به نام خدا

مقدمه : یاد آوریها

بازه ها ونمایش آنها :بازه ها زیر مجموعه هایی از اعداد حقیقی به صورت زیر هستند ودر نمایش دامنه وبرد توابع وهمچنین در نوشتن جواب نامعادله ها(نامساویها) و در همگرایی سریهای توانی و ... به کار می روند.

بازه بسته : $[a\,,b\,] = \{x \in \mathbb{R}\,|a \le x \le b\,\}$

بازه باز : $(a\,,b) = \{x \in \mathbb{R}\,|a < x < b\,\}$

دیگر بازه ها : $(a\,,b\,] = \{x \in \mathbb{R}\,|a < x \le b\,\}$, $[a\,,b\,) = \{x \in \mathbb{R}\,|a \le x < b\,\}$

$(-\infty\,,b] = \{x \in \mathbb{R}\,|x \le b\,\}$, $[a\,,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}\,|a \le x\,\}$

$(-\infty\,,b) = \{x \in \mathbb{R}\,|x < b\,\}$, $(a\,,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}\,|a < x\,\}$

توجه : $(-\infty\,,+\infty\,) = \mathbb{R}$

مثال ۱ :جواب نامساوی $|x-1| \le 2$ بازه بسته [-1,3] است.زیرا طبق خواص قدر مطلق داریم :

$$|x-1| \le 2 \;\leftrightarrow -2 \le x-1 \le 2 \;\leftrightarrow -2+1 \le x \le 2+1 \leftrightarrow -1 \le x \le 3$$

البته می توان طرفین نامساوی را به توان ۲ رساند ونامساوی حاصل را با تعین علامت حل کرد.(تمرین)

تابع : یک تابع f از مجموعه X به مجموعه Y قانون (یا قاعده ای) است که به هر عضودلخواه مانند xاز مجموعه X عضوی منحصر به فرد مانند y در Y نسبت می دهد و y=f(x) ضابطه تابع f می نامیم .همچنین مجموعه Xرادامنه تابع f می نامیم وباD_f نمایش می دهیم ومجموعه $\{f(x)|x \in X\}$ که زیر مجموعه Y است را برد تابع f می نامیم و با R_f نمایش می دهیم.

انواع تابع : در ریاضی انواع مختلفی از توابع وجود دارد از قبیل تابع ثابت ،تابع همانی ،توابع چند جمله ای (از درجه یک و دو و.....) توابع گویا (کسری) فتوابع رادیکالی ، توابعچند ضابطه ای (تابع قدر مطلق ف تابع علامت ، تابع پله ای واحد و...) ، توابع مثلثاتی ،توابع معکوس مثلثاتی ،تاوبع نمایی ، توابع لگاریتمی و....

توجه :در توابع چند ضابطه ای دامنه تابع در کنار ضابطه ها نوشته می شود.

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$ (تابع قدرمطلق) و (علامت تابع) $$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

دامنه هر دو تابع برابر با است.و $R_{|x|} = [0\,,+\infty)$, $R_{sgn(x)} = \{-1,0,1\}$

مثال ۲دامنه تابع $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{x(x^2-1)}}$ را بیابید.

حل : برای یافتن دامنه تابع گویا مخرج کسر رامساوی صفر قرار می دهیم وریشه های معادله به دست آمده را از مجموعه اعداد حقیقی حذف می کنیم.

$$x(x^2-1) = 0 \to x = 0 \;\;, x^2-1 = 0 \to x = 1 \;\;, x = -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1,0,1\}$$

حد تابع :فرض کنید f تابعی باشد که روی بازه باز I شامل a بجز احتمالا" در x=a تعریف شده باشد در این صورت می گوییم حد تابع f وقتی که x به a میل می کند برابر با L است ومی نویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ هرگاه :

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \;\; ; \quad 0 < |x-a| < \delta \;\; \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

به عبارت دیگر

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \;\; ; \quad -\delta + a < x < \delta + a \quad \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

اگر شرط $x < \delta + a \;\; \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ بر قرار باشد می نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ و آن را حد راست تابع f در x=a می نامیم.

اگر شرط $-\delta + a < x \;\; \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ بر قرار باشد می نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ و آن را حد راست تابع f در x=aمی نامیم.

قضیه :حد چپ وراست تابع f در x=a برابر L است اگر وفقط اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$

توجه : برای محاسبه حد توابع از روشهای حد گیری (قوانین حد گیری) استفاده می شود (صفحه 95 کتاب استوارت قضیه زیر)

قضیه (قواعد حد گیری) فرض کتید عددی ثابت باشد وحدهای $\lim_{x\to a} g(x)$ و $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد. در این صورت

1) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

3) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

4) $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$

5) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad , \;\; \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

مثال ۳ $\boldsymbol{\lim_{x\to} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4}$

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)} = \lim_{x\to 9}(\sqrt{x}+3) = 6$$

پیوستگی توابع :تابع f(x) را در x=a پیوسته نامیم هر گاه هر سه شرط زیر بر قرار باشد.

الف) f(a) موجود باشد (عدد باشد)

ب) $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود باشد (عدد باشد)

ج) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

اگر یکی از این سه شرط برقرار نباشد تابع f(x) را در x=a ناپیوسته نامیم.

مثال ۴ تابع جزءصحیح y=[x]در هر عدد صحیح n نا پیوسته است. زیرا تابع [x] در اعداد صحیح nدارای حد نیست(حد چپ وراست با هم برابر نیست)

توجه : تابع جزءصحیح y=[x] به صورت

$$[x] = n \qquad n \le x < n$$

تعریف می شود.

تعریف : اگردر تعریف پیوستگی به جای $x \to a$ عبارت $x \to a^+$ و $x \to a^-$ قرار گیرد تابع f رادر x=a به ترتیب از راست واز چپ پیوسته نامیم.

مثال ۵ : درمثال قبل تابع جزءصحیح y=[x] در هر عدد صحیح ازراست پیوسته دست.

تعریف (پیوستگی روی بازه) :تابع f(x) روی بازه باز (a,b) پیوسته نامیم هر گاه fدر هرنقطه x ازاین بازه پیوسته باشد.

تابع f(x) روی بازه بسته [a,b] پیوسته نامیم هر گاه f روی بازه باز (a,b) پیوسته باشدو در x=a از راست پیوسته ودر x=b از چپ پیوسته باشد.

مثال ۶ (تمرین۴۱ کتاب استوارت صفحه۱۳۱) به ازای چه مقداری ازعدد ثابت c تابع f روی $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است؟ $f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & x < 2 \\ x^3 - cx & x \ge 2 \end{cases}$

حل :باید $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$ یا $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (cx^2 + 2x) = 4c + 4 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^3 - cx) = 8 - 2c \qquad (2)$$

$$(1),(2) \to 4c + 4 = 8 - 2c \to 6c = 4 \to c = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

قضیه :اگر توابع f و g در a پیوسته باشند وc عددی ثابت باشد آنگاه توابع زیر در a پیوسته است.

الف) f+g ب) f-g ج) cf د) fg ر) $\frac{f}{g}$ به شرطی که $g(a) \neq 0$

قضیه : هر تابع چند جمله ای ،هر تابع ثابت ، توابع Sin(x) و Cos(x) روی $\mathbb{R}$ پیوسته هستند وهر تابع گویا وتوابع رادیکالی روی دامنه اش پیوسته است.

قضیه مقدار میانی :فرض کنید که تابع f(x) روی بازه بسته [a,b] پیوسته باشد.برای هر k بین f(a) و f(b) عددی مانند c بین a و b وجود دارد که f(c)=k .

نتیجه قضیه مقدار میانی: فرض کنید که تابع f(x) روی بازه بسته [a,b] پیوسته باشد و $f(a)\times f(b)<0$ (یعنی f(a) و f(b) مختلف العلامه باشند) آنگاه معادله f(x)=0 حد اقل یکریشه بین a و b دارد.

مثال ۷ :نشان دهید که معادله $2x^3-6x^2+3x-2=0$ ریشه ای بین ۱و۲دارد.

حل :قرار می دهیم $f(x)=2x^3-6x^2+3x-2$ چون تابع f(x) یک تابع چند جمله ای است پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته است وبنابر این روی بازه بسته [1,2] پیوسته است و f(1)=-3 و f(2)=12 بنابراین f(1).f(2)< 0 پس طبق نتیجه قضیه مقدار میانی عددی مانند c بین ۱و۲ وجود دارد به طوریکه f(c)=0

یعنی c ریشه این معادله است.

تعریف (مشتق) مشتق تابع f(x) در x=a که با f'(a) نشان می دهیم برابر است با

$f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ به شرطی که این حد موجود باشد.

با فرض a+h=x می توان نوشت: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

تعبیر هندسی مشتق

۱) مشتق تابع y= f(x) در x=a درصورت وجود شیب خط مماس برمنحنی f(x) در نقطه (a,f(a)) است ومعادله خط مماس بر منحنی در نقطه (a,f(a))عبارت است از $y-f(a)=f'(a)(x-a)$
۲) f'(x) آهنگ لحظه ای تغیر y=f(x) در x است (مانند سرعت ، شتاب ،آهنگ رشد و....).

توجه :تابع f(x) در x=a مشتق پذیر نامیم هر گاه f'(a) موجود باشد.

قضیه :اگر تابع f(x) درx=a مشتق پذیر باشد آنگاه تابع f در a پیوسته است.

توجه :عکس این قضیه بر قرار نیست. (مانند تابع |y=|x در x=0 پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست)

سوال :در چه صورت تابع f(x) در x=a مشتق پذیر نیست؟

جواب ۱)نمودار تابع f(x)در x=a گوشه داشته باشد(مانند تابع |y=|x در x=0)یعنی تابع f درx=aخط مماس نداشته باشد. به عبارت دیگرمشتقات چپ وراست تابع یعنی $f'_{-}(a)$ و$f'_{+}(a)$ در x=a موجود ولی با هم برابر نباشد.

۲)تابع f(x) در x=a پیوسته نباشد.

۳)تابع f(x) در x=a خط مماس قائم(موازی محور y ها)دا شته باشد. یعنی اگر تابع f(x) در x=a پیوسته باشد و (مانند $y=\sqrt[3]{x}$ در x=0 پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست)

قوانین مشتق گیری

قضیه : اگر توابع f و g درx مشتق پذیر باشند آنگاه

الف) [f(x)+g(x)]′=f′(x)+g′(x)   ب) [f(x)-g(x)]′=f′(x)-g′(x)

ج) [f(x)g(x)]′=f′(x)g(x)+f(x)g′(x)   پ) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

چند دستوربرای مشتق گیری (قسمت ۱)

ردیف	تابع	مشتق تابع
1	Y=c	$y' = 0$
2	Y=ax	$y' = a$
3	Y=ax^n	$y' = nax^{n-1}$
4	Y=sinx	$y' = cosx$
5	Y=cosx	$y' = -sinx$
6	Y=tanx=$\frac{sinx}{cosx}$	$y' = sec^2(x) = 1 + tan^2(x)$
7	Y=cotgx= $\frac{cosx}{sicx}$	$y' = -csc^2(x) = -(1 + cotg^2x)$
8	Y=secx = $\frac{1}{cosx}$	$y' = secxtanx$
9	Y=cscx= $\frac{1}{sinx}$	$y' = -cscxcotgx$

توجه : مشتق تابع y= f(x) رابا $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$ نیز نمایش داده می شود.

قاعده زنجیری :اگرتابع g درx مشتق پذیر باشد وتابع f در g(x) مشتق پذیر باشد آنگاه تابع مرکب F=fog در xمشتق پذیر است وF′ به شکل F′(x)=f′(g(x))× g′(x) است. به عبارت دیگر اگر y=f(u) و u=g(x) و y و uهردو تابعهای مشتق پذیر باشند آنگاه $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ یعنی y′=f′(u) × u′

مثال ۸ : مشتق توابع زیر را بیابید.

Y=sin($x^2 + 2x$) , y= $x^{\frac{2}{3}}$, y= $(x^3 + 4x)^5$, y=$\frac{x}{x^2+1}$, y= x cosx

حل : $y = x\cos x \rightarrow y' = \cos x - x\sin x$

$$y=\frac{x}{x^2+1}\rightarrow y'=\frac{1(\ x^2+1\ \ )-2x(x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y=\ (x^3+4x)^5\rightarrow y'=5(\ 3x^2+4\ )(x^3+4x)^4$$

$$y=\ x^{\frac{2}{3}}\ \ \rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$Y=\sin(\ x^2+2x\ \ )\ \rightarrow y'=(2x+2)\cos(\ x^2+2x\ \ )$$

چند دستوربرای مشتق گیری (قسمت II)

10	Y=sinu	$y'=u'\ \ cosu$
11	Y=cosu	$y'=-u'\ \ sinu$
12	Y=tanu	$y'=\ u'\ \ sec^2(u)=\ u'\ (1+tan^2(u))$
13	Y=cotgu	$y'=-u'\ \ csc^2(u)=-\ u'\ \ (1+cotg^2u)$
14	Y=secu	$y'=\ u'\ \ secutanu$
15	Y=cscxu	$y'=-u'\ \ cscucotgu$

مثال :۹معادله خطهای مماس و قائم بر منحنی $y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ در نقطه $(1,\frac{1}{2})$ را پیدا کنید.

حل:شیب خط مماس m بر منحنی را در نقطه داده شده را می یابیم

$$y'=\frac{(\ x^2+1\ \ )\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{(\ \ x^2+1\ \ )-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-34^2}{(x^2+1)^2}\ \ \rightarrow m=y'(1)=-\frac{1}{4}$$

پس معادله خط مماس عبارت است از :

$$y-\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{4}\right)(x-1)\ \ \rightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$$

شیب خط قائم M بر منحنی وخط قائم بر منحنی عبارت است از :

$$M=-\frac{1}{m}=4\rightarrow y-\frac{1}{2}=4(x-1)\rightarrow y=4x-\frac{7}{2}$$

مشتق گیری ضمنی : معادله برخی از منحنی ها نمی توان به صورت y=f(x) نوشت

مانند $x^2+y^2=25\ \ ,\ x^3+y^3=6xy$

در این منحنی ها برای محاسبه y′ از مشتق گیری ضمنی به صورت زیر می کنیم. با فرض اینکه y تابعی از x است. از دو طرف معادله نسبت به x مشتق می گیریم واز معادله حاصل y′ را پیدا می کنیم.

مثال۱۰ : در معادله $x^3 + y^3 = 6xy$ ، y′ را به دست آورید.

حل : $3x^2 + 3y'y^2 = 6y + 6xy' \rightarrow (3y^2 - 6x)y' = (6y - 3x^2) \rightarrow y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$

توجه :اگر معادله منحنی به صورت F(x,y)=0 بنویسیم پس از مشتق گیری از طرفین معادله داریم $F_x + y'F_x = 0$ که در آن F_x و F_y به ترتیب مشتقF نسبت به x و y است .

بنابر این $y' = -\frac{F_y}{F_y}$

مثال۱۱ : معادله خط مماس بر منحنی $x^2 + y^2 = 25$ در نقطه (3و4) را پیدا کنید.

حل : با فرض F(x,y)= $x^2 + y^2 - 25 = 0$ طبق توجه قبل داریم:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y} \rightarrow m = y'(3) = -\frac{3}{4}$$

پس معادله خط مماس عبارت است از :

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \rightarrow 3x + 4y = 25$$

تمرین

۱-نامساوی های زیررا حل کنید وجواب را به صورت بازه بنویسید.

$$|2x + 3| \leq |x - 2| \quad , \quad \frac{2x - 3}{x + 1} \leq 1$$

۲-دامنه توابع زیر رابیابید.

$$y = \frac{3x + 4}{x(x^2 - 1)(x + 2)} \quad , \quad y = \sqrt{\frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 - 4}}$$

۳-حد های زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3 + 1} - x\right) \quad , \quad \lim_{x \to 0}\frac{1 - cosx}{sinx} \quad , \quad \lim \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$$

۴-مقادیر a وb رابیابید به طوریکه تابع زیر روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 3x = 6a & x < -3 \\ 3ax - 7b & -3 < x < 3 \\ x - 12b & x > 3 \end{cases}$$

۵-مشتق توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{2 - sinx}{cosx} \quad , \quad g(x) = \frac{(x-1)^2}{(x^2+2x)^5} \quad , \quad h(x) = xsin\sqrt{x}$$

۶- در معادلات زیر y' را حساب کنید.

$$4x^2 + 9y^2 + 36 \quad , \quad shn(x+y) = y^2 cosx \quad , \quad 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$$

۷-معادله خطوط مماس وقائم بر منحنی $x^2 - xy + y^2 = 3$ در نقطه (-1,1) را بیابید.