w^T \left[\left(\sum_{e \in \Omega} L^{(e)T} K^{(e)} L^{(e)} \right) d - \left(\sum_{e \in \Omega} L^{(e)T} f^{(e)} \right) \right] = 0 \quad \forall w_F \quad (391-ع)$$

و

$$w^T (Kd - f) = 0 \quad \forall w_F \quad \text{یا} \quad w^T r = 0 \quad \text{or} \quad w_F^T r_F + w_E^T r_E = 0 \quad (392-ع)$$

چون $w_E = 0$ و w_F اختیاری است در نتیجه $r_F = 0$ خواهد بود و داریم:

$$\begin{bmatrix} K_E & K_{EF} \\ K_{EF}^T & K_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_E \\ d_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_E + r_E \\ f_F \end{bmatrix} \quad (393-ع)$$



شکل ۱۱۱-ع

مثال ۴۹. یک مساله الاستیک خطی روی دامنه پانل دوزنقه‌ای شکل ۴-۱۱۱ را در نظر بگیرید. لبه سمت چپ عمودی ساکن می‌باشد.

لبه‌های عمودی سمت راست و پایینی بدون ترکشن هستند. یعنی $\bar{E} = 0$. ترکشن $\bar{N}_y = -20 \frac{N}{m}$ روی لبه افقی بالایی اعمال می‌شود. خواص مواد $v = 0.2$ و $E = 2 \times 10^7 \text{ pa}$ هستند. شرایط تنش صفحه‌ای در نظر گرفته می‌شود. مساله با استفاده از یک المان چهارضلعی گسسته می‌شود. مش المان محدود و مختصات گرهی برحسب متر هستند.

ماتریس مختصات عبارت است :

$$[x^{(e)} \quad y^{(e)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

توابع شکل لاگرانژی در المان والدین عبارتند از:

$$\begin{aligned} N_1^{\xi Q} &= \frac{1}{2} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2^{\xi Q} &= \frac{1}{2} (1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3^{\xi Q} &= \frac{1}{2} (1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4^{\xi Q} &= \frac{1}{2} (1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned}$$

ماتریس ژاکوبین به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} J^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2^{\xi Q}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3^{\xi Q}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4^{\xi Q}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2^{\xi Q}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3^{\xi Q}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4^{\xi Q}}{\partial \eta} \end{bmatrix} [x^{(e)} \quad y^{(e)}] \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta - 1 & 1 - \eta & 1 + \eta & -\eta - 1 \\ \xi - 1 & -\xi - 1 & 1 + \xi & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.120\eta - 0.370 \\ 1 & 0.120\xi + 0.120 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$|J^{(e)}| = -0.120\eta + 0.370$$

$$\begin{aligned} (J^{(e)})^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1 + \xi}{2 - \eta} & 1 \\ \frac{1}{\eta - 2} & 0 \end{bmatrix} \\ B^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial N_2^{\xi Q}}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial N_3^{\xi Q}}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial N_4^{\xi Q}}{\partial x} & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial y} & \cdot & \frac{\partial N_2^{\xi Q}}{\partial y} & \cdot & \frac{\partial N_3^{\xi Q}}{\partial y} & \cdot & \frac{\partial N_4^{\xi Q}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{\xi Q}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{\xi Q}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{\xi Q}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{\xi Q}}{\partial y} & \frac{\partial N_3^{\xi Q}}{\partial x} & \frac{\partial N_4^{\xi Q}}{\partial y} & \frac{\partial N_4^{\xi Q}}{\partial x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ماتریس‌های المان با استفاده از کوادراتور گوسی 2×2 با مختصات و وزن‌های زیر انتگرال‌گیری می‌شود.
 $\xi_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \eta_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, w_1 = w_2 = 1$

ماتریس سفی عبارت است از:

$$K = K^{(v)} = \int_{\Omega^{(e)}} B^{(e)T} D^{(e)} B^{(e)} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^{(e)T} D^{(e)} B^{(e)} |J^{(e)}| d\xi d\eta$$

$$= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j |J^{(e)}(\xi_i, \eta_j)| B^{(e)T}(\xi_i, \eta_j) D^{(e)} B^{(e)}(\xi_i, \eta_j)$$

برای محاسبه $K^{(e)}$ به محاسبه $B^{(e)}$ نیاز داریم. برای نقطه (ξ_i, η_j) داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{eQ}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{eQ}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{eQ}}{\partial x} & \frac{\partial N_4^{eQ}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{eQ}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{eQ}}{\partial y} & \frac{\partial N_3^{eQ}}{\partial y} & \frac{\partial N_4^{eQ}}{\partial y} \end{bmatrix} = (J_{(\xi_i, \eta_j)}^{(e)})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{eQ}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2^{eQ}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3^{eQ}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4^{eQ}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1^{eQ}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2^{eQ}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3^{eQ}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4^{eQ}}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{(\xi_i, \eta_j)}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.44 & -0.06 & 0.12 & 0.38 \\ -0.88 & -0.88 & -0.24 & -0.24 \end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$B^{(e)}(\xi_i, \eta_j) = \begin{bmatrix} -0.44 & \cdot & -0.06 & \cdot & 0.12 & \cdot & 0.38 & \cdot \\ \cdot & -0.88 & \cdot & -0.88 & \cdot & -0.24 & \cdot & -0.24 \\ -0.88 & -0.44 & -0.88 & -0.06 & -0.24 & 0.12 & -0.24 & 0.38 \end{bmatrix}$$

سهم ماتریس سفی المانی از نقطه گوسی اول عبارت است از:

$$K^{(e)}(\xi_i, \eta_j) = w_i w_j B^{(e)T}(\xi_i, \eta_j) D^{(e)} B^{(e)}(\xi_i, \eta_j) |J^{(e)}(\xi_i, \eta_j)|$$

با تکرار محاسبات بالا برای سایر نقاط گوسی خواهیم داشت:

$$K^{(e)} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 K^{(e)}(\xi_i, \eta_j)$$

$$= 1.7 \begin{bmatrix} 1.49 & -0.74 & -0.66 & 0.16 & -0.48 & 0.60 & 0.10 & -0.08 \\ & 2.70 & 0.24 & -2.46 & 0.66 & -1.68 & -0.8 & 1.39 \\ & & 1.08 & 0.33 & 0.10 & -0.16 & -0.06 & -0.41 \\ & & & 2.6 & -0.08 & 1.39 & -0.41 & -1.03 \\ & & & & 2 & -0.08 & -1.18 & 0.25 \\ & & & & & 2.82 & 0.33 & -3.03 \\ & & & & & & 1.09 & 0.25 \\ & & & & & & & 3.67 \end{bmatrix}$$

sym.

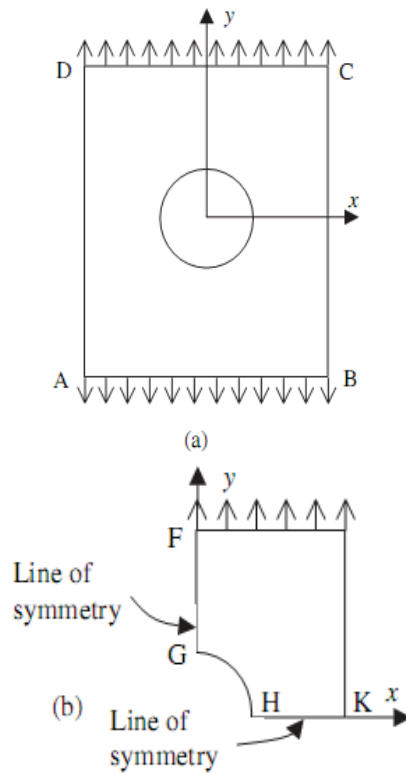
$$\sigma^{(e)}(\xi_1, \eta_1) = \begin{bmatrix} -12.0 \\ -5.64 \\ -45.5 \end{bmatrix},$$

$$\sigma^{(e)}(\xi_1, \eta_2) = \begin{bmatrix} 28.0 \\ 6.65 \\ -46.5 \end{bmatrix}$$

$$\sigma^{(e)}(\xi_2, \eta_1) = \begin{bmatrix} -42.0 \\ -23.0 \\ 25.5 \end{bmatrix},$$

$$\sigma^{(e)}(\xi_2, \eta_2) = \begin{bmatrix} 18.0 \\ -4.82 \\ 10.4 \end{bmatrix}$$

مثال ۵۰. برای ورق مربع شکل زیر به طول $w = 4 \text{ in}$ با سوراخ دایره‌ای مرکز آن به شعاع 1 in به ضخامت $t = 0.1 \text{ in}$ با لحاظ تقارن مساله تحت بارگذاری نشان داده شده در شکل ۴-۱۱۲، برنامه APDL مربوط را بنویسید. به دلیل تقارن، ربع مربع را مدل نمایید و به خاطر ضخامت خیلی کم آن، مساله را تنش صفحه‌ای فرض کنید. مدول الاستیسیته و نسبت پواسون مربوط به ورق به ترتیب $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ و $\nu = 0.3$ فرض می‌شوند. بار کششی گسترده دارای شدت 10 lb/in q می‌باشد.



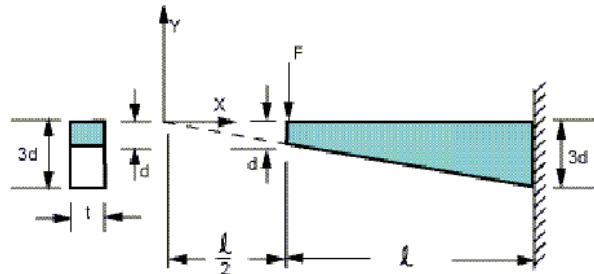
شکل ۴-۱۱۲

برنامه *APDL* مربوط عبارت است از:

```

/PREPv
!*
ET,1,42          ! Select element type as PLANE42
KEYOPT,1,3,3    ! Specify plane stress with thickness
R,1,0,1
!*
MP,EX,1,30,E6
MP,NUXY,1,0,3
!*
W=4
R=1
P=10
K,1              ! Create keypoint (0,0)
K,2,R
K,3,W/2
K,4,R
K,5,W/2
K,6,W/2,W/2
L,2,3           ! Create lines
L,2,3           ! Create lines
L,3,6
L,6,5
L,5,4
LARC,4,2,1,R   ! Create Arc
!*
LESIZE,1,,10   ! Specify number of Element along lines
LESIZE,4,,10
LESIZE,2,,15
LESIZE,3,,15
LESIZE,3,,15
LESIZE,5,,30
!*
AL,1,2,3,4,5   ! Create area
LCCAT,2,3      ! Concatenate Lines for mapped meshing
MSHKEY,1       !Use mapped meshing
AMESH,ALL
!*
FINISH
!*
/SOLU
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX
NSEL,S,LOC,Y,0,D,ALL,UY
NSEL,S,LOC,Y,0,D,ALL,UY
NSEL,S,LOC,Y,W/2
SF,ALL,PRES,-P
ALLSEL
SOLVE
FINISH
/POST1
PLDISP,2       ! Plot deformed shape
PLNSOL,S,Y     ! plot stress in Y-Dir
FINISH

```

شکل ۴-۱۱۳

مثال ۵۱. یک تیر یک سر گیردار به ضخامت $t=2''$ و طول $l=50\text{ in}$ طبق شکل ۴-۱۱۳ دارای شکل شیبدار است. نیروی $F=4000\text{ lb}$ در سر آزاد آن وارد می‌شود. تنش خمشی ماکزیمم در وسط طول تیر ($x=l$) و در انتهای ثابت تیر را پیدا کنید. مقدار $d=2\text{ in}$ فرض شود و خواص مکانیکی $\nu=0.0$, $E=30 \times 10^6$ هستند.

این مثال با دو نوع المان چهار ضلعی چهار گرهی ($PLANE42$) و هشت گرهی ($PLANE82$) حل می‌شود و نتایج با هم مقایسه خواهند شد. ضخامت $t=2\text{ in}$ با استفاده از حالت تنش صفحه‌ای با گزینه ضخامت شرکت داده می‌شود. نسبت پواسن صفر تنظیم می‌شود که با تئوری تیر موافقت داشته باشد. برنامه $APDL$ مربوط به المان چهار ضلعی چهار گرهی عبارت است از:

```

/PREP
ANTYPE,STATIC
ET,1,PLANE42,,,3,,,2
R,1,2
MP,EX,1,30E6
MP,NUXY,1,0,0
N,1,25
N,7,75
FILL
N,8,25,-3
N,14,75,-9
FILL
E,2,8,8,9
EGEN,6,1,1
NSEL,S,LOC,X,75
D,ALL,ALL
NSEL,ALL
F,1,FY,-4000
FINISH
/SOLU
OUTPR,,1
SOLVE
FINISH

```

```

/POST\
END-NODE(۷۵,۰,۰)
NSEL,S,NODE,,END-NODE
PRNSOL,S,X
MID-NODE=NODE(۵۰,۰,۰)
NSEL,ALL
NSEL,S,NODE,,MID-NODE
PRNSOL,S,PRIN,SEQV
PLDISP,۲
FINISH

```

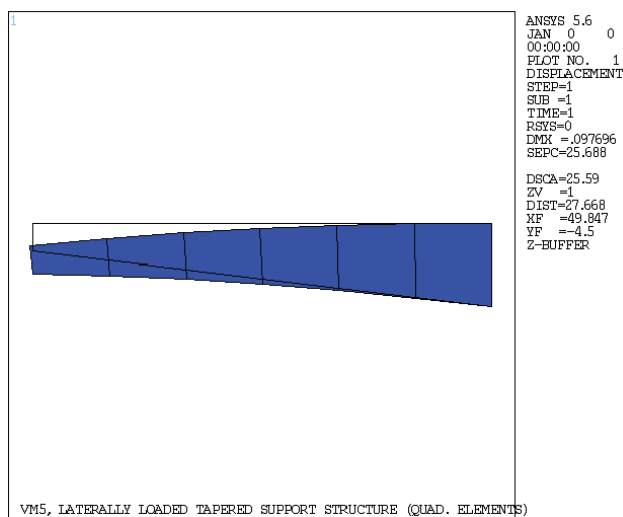
برنامه APDL مربوط به المان چهار ضلعی هشت گرهی عبارت است از:

```

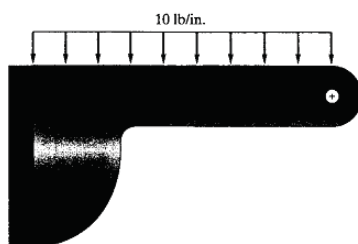
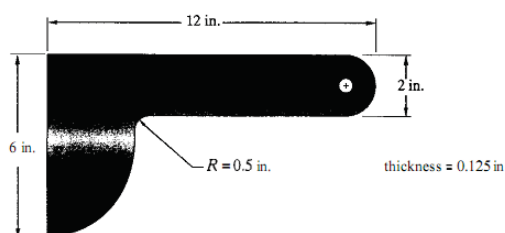
/PREP\
ET,۱,PLANE۸۲,,,۳,,,۲
EMID
NSEL,ALL
NSEL,R,LOC,X,۷۵
NSEL,R,LOC,Y,-۴,۵
D,ALL,ALL
NSEL,ALL
FINISH
/SOLU
SOLUE
FINISH
/POST\
END-NODE,NODE(۷۵,۰,۰)
NSEL,S,NODE,,END-NODE
PRNSOL,S,,X
NSEL,ALL
MID-NODE=NODE(۵۰,۰,۰)
NSEL,S,NODE,,MID-NODE
PRNSOL,S,PRIN,SEQV
NSEL,ALL
FINISH
!*

```

نتایج تحلیل با المان چهار ضلعی چهار گرهی در نقطه انتها ($\sigma_x = 7151,096 \text{ Psi}$) جواب حقیقی (7407 psi) و در نقطه میانی $\sigma = 8163,656 \text{ psi}$ می باشند و برای المان چهار ضلعی هشت گرهی به ترتیب $\sigma_x = 7408,98$ و $\sigma = 8363,709 \text{ psi}$ هستند و ملاحظه می شود نتایج به دست آمده با المان هشت گرهی از دقت بهتری برخوردارند.



شکل ۴-۱۱۴



شکل ۴-۱۱۵

مثال ۵۲. پایه فولادی ($\nu = 0.3, E = 29 \times 10^6 \frac{lb}{in^2}$) شکل ۴-۱۱۵ را که بعنوان تکیه‌گاه در جاکتابی به کار می‌رود در نظر بگیرید. این پایه در امتداد سطح بالایی‌اش بطور یکنواخت بارگذاری گردیده و در امتداد لبه

سمت چپ ثابت شده است. تحت بارگذاری و قیود بالا، شکل تغییر یافته پایه را رسم نموده و تنش‌های اصلی و تنش‌های فون میزز در پایه را تعیین نمایید.

برنامه *APDL* این تمرین به شرح زیر است:

```

/PREP
ET,1,PLANE82
KEYOPT,1,3,3
R,1,0,1,25
MP,EX,1,29E6
MP,PRXY,1,0,3
K,1,0,0
K,2,4,4
K,3,0,4
K,4,11,4
K,5,11,6
K,6,11,55
K,7,0,6
LARC,1,2,3,4
L,2,4
LARC,4,5,6,1
L,5,7
L,7,1
LFILLT,1,2,0,5
AL,11,6,2,3,4,5
CYL4,11,5,0,25
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
ESIZE,0,25
AMESH,1
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,ALL
NSEL,ALL
LSEL,S,LOC,Y,6
SFL,ALLPRES,1
FINISH
/SOLU
SOLUE
FINISH
/POST1
PLNSOL,U,Y,2,1,0
PLNSOL,S,EQV,2,1,0
FINISH

```



```
LSEL,S,LOC,X,0
DL,ALL,ALL
LSEL,ALL
NSEL,S,LOC,X,0.08
NSEL,R,LOC,LOC,Y,0.05
F,ALL,FY,-100,NSEL,ALL
FINISH
/SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
PLNSOL,U,Y,2,1,0      !Plot x component of displacement (Dof Solution)
PLESOL,S,X,2,1,0      !Plot contour nodal solution,x-component of stress
FINISH
```

مقایسه نتایج حاصل از روش المان محدود با نتایج تجربی
*نتایج تا حدود زیادی با هم همخوانی دارند.
*با افزایش میزان نیروی اعمالی، اختلاف نتایج به خصوص در انتهای گیردار افزایش می یابد.

شکل ۴-۱۱۷

شکل ۴-۱۱۸

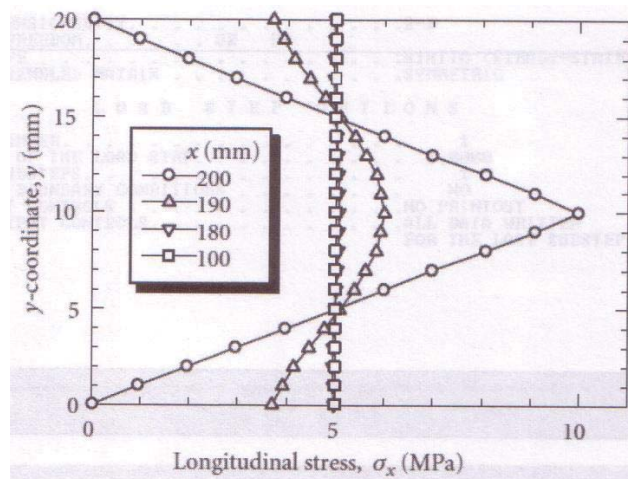
مثال ۵۴. یک تسمه الاستیک در معرض ترکشنی طبق شکل قرار گرفته و انتهای آن کاملاً مقید شده است. برنامه APDL معادل تحلیل FE این حالت را نوشته و توزیع تنش را در طول تیر در فواصل مختلف از انتهای اعمال نیرو محاسبه کنید.

$$E_{steel} = 210 \text{ Gpa}, \quad \nu = 0.3$$

```

/PREPv
!*
ET,1,PLANE82
KEYOPT,1,3,3
R,1,10
!*
MP,EX,1,2.1e5
MP,PRXY,1,0.3
BLC4,0,0,200,20
!*
ESIZE,20
LSEL,S,LOC,X,200
LDIV,ALL,0.5,20
LSEL,ALL
AMESH,ALL
LSEL,S,LOC,X,0
DL,ALL,,ALL
LSEL,ALL
LSEL,S,LOC,X,200
LSEL,R,LOC,Y,11.20
SFL,ALL,PRES,-100
LSEL,ALL
LSEL,S,LOC,X,200
LSEL,R,LOC,Y,0,+90
SFL,ALL,PRES,0,-10
FINISH
/SOLU
SOLVE
FINISH
/POST\
PLNSOL,S,X,0,1,0
FINISH

```



شکل ۴-۱۱۹

بحث و بررسی

توزیع تنش طولی در سطح مقطع نوار الاستیک در چند موقعیت x در شکل ۴-۱۱۹ نشان داده شده است. در انتهای آزاد تیر که نیرو اعمال شده توزیع تنش حالت مثلثی به خود گرفته به طوریکه مقدار آن در بالا و پایین صفر و در مرکز ماکزیمم مقدار یعنی 10 MPa می باشد. توزیع تنش طولی با افزایش فاصله از این انتها تغییر می کند تا جاییکه در موقعی $x=180 \text{ mm}$ که فاصله از انتها برابر عرض تسمه است کاملاً یکنواخت و مساوی 5 MPa می شود. این نتیجه اصل سنت و نان را تایید می کند.

شکل ۴-۱۲۰

مثال ۵۵. گاهی اجسام بدون هیچ اتصال صلب و یا لولایی، روی هم واقع شده و به صورتهای مختلف تحت نیرو قرار می‌گیرند. یک استوانه الاستیک به شعاع R از جنس فولاد نرم با فشار p' به یک بلوک الاستیک از همان جنس فشرده می‌شود. تحلیل المان محدود را در این خصوص انجام داده و تنش تماس حاصل را در محدوده نقطه تماس محاسبه نمایید. فرض کنید شرایط کرنش صفحه‌ای در هر دو جسم برقرار است.

$$p' = 1 \frac{KN}{mm^2}, \nu = 0.3, E = 210 Gpa$$

```

/PREPv
RECTENG,0,500,0,-500
CYL,0,500,500,-90,500,0          !Circular area
AGLUE,1,2                          الحاق مدلها که جداگانه حرکت نکنند!
NUMCMP,AREA
MP,EX,1,2,1,E0
MP,PRXY,1,0,3
ET,1,PLANE82
KEYPOT,1,3,2                      !PLANE STRAIN
ET,2,TARGE169
ET,2,CONTA172
LSEL,S,LOC,Y,0
LSEL,A,LOC,X,0
LESIZE,ALL,,60,0,1
LSEL,INVE
LSEL,S,LOC,Y,-500,0
LESIZE,ALL,,60,1,0
LSEL,INVE
LSEL,S,LOC,Y,150,0
LSEL,U,LOC,Y,0,0
LESIZE,ALL,,40,1,0
LSEL,ALL
LSEL,S,LOC,Y,0,0
LESIZE,ALL,,40,0,1
ALLSEL,ALL,ALL
AMESH,ALL
LSEL,S,LOC,Y,150,0
LSEL,U,LOC,X,0
LSEL,U,LOC,Y,0,0
NSLL,R,1

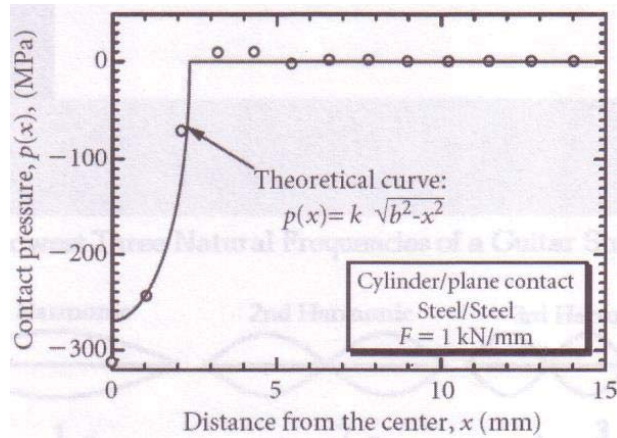
```

```

NSEL,R,LOC,X,0,100
TYPE,7
ESURF,,BOT,
ALLSEL,ALL,ALL
LSEL,S,LOC,Y,0
NSEL,R,1
NSEL,R,LOC,X,0,100
TYPE,7
ESURF,,TOP
ALLSEL,ALL,ALL
LSEL,S,LOC,X,0
DL,ALL,,UX,0
LSEL,INVE
LSEL,R,LOC,Y,0,100
DL,ALL,,UY,0
LSEL,ALL
LSEL,S,LOC,Y,0,100
SFL,ALL,PRES,1
ALLSEL,ALL,ALL
FINISH
/SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
PLNSOL,S,Y,0,100
FINISH

```

!Plot modal solution,Ystrss,true scale



شکل ۴-۱۲۱

منحنی مقایسه نتایج تحلیلی و عددی به شرح زیر است:

منحنی تئوری $p(x) = k\sqrt{b^2 - x^2}$ است که در این مساله x فاصله از مرکز تماس، $P(x)$ تنش تماسی در نقطه x ، ضریبی که توسط معادله $k = \frac{2p'}{\pi b^2} = 110.4 \frac{N}{mm^2}$ به دست می‌آید و b نصف طول تماس یا

$$b = 1.022 \sqrt{\frac{p'R}{E}} = 2.348 \text{ mm}$$

$$p(x) = 110.4 \sqrt{2.348^2 - x^2}$$

از طرف دیگر در شکل زیر نقاط دایره‌ای توخالی کانتور مولفه y تنش یا تنش عمودی محاسبه شده توسط ANSYS را در سطوح بالایی صفحه مسطح نشان می‌دهند. تنش ماکزیم p در مرکز سطح تماس رخ داده

$$\text{و به صورت } p = 0.418 \sqrt{\frac{p'E}{R}} = 270.9 \text{ MPa} \text{ طول تماس به کوچکی } 4.7 \text{ mm} \text{ است.}$$

شکل ۴-۱۲۲

مثال ۵۶. یک صفحه الاستیک طبق شکل ۴-۱۲۲ با یک سوراخ بیضی شکل در مرکز آن در معرض تنش کششی محوری یکنواختی برابر σ در انتهای سمت راست خود قرار گرفته و در انتهای دیگر مقید شده است. ماکزیم تنش σ_{max} و ضریب تمرکز تنش $\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma}$ را محاسبه نمایید. تغییرات توزیع تنش طولی را نیز در خط ارتباط بین سوراخ و لبه صفحه بررسی کنید.

$$E=210 \text{ Gpa}, \nu = 0.3$$

برنامه APDL معادل این مساله عبارت است از:

```
/PREP
ET,1,PLANE,82
KEYOPT,1,3,2      !Plane stress with thickness
!*
R,1,10
!*
MP,EX,1,210E9
MP,PRXY,1,0.3
```

```

BLC4,0,0,2,0,0,0,0      !Because of symmetry only a quarter of the plate
CYL4,0,0,0,0
ARSCALE,2,0,0,0,0,0,0,0,0 !arscale,A,A,A,AING,Rx,Ry,Rz,KING,NoELEM,IMOVE
ASBA,1,2      !Result to area
ESIZE,1,1,0,0
AMESH,2
LSEL,S,LOC,X,0
DL,ALL,UX,0      !DL,LINE,AREA,LAB,Value\,Value
LSEL,S,LOC,Y,0
DL,ALL,UY,0
LSEL,S,LOC,X,2,0
SFL,ALL,PRES,-10
LSEL,ALL
FINISH
/SOLU
ANTYPE,-
SOLVE
FINISH
/POST
PLNSOL,S,X,2      !PLNSOL,Item,comp,KUND,FACT,FileID
/PBC,RFOR,1      !plot all reactions
/PSF,PRES,NORM,2      !Plot surface load symbols as arrows
PLNSOL,S,X,2
FINISH

```

بحث و بررسی

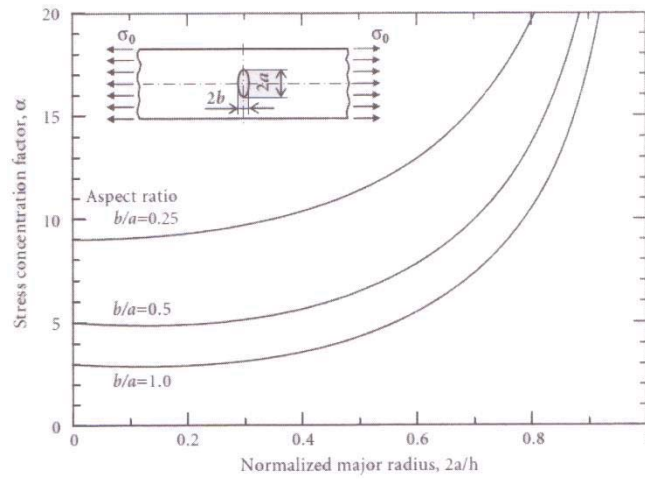
مقدار ماکزیم تنش σ_{max} در قسمت انتهایی سوراخ اتفاق خواهد افتاد. به صورت تحلیلی این تنش عبارت است از:

$$\sigma_{max} = \left(1 + \frac{\gamma a}{b}\right) \sigma = \left(1 + \sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) \sigma = \alpha \cdot \sigma.$$

که ρ شعاع داخلی منحنی قسمت انتهایی سوراخ بیضوی، a شعاع بزرگ و b شعاع کوچک بیضی و α ضرایب تمرکز تنش هستند.

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = \left(1 + \frac{\gamma a}{b}\right) = \left(1 + \sqrt{\frac{a}{\rho}}\right)$$

برای این مساله از شکل $\alpha = 0.16$ است در حالیکه با محاسبه چون $\sigma_{max} = 49.4 MPa$ است $\alpha = 4.94$ می-شود که دارای خطای 4.26% خواهد بود.



شکل ۴-۱۲۲

مثال ۵۷. تیر شکل زیر تحت تاثیر نیروی وزن خود قرار داشته و انتهای سمت چپ آن به دیوار مقید شده است. نیروی عکس العمل تکیه گاهی، وضعیت تغییر شکل تیر و جابجایی نقاط مختلف آن را با تحلیل در محیط انسیس برآورد کنید. مدول یانگ فولاد $E = 200 \text{ Gpa}$ ، نسبت پواسن $\nu = 0.3$ ، چگالی $\rho = 7.86 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$ و $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

شکل ۴-۱۲۴

برنامه APDL معادل این حالت عبارت است از:

```

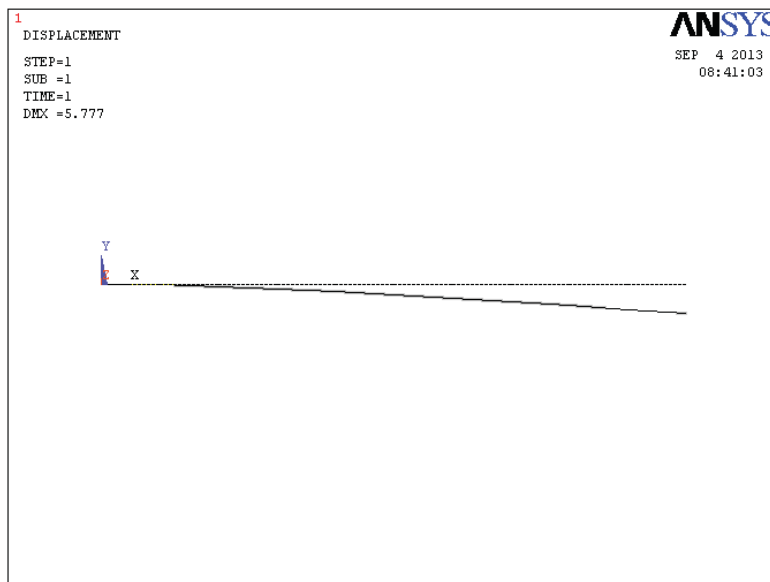
/PREP\
K,\
K,۲,۱۰۰۰
L,\,۲
MP,EX,\,۲E۰
MP,PRXY,\,۰,۲
MP,DENS,\,N,۸۷E-۶
ET,\,BEAM\
R,\,۰۰۰,۴۱۶۶,۶۷,۱۰ !Real,AREA,IZZ,HEIGHT,SHEARZ,ISTRN,ADDMAS
LESIZE,ALL,\,۰۰ !LESIZE,NLI,SIZE,ANGSIZE,NDIV,...
LMESH,ALL
ACEL,\,۰,۸,۸,۰
FINISH
!*
/SOLU
SOLVE
FINISH
/POST\
PRRSOL,F !NODE FX FY
!* \ ۰,۰ ۳۸,۵۱۴
PLDISP,۲ ! Def+undefedge
PLNSOL,U,SUM,۰
ETABLE,SMAX,NMISC,\ !
PRETAB,SMAX
FINISH
/EOF

```

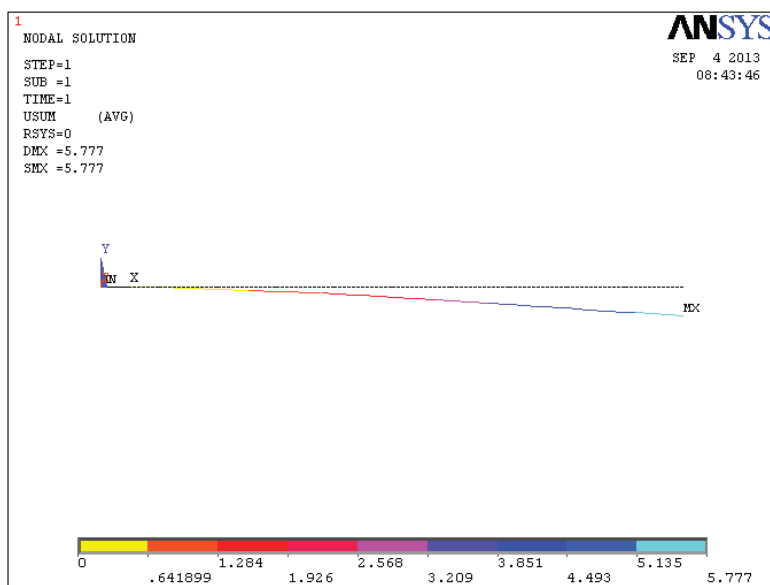
نتایج پلات *PLDISP* و *PLNSOL* طبق شکل ها است. تنش خمشی ماکزیمم در گره *I* هر المان عبارتند از:

جدول ۴-۱۵

ELEM	SMAX
۱	۲۳,۱۰۸
۲	۱۸,۷۱۸
۳	۱۴,۷۸۹
۴	۱۱,۳۲۳
۵	۸,۳۱۹۰
۶	۵,۷۷۷۱
۷	۳,۶۹۷۳
۸	۲,۰۷۹۸
۹	-۰,۹۲۴۳۴
۱۰	-۰,۲۳۱۰۸



شکل ۴-۱۲۵



شکل ۴-۱۲۶

مسائل ۸۳) مثال ۴-۴۹ را با روش دستی حل و نتایج را با نتایج بالا مقایسه نمایید. آیا جواب تحلیلی هم برای این مساله می‌توانید ارائه نمایید؟

۴-۳۳ تعمیم شکل ضعیف برای مسایل سه بعدی

معادلات شکل قوی و ضعیف از نظر ساختاری در حالت سه بعدی فرقی با حالت دو بعدی نمی‌کنند فقط بُعد سوم بردارها هم به آنها اضافه می‌گردد. بردار \vec{q} برحسب بردارهای یک سه بعدی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k} \quad (۴-۳۹)$$

شکل ماتریسی این بردار به صورت $q = [q_x, q_y, q_z]^T$ است. در این حالت دامنه مساله، یک حجم (Ω) و مرزش، یک سطح (T) می‌باشند. عملگر گرادیان در حالت سه بعدی به صورت‌های برداری و ماتریسی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۴-۳۹)$$

$$\vec{\nabla} \theta = \vec{i} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (۴-۳۹۶)$$

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \nabla \theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (۴-۳۹۷)$$

با تعریف بالا از بردارها و عملگر برداری گرادیان، دیورژانس و لاپلاس میدان برداری عبارتند از:

$$\text{div } \vec{q} = \nabla \cdot \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \quad (۴-۳۹۸)$$

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^T \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۴-۳۹۹)$$

شکل قوی در بیان برداری و ماتریسی با معادلات پیس گفته دو بعدی یکی هستند. لازم به ذکر است که قانون فوریه که مولفه‌های درجه حرارت را به مولفه‌های شار حرارت ربط می‌دهد برحسب یک ماتریس مثبت معین متقارن 3×3 (D) تعریف می‌شود.

$$D = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (۴-۴۰۰)$$

شکل ضعیف نیز در حالت سه بعدی عین حالت دو بعدی پیش گفته است.

۴-۳۳-۱ المان های سه بعدی

دو نوع اصلی از المان های سه بعدی، المان های شش وجهی و چهار وجهی هستند.

۴-۳۳-۲ المانهای شش وجهی

دامنه المان والدین مربوط به المان شش وجهی هشت گرهی (المان آجر) یک مکعب واحد با مختصات ξ و ζ است. نگاشت به دامنه فیزیکی به صورت

$$x(\xi, \eta, \zeta) = N^{AH}(\xi, \eta, \zeta)x^e \quad (۴-۱۰-۴)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = N^{AH}(\xi, \eta, \zeta)y^e$$

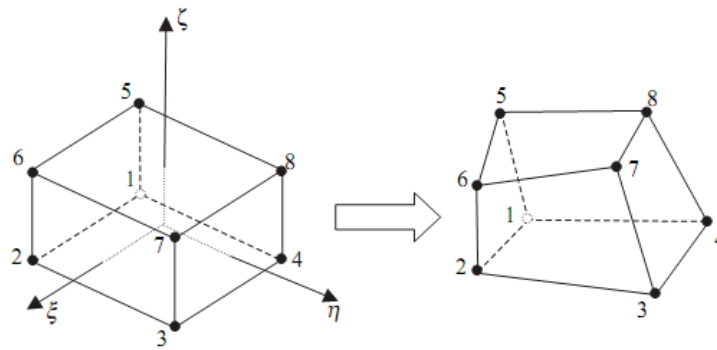
$$z(\xi, \eta, \zeta) = N^{AH}(\xi, \eta, \zeta)z^e$$

است که در آن N^{AH} توابع شکل تعریف شده در سیستم مختصات والدین طبق شکل ۴-۱۲۷ می باشند. توابع شکل شش وجهی هشت گرهی را می توان با ضرب تانسوری توابع شکل خطی یک بعدی پیش گفته تعریف کرد:

$$N_L^{AH}(\xi, \eta, \zeta) = N_I^{\xi L}(\xi)N_J^{\eta L}(\eta)N_K^{\zeta L}(\zeta) \quad (۴-۲۰-۴)$$

رابطه بین شماره های گرهی یک بعدی و المان های شش وجهی در جدول ۴-۱۶ آورده شده است. تقریب θ^e با استفاده از توابع شکل به صورت زیر صورت می گیرد:

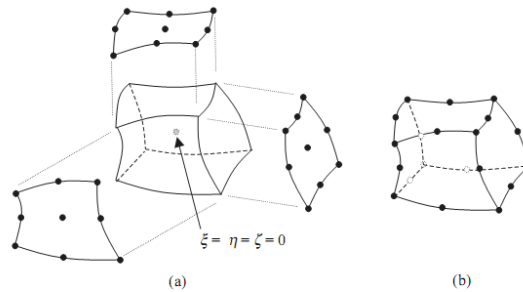
$$\theta^{(e)}(\xi, \eta, \zeta) = N^{AH}(\xi, \eta, \zeta)d^{(e)} \quad (۴-۲۰-۴)$$



شکل ۴-۱۲۷

جدول ۱۶-۴

L	I	J	K
1	1	1	1
2	2	1	1
3	2	2	1
4	1	2	1
5	1	1	2
6	2	1	2
7	2	2	2
8	1	2	2



شکل ۱۲۸-۴

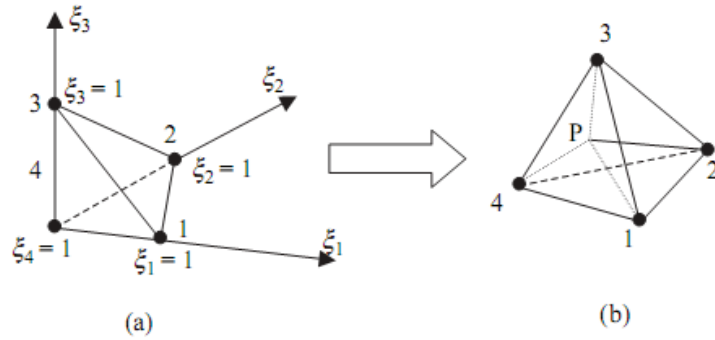
پیوستگی توابع میانجیابی را می‌توان با بررسی رفتار آنها در امتداد یک وجه المان مشاهده کرد. به عنوان مثال برای $\zeta=1$ ، جابجیه $N_{\zeta=1}^{\zeta L}(\xi)$ ، از رابطه توابع شکل N^{HL} ملاحظه می‌شود $\theta^{(e)}(\xi, \eta, 1)$ یک تابع دوخطی است که با چهار مقدار گرهی روی این وجه می‌تواند به طور منحصر بفرد تعریف شود به طوری که پیوستگی C^0 تضمین شود.

المان‌های شش وجهی مرتبه بالاتر را هم می‌توان با ضرب تانسوری توابع شکل یک بعدی مرتبه بالاتر به دست آورد. شکل ۱۲۸-۴ یک المان شش وجهی بیست و هفت گرهی را نشان می‌دهد. ماتریس ژاکوبی $J^{(e)}$ در سه بعد عبارت است از:

$$J^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.4-4)$$

انتگرال روی دامنه المان شش وجهی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$I = \int_{\Omega} f(\xi, \eta, \zeta) d\Omega = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=-1}^1 |J^e(\xi, \eta, \zeta)| f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{n_{gp}} \sum_{j=1}^{n_{gp}} \sum_{k=1}^{n_{gp}} w_i w_j w_k |J^e(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)| f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (4.5-4)$$



شکل ۴-۱۲۹

۴-۳۳-۳ المان‌های چهار وجهی

دامنه‌های والدین و فیزیکی چهار وجهی در شکل ۴-۱۲۹ نشان داده شده‌اند. مختصات چهار وجهی یک نقطه P با $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ نشان داده می‌شوند. این مختصات، مختصات حجم چهار وجهی را به این صورت تعریف می‌کنند که هر نقطه P در دامنه المان فیزیکی حجم (Ω^e) المان اصلی را به چهار وجهی تقسیم می‌کند. به این ترتیب مختصات حجم عبارت خواهند بود از:

$$\xi_1 = \frac{\text{حجم } P_{234}}{\Omega^e}, \xi_2 = \frac{\text{حجم } P_{134}}{\Omega^e}, \xi_3 = \frac{\text{حجم } P_{124}}{\Omega^e}, \xi_4 = \frac{\text{حجم } P_{123}}{\Omega^e}$$

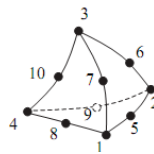
در این حالت $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 1$ ، هر مختصه روی یک سطح صفر و در گره مقابل به آن سطح یک است. توابع شکل المان چهار وجهی چهارگرمی عبارتند از:

$$N_1^{\xi Tet} = \xi_1 \tag{۴-۰۷}$$

$$N_2^{\xi Tet} = \xi_2$$

$$N_3^{\xi Tet} = \xi_3$$

$$N_4^{\xi Tet} = \xi_4 = 1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3$$



شکل ۴-۱۳۰

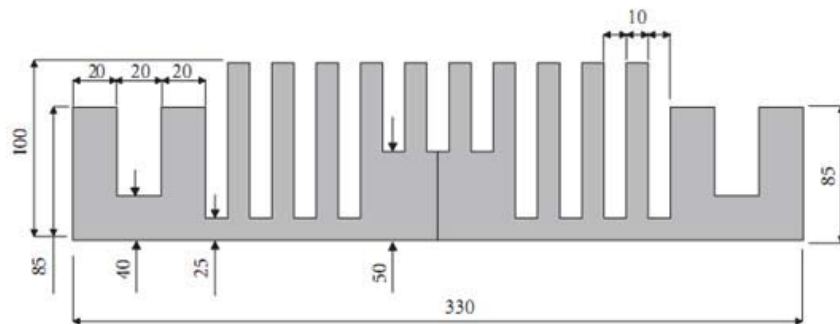
جدول ۱۷-۴

I	$\xi_1(x_i^e, y_i^e)$	$\xi_2(x_i^e, y_i^e)$	$\xi_3(x_i^e, y_i^e)$	$\xi_4(x_i^e, y_i^e)$	$N_i^{TOTet}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$
1	1	0	0	0	$2\xi_1(\xi_1 - 1/2)$
2	0	1	0	0	$2\xi_2(\xi_2 - 1/2)$
3	0	0	1	0	$2\xi_3(\xi_3 - 1/2)$
4	0	0	0	1	$2\xi_4(\xi_4 - 1/2)$
5	1/2	1/2	0	0	$4\xi_1\xi_2$
6	0	1/2	1/2	0	$4\xi_2\xi_3$
7	1/2	0	1/2	0	$4\xi_1\xi_3$
8	1/2	0	0	1/2	$4\xi_1\xi_4$
9	0	1/2	0	1/2	$4\xi_2\xi_4$
10	0	0	1/2	1/2	$4\xi_3\xi_4$

جدول ۱۸-۴ نقاط و وزن‌های کوادراتور گوسی برای دامنه‌های چهار وجهی

Integration order	Degree of precision	ξ_1	ξ_2	ξ_3	Weights
One-point	2	0.25	0.25	0.25	1
Four-point	3	0.58 541 020	0.13 819 660	0.13 819 660	0.25
		0.13 819 660	0.58 541 020	0.13 819 660	0.25
		0.13 819 660	0.13 819 660	0.58 541 020	0.25
		0.13 819 660	0.13 819 660	0.13 819 660	0.25
Five-point	4	0.25	0.25	0.25	-0.8
		1/3	1/6	1/6	0.45
		1/6	1/3	1/6	0.45
		1/6	1/6	1/3	0.45
		1/6	1/6	1/6	0.45

یک المان چهار وجهی ده گرهی در شکل ۱۳۰-۴ نشان داده شده است. توابع شکل به روشی مشابه توابع شکل المان‌های مثلثی شش گرهی به دست می‌آیند. به عنوان مثال موقع تعریف N_i^{TOTet} ، دنبال تابعی خواهیم بود که در گره I برابر یک و در سایر گره‌ها صفر بوده و حداکثر از درجه دو باشند. تابع به ازای $I=1$ این شرایط را اقتناع می‌کند. توابع شکل این نوع المان در جدول ۱۷-۴ آمده است.



شکل ۱۳۱-۴

فرمول‌های انتگرال‌گیری برای المان چهار وجهی مشابه المان‌های مثلثی هستند. ماتریس ژاکوبی هم با حالت المان‌های شش وجهی یکسان است جز این که مشتقات به جای ξ, η, ζ و نسبت به ξ_1, ξ_2, ξ_3 گرفته می‌شوند. نقاط و وزن‌های گوسی در جدول ۴-۱۸ خلاصه شده‌اند.

مثال ۵۸. شکل ۴-۱۳۱ پیکره‌بندی و هندسه یک فین آلومینیومی با هدایت حرارتی ویژه $k = 170 \frac{W}{mK}$ را نشان می‌دهد. سطح زیرین فین در معرض یک شار حرارتی ثابت $q = 100 \frac{W}{m^2}$ قرار دارد. جریان هوا روی سطوح دیگر فین باعث می‌شود دمای اطراف در 293 درجه کلوین قرار داشته باشد. ضریب انتقال حرارت بین فین و اتمسفر اطراف $h = 40 \frac{W}{m^2K}$ است. توزیع درجه حرارت داخل فین را پیدا کنید.

برنامه APDL معادل این مثال عبارت است از:

```
ii
NUMCMP,AREA
RECTNG,105,165,85,100
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,-145,-125,40,85
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,125,145,40,85
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,-105,-95,25,100
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,95,105,25,100
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,-85,-75,25,100
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,-65,-55,25,100
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,-45,-35,25,100
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,85,75,25,100
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,65,55,25,100
```

```
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,25,45,25,100

ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,-25,-15,50,100

ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,-5,5,50,100

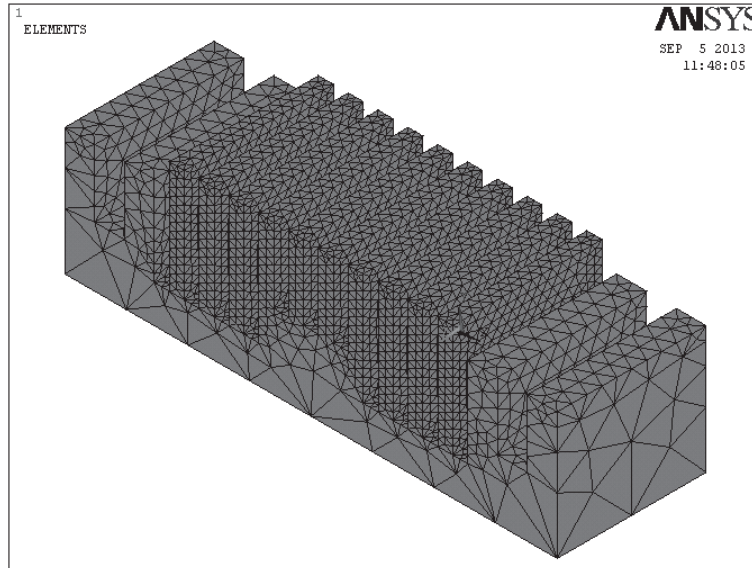
ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
RECTNG,15,25,50,100

ASBA,1,2
NUMCMP,AREA
VOFFST,1,100

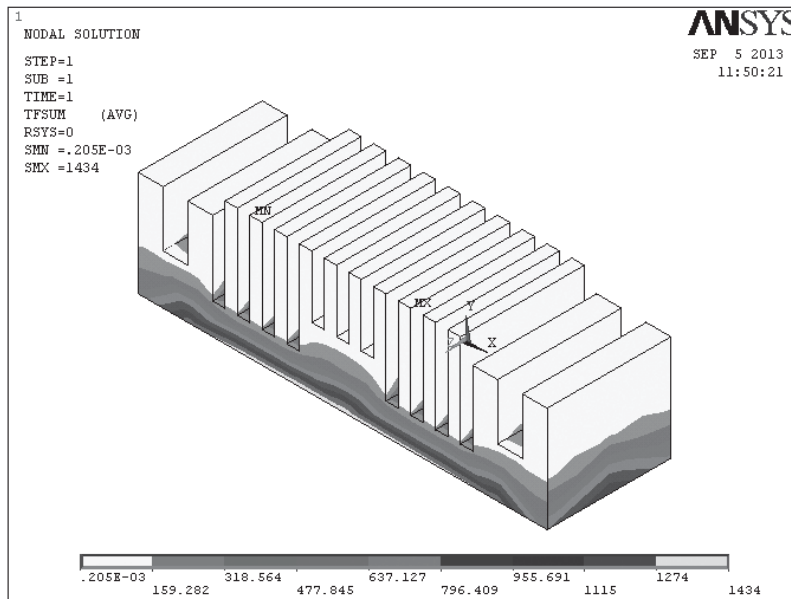
VMESH,1

ASEL,S,LOC,Y,0
ASEL,INVE
SFA,ALL,,CONV,40,293
ASEL,ALL
ASEL,S,LOC,Y,0

SFA,ALL,,HFLUX,1000
ASEL,ALL
FINISH
/SOLU
SOLVE
FINISH
/POST\
PLNSOL,TF,SUM
PATH,AB,230,20
PPATH,1,,0,0,0
PPATH,2,,0,50,0
PDEF,,TG,SUM
PLPATH,TGSUM
FINISH
```



شکل ۴-۱۳۳



شکل ۴-۱۳۴

۴-۳۴ مسایل وابسته به زمان (یک بعدی)

در این بخش، مدل‌های المان محدود مسایل وابسته به زمان یک بعدی را تدوین نموده و طرح‌های تقریب زمانی برای تبدیل معادلات دیفرانسیل عادی بر حسب زمان به معادلات جبری را تشریح می‌کنیم. مدل‌های المان محدود نوع وابسته به زمان از معادلات دیفرانسیل بخش‌های قبل را در نظر می‌گیریم. این معادلات شامل معادلات پارابولیک (یعنی مشتق زمانی اول) و هیپربولیک (یعنی مشتق زمانی دوم) مرتبه دوم (در فضا) و معادلات هیپربولیک مرتبه چهار حاکم بر خمش تیرها می‌شوند. یادآوری می‌شود که معادلات پارابولیک مرتبه دوم در انتقال حرارت و مکانیک سیالات مطرح می‌شوند در حالی که معادلات هیپربولیک مرتبه دوم و چهارم در مسایل مکانیک جامدات کاربرد دارند.

فرمول بندی المان محدود مسایل وابسته به زمان در دو مرحله انجام می‌گیرد.

(۱) تقریب فضایی: با انتخاب حل آزمایشی به صورت

$$u(x, t) \approx \tilde{u}^e(x, t) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \phi_j^e(x) \quad (4-8-4)$$

مدل المان محدود فضایی معادله با استفاده از روال مسایل استاتیک یا پایدار در عین در برداشتن تمام عبارات وابسته زمانی در فرمول‌بندی، تدوین می‌شود. در این مرحله یکسری معادلات دیفرانسیل عادی (یعنی یک سیستم معادلات شبه گسسته) در لحظه برای متغیرهای گرهی $u_j^e(t)$ المان به دست می‌آید. معادله (۴-۸-۴) تقریب فضایی u برای لحظه t را بیان می‌کند. وقتی که حل مساله قابل تفکیک به توابع فقط زمانی و فقط فضایی مثل $U(x, t) = T(t)X(x)$ باشد، این تقریب به وضوح توجیه‌پذیر است. در غیر این صورت می‌توان نشان داد که به شرط کوچک بودن گام زمانی به قدر کافی، تقریب خوبی از حل واقعی قابل حصول خواهد بود.

(۲) تقریب زمانی: سیستم معادلات دیفرانسیل اغلب با استفاده از فرمول‌های تفاضل محدود (*finite difference*) بازم برحسب زمان تقریب زده می‌شود. در این مرحله امکان تبدیل سیستم معادلات دیفرانسیل عادی در قالب مجموعه‌ای از معادلات جبری میان u_j^e در لحظه t_{s+1} فراهم می‌شود که Δt گام زمانی و s یک عدد صحیح است. تمام طرح‌های تقریب زمانی دنبال یافتن u_j در لحظه t_{s+1} با استفاده از مقادیر معلوم u_j از لحظه‌های قبل هستند:

$$u_{s+1} \text{ را با استفاده از } \{u\}_s, \{u\}_{s-1} \text{ و ... محاسبه کنید}$$

بنابراین در انتهای تقریب دو مرحله‌ای بالا، جواب فضایی پیوسته در بازه‌های زمانی گسسته وجود دارند:

$$\tilde{u}^e(x, t_s) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t_s) \phi_j^e(x) \quad (s = 0, 1, \dots) \quad (4-9-4)$$

برای مطالعه جزئیات در حل تقریب بالا معادله دیفرانسیل کلی

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} \left(b \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial x^{\gamma}} \right) + c_1 u + c_2 \frac{\partial u}{\partial t} + c_3 \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial t^{\gamma}} = f(x, t) \quad (4-110)$$

را با شرایط مرزی

$$u(x, t) \quad \text{یا} \quad -a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial x^{\gamma}} \right) \quad \text{معین} \quad (4-111)$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad \text{یا} \quad -b \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial x^{\gamma}} \quad \text{معین} \quad (4-112)$$

در $x=0, L$ و شرایط اولیه

$$c_4 u(x, 0) \quad \text{و} \quad c_5 \dot{u}(x, 0) + c_6 u(x, 0) \quad (4-113)$$

که $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ است در نظر می‌گیریم.

۳۵-۴ مدل های المان محدود شبه گسسته (semidiscrete)

شکل ضعیف معادله دیفرانسیل کلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\cdot = \int_{x_A}^{x_B} w \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} \left(b \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial x^{\gamma}} \right) + c_1 u + c_2 \frac{\partial u}{\partial t} + c_3 \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial t^{\gamma}} - f \right] dx \quad (4-114)$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial w}{\partial x} a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^{\gamma} w}{\partial x^{\gamma}} \left(b \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial x^{\gamma}} \right) + c_1 w u + c_2 w \frac{\partial u}{\partial t} + c_3 w \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial t^{\gamma}} - w f \right] dx$$

$$+ \left[w \left[\left(-a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial x^{\gamma}} \right) \right] + \frac{\partial w}{\partial x} \left(-b \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial x^{\gamma}} \right) \right]_{x_A}^{x_B}$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^{\gamma} w}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial x^{\gamma}} + c_1 w u + c_2 w \frac{\partial u}{\partial t} + c_3 w \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial t^{\gamma}} - w f \right) dx$$

$$- \hat{Q}_1 w(x_A) - \hat{Q}_2 w(x_B) - \hat{Q}_3 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x_A} - \hat{Q}_4 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x_B}$$

که

$$\hat{Q}_\lambda = \left[-a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \right) \right]_{x_A}, \quad \hat{Q}_\gamma = \left(b \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \right)_{x_A} \quad (415-4)$$

$$\hat{Q}_\tau = - \left[-a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \right) \right]_{x_B}, \quad \hat{Q}_\xi = - \left(b \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \right)_{x_B}$$

با انتخاب $u(x, t) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t) N_j^e(x)$ فرض کردیم که u قابل تجزیه به یک مولفه وابسته به زمان فقط و یک مولفه وابسته به فقط فضا است که فرض درکل معتبری نیست ولی اگر گام زمانی به قدر کافی کوچک باشد حصول جوابهای دقیق امکان پذیر می باشد. با این حال حل المان محدود به دست آمده در آخر تحلیل در فضا پیوسته است ولی برحسب زمان پیوسته نیست. جواب به دست آمده به شکل زیر خواهد بود:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t_s) N_j^e(x) = \sum_{j=1}^n (u_j^e)^e N_j^e \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (416-4)$$

که $(u_j^e)^e$ مقدار $u(x, t)$ در لحظه $t=t_s$ و گره j از المان Ω^e است. با جایگذاری $w = N_i^{(x)}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{dN_i}{dx} \left(\sum_{j=1}^n \frac{dN_j}{dx} \right) + b \frac{d^\gamma N_i}{dx^\gamma} \left(\sum_{j=1}^n u_j \frac{d^\gamma N_j}{dx^\gamma} \right) + c \cdot \phi_i \left(\sum_{j=1}^n u_j N_j \right) + c_1 N_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{du_j}{dt} N_j \right) \right. \\ & \quad \left. + c_\gamma N_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{d^\gamma u_j}{dt^\gamma} N_j \right) - N_i f \right] dx - \\ & - \hat{Q}_\lambda N_i(x_A) - \hat{Q}_\tau N_i(x_B) - \hat{Q}_\gamma \left(-\frac{dN_i}{dx} \right)_{x_A} - \hat{Q}_\xi \left(-\frac{dN_i}{dx} \right)_{x_B} \quad (417-4) \\ & = \sum_{j=1}^n \left[(K_{ij}^\lambda + K_{ij}^\gamma + M_{ij}) u_j + M_{ij}^\lambda \frac{du_i}{dt} + M_{ij}^\gamma \frac{d^\gamma u_i}{dt^\gamma} \right] - F_i \end{aligned}$$

در قالب ماتریسی داریم:

$$[K][u] + [M^\lambda][\dot{u}] + [M^\gamma][\ddot{u}] = [F] \quad (418-4)$$

$$[K] = [K^\lambda] + [K^\gamma] + [M^\cdot] \quad (419-4)$$

$$M_{ij}^\lambda = \int_{x_A}^{x_B} c \cdot \phi_i \phi_j dx \quad (420-4)$$

$$M_{ij}^\lambda = \int_{x_A}^{x_B} c_\gamma \phi_i \phi_j dx, \quad M_{ij}^\gamma = \int_{x_A}^{x_B} c_\gamma \phi_i \phi_j dx \quad (421-4)$$

$$K_{ij}^\lambda = \int_{x_A}^{x_B} a \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx, \quad K_{ij}^\gamma = \int_{x_A}^{x_B} b \frac{d^\gamma \phi_i}{dx^\gamma} \frac{d^\gamma \phi_j}{dx^\gamma} dx \quad (422-4)$$

$$F_i = \int_{x_A}^{x_B} \phi_i f dx + \hat{Q}_i \quad (423-4)$$

۴-۳۶ تقریب‌های زمانی

به عنوان حالات خاص معادله شکل ضعیف استخراج شده، حاوی معادله پارابولیک ($[M^*] = [0]$) و معادله هیپرپولیک ($[M^*] = [0]$) می‌باشد. در حالت اول تقریب زمانی معادلات پارابولیک و در حالت دوم معادلات هیپرپولیک در نظر گرفته می‌شوند.

حالت اول- معادلات پارابولیک: معادله پارابولیک زیر را در نظر بگیرید:

$$[M^*][\dot{u}] + [k][u] = [F] \quad (4-24)$$

شرط اولیه $[u]_s = [u]$ است یعنی مقادیر u در لحظه صفر ($[u]$) بصورت بردار ستونی \square حاوی u_j می‌باشند. متداولترین روش حل معادله بالا، « خانواده α از تقریب » است که در آن یک میانگین وزن دار از مشتقات زمانی یک متغیر وابسته در دو گام متوالی با میانبایی خطی از مقادیر متغیر در این دو گام تقریب زده می‌شود.

$$(\lambda - \alpha)[\dot{u}]_s + \alpha[\dot{u}]_{s+\lambda} = \frac{[u]_{s+\lambda} - [u]_s}{\Delta t_{s+\lambda}} \quad \text{for } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4-25)$$

که $[]_s$ مقدار کمیت داخل قلاب در لحظه $t = t_s = \sum_{i=1}^s \Delta t_i$ و $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$ s امین گام زمانی است. اگر بازه زمانی $[0, T]$ به گام‌های زمانی مساوی تقسیم شود $t_s = s\Delta t$ معادله بالا را می‌توان به صورت

$$[u]_{s+\lambda} = [u]_s + \Delta t[\dot{u}]_{s+\alpha} \quad (4-26)$$

$$[\dot{u}]_{s+\alpha} = (\lambda - \alpha)[\dot{u}]_s + \alpha[\dot{u}]_{s+\lambda} \quad \text{for } 0 \leq \alpha \leq 1$$

به ازای مقادیر مختلف α ، روشهای شناخته شده انتگرالگیری عددی زیر به دست می‌آیند:

$$\alpha = 0: \text{ روش تفاضل رو به جلو (اولر-بطور مشروط پایدار): } O(\Delta t) =$$

$$\frac{1}{4}: \text{ روش کرنک-نیکلسن (پایدار): } O((\Delta t)^2)$$

$$\frac{2}{3}: \text{ روش گالرکین (پایدار): } O((\Delta t)^2)$$

$$\alpha = 1: \text{ روش تفاضل رو به عقب (پایدار): } O(\Delta t)$$

از طرفی چون رابطه (4-24) برای هر $t > 0$ صادق است لذا برای $t = t_s$ و $t = t_{s+1}$ هم صادق است و

$$([M^*] = [M]) \text{ داریم}$$

$$[M][\dot{u}]_s + [K]_s[u]_s = [F]_s \quad (4-27)$$

$$[M][\dot{u}]_{s+1} + [K]_{s+1}[u]_{s+1} = [F]_{s+1} \quad (4-28)$$

در روابط (۴۲۷-۴ و ۴۲۸-۴) فرض شد که ماتریس جرم $[M]$ مستقل از زمان است. با ضرب طرفین رابطه (۴۲۵-۴) در Δt_{s+1} و ضرب $[M]$ در طرفین داریم:

$$\Delta t_{s+1} \alpha [M][\dot{u}]_{s+1} + \Delta t_{s+1} (1 - \alpha) [M][\dot{u}]_s = [M]([u]_{s+1} - [u]_s) \quad (۴۲۹-۴)$$

با جایگذاری $[M][\dot{u}]_{s+1}$ و $[M][\dot{u}]_s$ از روابط (۱۵) در (۱۶) خواهیم داشت:

$$\Delta t_{s+1} \alpha ([F]_{s+1} - [K]_{s+1}[u]_{s+1}) + \Delta t_{s+1} (1 - \alpha) ([F]_s - [K]_s[u]_s) = [M]([u]_{s+1} - [u]_s) \quad (۴۳۰-۴)$$

با مرتب کردن رابطه (۴۳۰-۴) برحسب معلومات و مجهولات خواهیم داشت:

$$[\bar{K}]_{s+1}[u]_{s+1} = [\bar{K}]_s[u]_s + [\hat{F}]_{s,s+1} \quad (۴۳۱-۴)$$

که در آن

$$[\bar{k}]_{s+1} = [M^\wedge] + a_1[k]_{s+1}, \quad [\bar{k}]_s = [M^\wedge] - a_2[k]_s \quad (۴۳۲-۴)$$

$$[\hat{F}]_{s,s+1} = \Delta t_{s+1} [\alpha [F]_{s+1} + (1 - \alpha) [F]_s], \quad a_1 = \alpha \Delta t_{s+1}, \quad a_2 = (1 - \alpha) \Delta t_{s+1}$$

در استخراج این روابط فرض شده است که $[M^\wedge]$ مستقل از زمان و گام زمانی غیر یکنواخت است.

معادلات (۴۳۲-۴) برای هر المان نمونه‌ای صادقند. مونتاژ، اعمال شرایط مرزی و حل معادلات مونتاژ شده همچون حالت مسایل استاتیکی (یا حالت پایدار) است. محاسبه $[\bar{K}]$ و $[\hat{F}]$ در لحظه $t=0$ به دانستن شرایط اولیه $[u]$ و تغییرات زمانی $[F]$ نیاز دارد. لازم به ذکر است که برای $\alpha=0$ (روش تفاضل رو به جلو) $[M^\wedge] = [\bar{K}]$. زمانی که ماتریس جرم $[M^\wedge]$ قطری است، معادلات (۴۳۲-۴) صریح خواهند شد و می‌توان $[u]_{s+1}$ را مستقیماً بدون عکس کردن $[\bar{K}]$ حل کرد. ماتریس جرم به دست آمده براساس شکل ضعیف که ماتریس جرم سازگار نامیده می‌شود قطری نیست ولی چندین روش برای قطری کردن آن وجود دارد که متعاقباً ذکر می‌شوند.

۴-۳۷ پایداری و دقت

چون رابطه (۴۲۵-۴) یک تقریب است که برای استخراج رابطه (۴۳۲-۴) مورد استفاده قرار می‌گیرد، در حل $[u]_{s+1}$ در هر گام زمانی خطا وارد می‌کند. علاوه بر خطای قطع کردن (*truncation*) وارده موقع تقریب مشتق، خطاهای گرد کردن هم می‌تواند به خاطر حساسگیری محدود به کار رفته در محاسباتمان اعمال گردد. چون جواب t_{s+1} به جواب t_s بستگی دارد، خطا با زمان می‌تواند افزایش یابد. اگر افزایش خطا با

زمان بی حد و محدود باشد، طرح یا روش حل ناپایدار خواهد بود. اما اگر محدود داشته (یعنی در یک گام زمانی افزایش و برای دیگری کاهش یافت اما هیچ وقت از مقدار محدود مشخصی عدول نکرد) به این طرح حل پایدار می‌گویند. به روش عددی مربوط به رابطه سازگار با مساله پیوسته گفته می‌شود اگر خطاهای انقطاع و گرد کردن با $\Delta t \rightarrow 0$ به سمت صفر پیش بروند. دقت روش حل عددی معیاری از نزدیکی بین حل‌های تقریبی و دقیق است در صورتی پایداری حل معیاری از محدود بودن حل تقریبی با زمان است. همانطور که انتظار می‌رود ساینز گام زمانی بردقت و پایداری تاثیر می‌گذارد. به طرح تقریب زمانی‌ای که به ازای t_s و Δt ثابت، مقدار عددی $[u]_s$ با $\Delta t \rightarrow 0$ به مقدار واقعی آن $\{u(t_s)\}$ همگرا می‌شود، همگرا (convergent) می‌گویند. دقت برحسب نرخ که تحت آن حل تقریبی همگرا می‌شود، اندازه گیری می‌شود. اگر طرح عددی پایدار و سازگار باشد همگرا هم خواهد بود.

به طرح عددی‌ای «پایدار مشروط» گفته می‌شود که فقط در محدوده گام زمانی معینی پایدار باشد. برای تمام طرحهای عددی که در آنها $\alpha < \frac{1}{2}$ ، خانواده α از تقریب ها فقط زمانی پایدار خواهند بود که گام زمانی شرط زیر را اقتناع کند.

$$\Delta t < \Delta t_{cr} \equiv \frac{\tau}{(1-2\alpha)\lambda} \quad (4-43)$$

که λ بزرگترین مقدار ویژه معادلات المان محدود (4-43) است. لازم به ذکر است که باید از همان مشی که برای تحلیل گذرا استفاده می‌شود برای محاسبه مقادیر ویژه نیز استفاده شود.

مثال ۵۹) مساله هدایت حرارت گذرای را با معادله

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < 1$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(1, t) = 0 \quad \text{با شرایط مرزی}$$

$$u(x, 0) = 1.0 \quad \text{و شرایط اولیه}$$

در نظر بگیرید. با مقایسه معادله دیفرانسیل با معادله (4-10) ملاحظه می‌شود $c_1 = 0, b = 0, a = 1$ ، $f = 0$ است. مدل المان محدود از رابطه (4-24) عبارت می‌شود از:

$$[M^e][\dot{u}] + [K^e][u] = [Q^e]$$

که در آن

$$M_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \phi_i^e \phi_j^e dx, \quad k_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d\phi_i^e}{dx} \frac{d\phi_j^e}{dx} dx$$

با انتخاب المان خطی داریم:

$$\frac{l}{\bar{\nu}} \begin{bmatrix} \nu & \nu \\ \nu & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_\nu \\ \dot{u}_\nu \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{l} \begin{bmatrix} \nu & -\nu \\ -\nu & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\nu \\ u_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_\nu \\ Q_\nu \end{bmatrix}$$

کاربرد «خانواده α از تقریب» معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$([M^e] + \Delta t \alpha [k^e])[u^e]_{s+1} = ([M^e] + \Delta t(1-\alpha)[K^e])[u^e]_s + \Delta t(\alpha[Q^e]_{s+1} + (1-\alpha)[Q^e]_s)$$

برای یک المان ($l=1$)

$$\begin{bmatrix} \frac{l}{\bar{\nu}} + \frac{\alpha \Delta t}{l} & \frac{l}{\bar{\nu}} - \frac{\alpha \Delta t}{l} \\ \frac{l}{\bar{\nu}} - \frac{\alpha \Delta t}{l} & \frac{l}{\bar{\nu}} + \frac{\alpha \Delta t}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_\nu \\ U_\nu \end{bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} \frac{l}{\bar{\nu}} - \frac{(1-\alpha)\Delta t}{l} & \frac{l}{\bar{\nu}} + \frac{(1-\alpha)\Delta t}{l} \\ \frac{l}{\bar{\nu}} + \frac{(1-\alpha)\Delta t}{l} & \frac{l}{\bar{\nu}} - \frac{(1-\alpha)\Delta t}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_\nu \\ U_\nu \end{bmatrix}_s + \Delta t \begin{bmatrix} Q_\nu \\ Q_\nu \end{bmatrix}$$

که $\bar{Q}_t = \alpha(Q_t)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_t)_s$ شرایط مرزی مساله ایجاب می‌کند که $s > 0$ (یا $t > 0$) و $(Q_\nu)_s = 0$ و $(U_\nu)_s = 0$ درحالی که شرایط اولیه لازم دارد که:

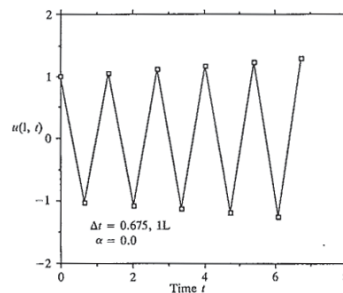
$$(U_\nu)_0 = 1, (U_\nu)_0 = 1, \quad t=0$$

چون شرایط اولیه باید با شرایط مرزی سازگار باشد $(U_\nu)_0 = 1$. با اعمال شرایط مرزی برای یک المان خطی می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{l}{\bar{\nu}} + \frac{\alpha \Delta t}{l}\right)(U_\nu)_{s+1} = \left[\frac{l}{\bar{\nu}} - \frac{(1-\alpha)\Delta t}{h}\right](U_\nu)_s$$

طرح تفاضل رو به جلو ($\alpha=0$) به طور مشروط پایدار است. گام زمانی بحرانی با رابطه $\Delta t_{cr} = \frac{2}{\lambda_{max}}$ تعیین می‌شود که در آن λ_{max} ماکزیمم مقدار ویژه مرتبط با رابطه المانی یعنی

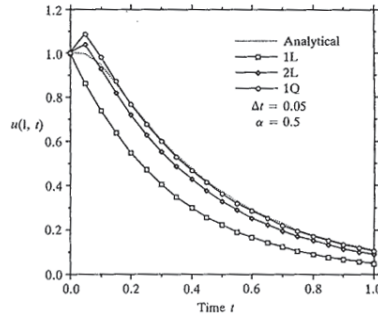
$$-\lambda[M][U] + [K][U] = [0]$$



شکل ۴-۱۳

است که از آن $\lambda_{max} = 3$ بنابراین $\Delta t_{cr} = 0.1117$. بنابراین برای پایدار بودن روش تفاضل رو به جلو باید Δt کوچکتر از Δt_{cr} باشد. در شکل ۴-۱۳۵ نمودار $u-t$ برای حالت $\Delta t = 0.075$ را نشان می‌دهد که ناپایدار است. برای طرح‌های پایدار غیرمشروط ($\alpha \geq \frac{1}{2}$) محدودیتی از نظر گام زمانی وجود ندارد. ولی برای حصول به نتایج دقیق، باید گام زمانی را به صورت کسری از Δt_{cr} فرض کرد. البته دقت حل به سبب هم بستگی دارد. هر چه سبب کمتر شود Δt_{cr} هم کاهش خواهد یافت.

شکل ۴-۱۳۶ نمودار $u(1,t)$ را برحسب زمان و به ازای $\alpha = 0.5$ و $\Delta t = 0.05$ نشان می‌دهد. جوابهای پیش‌بینی شده با مش‌های یک و دو المان خطی و مش با یک المان درجه دوم با جواب دقیق مقایسه شده‌اند. همگرایی حل با افزایش تعداد المانها مشخص است. حل‌های المان محدود به دست آمده با روش‌های مختلف، گام‌های زمانی و مش‌های متفاوت با حل دقیق در جدول ۴-۱۹ مقایسه شده‌اند.



شکل ۴-۱۳۶

جدول ۴-۱۹

Time t	1L		Linear elements ($\alpha = 0.5$)				Quadratic elements ($\alpha = 0.5, t = 0.05$)			Exact solution
	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	1L	2L	4L	8L	1Q	2Q	4Q	
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.05	0.8500	0.8696	0.8605	1.0359	0.9951	0.9933	1.0870	0.9942	0.9928	0.9969
0.10	0.7225	0.7561	0.7404	0.9279	0.9588	0.9554	0.9819	0.9550	0.9549	0.9493
0.15	0.6141	0.6575	0.6371	0.8169	0.8639	0.8707	0.8693	0.8831	0.8725	0.8642
0.20	0.5220	0.5718	0.5482	0.7176	0.7557	0.7694	0.7679	0.7633	0.7731	0.7723
0.25	0.4437	0.4972	0.4717	0.6300	0.6759	0.6824	0.6780	0.6933	0.6855	0.6854
0.30	0.3771	0.4323	0.4059	0.5533	0.5906	0.6037	0.5987	0.6006	0.6070	0.6068
0.35	0.3206	0.3759	0.3492	0.4858	0.5250	0.5325	0.5286	0.5394	0.5358	0.5367
0.40	0.2725	0.3269	0.3005	0.4266	0.4608	0.4713	0.4668	0.4710	0.4741	0.4745
0.45	0.2316	0.2843	0.2586	0.3746	0.4083	0.4158	0.4121	0.4201	0.4188	0.4194
0.50	0.1969	0.2472	0.2225	0.3289	0.3592	0.3676	0.3639	0.3687	0.3701	0.3708
0.55	0.1673	0.2149	0.1914	0.2888	0.3176	0.3247	0.3213	0.3275	0.3273	0.3277
0.60	0.1422	0.1869	0.1647	0.2536	0.2798	0.2868	0.2837	0.2883	0.2890	0.2897
0.65	0.1209	0.1625	0.1418	0.2227	0.2472	0.2535	0.2505	0.2556	0.2556	0.2561
0.70	0.1028	0.1413	0.1220	0.1955	0.2180	0.2238	0.2212	0.2253	0.2258	0.2264
0.75	0.0874	0.1229	0.1050	0.1717	0.1924	0.1979	0.1953	0.1995	0.1996	0.2001
0.80	0.0743	0.1069	0.0903	0.1508	0.1697	0.1747	0.1725	0.1761	0.1764	0.1769
0.85	0.0631	0.0929	0.0777	0.1324	0.1498	0.1544	0.1523	0.1557	0.1559	0.1563
0.90	0.0536	0.0808	0.0669	0.1162	0.1322	0.1363	0.1345	0.1375	0.1378	0.1382
0.95	0.0456	0.0703	0.0575	0.1020	0.1166	0.1205	0.1187	0.1216	0.1218	0.1222
1.00	0.0388	0.0611	0.0495	0.0896	0.1029	0.1065	0.1048	0.1074	0.1076	0.1080

Further References:

۱. غ. رحیمی؛ "جزوه درسی المان محدود"؛ دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۷۶.

۲. *Solution Manual-An Introduction to The FEM-REDDY*(۲۰۰۵)
۳. *ANSYS workbench tutorial-Lawrence*(۲۰۰۶)
۴. *Applied FE modeling Practical Problem Solving for Engineers-Steele*(۱۹۸۹)
۵. *Discontinuous FE in Fluid Dynamics and Heat Transfer-Li*(۲۰۰۶)
۶. *Engineering Analysis With ANSYS Software-Nakasone*(۲۰۰۶)
۷. *FE procedures-Bathe*(۱۹۹۶)
۸. *FEA with Error Estimators-Akin*(۲۰۰۵)
۹. *FEA-Bhavikatti*(۲۰۰۵)
۱۰. *FEA-Flaherty*(۲۰۰۰)
۱۱. *FEM for engineers-Fenner*(۱۹۹۶)
۱۲. *FEM/BEM NOTES-Hunter*(۲۰۰۱)
۱۳. *FEMs and Their Applications-Chen*(۲۰۰۵)
۱۴. *FES-BRAESS*(۲۰۰۷)
۱۵. *Fundamentals of FEA-Hutton*(۲۰۰۴)
۱۶. *Fundamentals of the FEA for heat and fluid flow-Lewis*
۱۷. *Introduction to the FEM-Barkanov*(۲۰۰۱)
۱۸. *Mixed FEs, Compatibility Conditions, and Applications-Boffi*(۲۰۰۸)
۱۹. *Numerical Analysis and Modelling in Geomechanics-Bull*(۲۰۰۲)
۲۰. *Process Modelling and Simulation with FEM-Zimmerman*(۲۰۰۴)
۲۱. *Structural Analysis with FEs-Hartmann*(۲۰۰۷)
۲۲. *The FEM in engineering-Rao*(۲۰۰۴)
۲۳. *The FEM-v۱-Basis-Zienkiewicz*(۲۰۰۰)
۲۴. *The FEM-v۲-Solid-Zienkiewicz*(۲۰۰۰)
۲۵. *The FEM-v۳-Fluid-Zienkiewicz*(۲۰۰۰)
۲۶. *The FEM-Zienkiewicz*(۲۰۰۵)
۲۷. *The Mathematical Theory of FEMs-Brenner*(۲۰۰۸)
۲۸. *The Mathematics of FEs and Applications-Whiteman*(۲۰۰۰)
۲۹. *Understanding and Implementing the FEM-Gockenbach*(۲۰۰۶)
۳۰. *USING FEs IN MECHANICAL DESIGN-MOTTRAM*(۱۹۹۶)
۳۱. *an_introduction_to_nonlinear_finite_element_analysis_reddy*()
۳۲. *applied_finite_element_analysis_Segerlind*(۱۹۸۴)
۳۳. *FINITE ELEMENT-MORATAL*(۲۰۱۰)
۳۴. *Finite Element Modeling For Stress Analysis -Cook*(۱۹۹۵)
۳۵. *FEM Parallel Sparse Statics And Eigen Solutions- Nguyen*(۲۰۰۶)
۳۶. *The Finite Element Method - A practical course-Lio*(۲۰۰۲)
۳۷. *I. Zied; CAD/CAM Theory and Practice; McGraw-Hill, ۱۹۹۱.*
۳۸. *L. Piegl, W. Tiller; The NURBS Book; Springer, ۱۹۹۶.*

-
۳۹. I. Zied; *Mastering CAD/CAM*; McGraw-Hill, ۲۰۰۵.
۴۰. L. Naryan; *Computer Aided Design And Manufacturing*; Prentice Hall, ۲۰۰۸.
۴۱. C. R. Alavala; *Cad/Cam: Concepts And Applications*; Prentice Hall, ۲۰۰۸.
۴۲. P. N. Rao; *CAD/CAM: principles and applications*; McGraw-Hill, ۲۰۱۰.
۴۳. J.N. Reddy; "An Introduction to the Finite Element Method"; McGraw-Hill, ۱۹۹۲.
۴۴. J.Fish, T. Belytschko; "A First Course in Finite Elements"; John Wiley & Sons., ۲۰۰۷.
۴۵. S. Moaveni; "Finite Element Analysis. Theory and Application With ANSYS"; Prentice Hall, ۱۹۹۹.
۴۶. S. Kobayashi, S. Oh, T. Altan; "Metal Forming and the Finite Element Method"; Oxford University, ۱۹۸۹.
۴۷. E. Madenci, I. Guven; "The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS"; Springer, ۲۰۰۶.
۴۸. Y.W. Kwon, H. Bang; "The Finite Element Method Using Matlab"; CRC. Press, ۱۹۹۷.