

فصل ۷

انتگرال نامعین و روشهای انتگرال گیری

بخش 1.7 انتگرال نامعین

تعریف: تابع $F(x)$ را روی بازه (فاصله) I یک تابع اولیه ی (ضدمشتق) تابع $f(x)$ نامیم هرگاه برای هر x در I

$$F'(x) = f(x) \text{ به عبارت دیگر } f(x) \text{ برابر مشتق } F(x) \text{ باشد.}$$

مثال ۱: تابع $F(x) = x^3 + 2x + 4$ یک تابع اولیه (ضدمشتق) برای تابع $f(x) = 3x^2 + 2$ است زیرا $F'(x) = f(x)$

همچنین $F(x) = x^3 + 2x + c$ که در آن c یک عدد حقیقی دلخواه (مقدار ثابت) است نیز یک تابع اولیه ی تابع $f(x)$ است

مثال ۲: تابع $F(x) = \cos x$ یک تابع اولیه ی تابع $f(x) = -\sin x$ است زیرا $F'(x) = f(x)$

قضیه: اگر $F(x)$ و $G(x)$ دو تابع اولیه برای $f(x)$ روی فاصله باشند. آنگاه عدد ثابت c وجود دارد بطوریکه $G(x) = F(x) + c$

نتیجه: اگر $F(x)$ تابع اولیه برای $f(x)$ باشد روی فاصله I آنگاه $F(x) + c$ نیز یک تابع اولیه ی تابع $f(x)$ روی فاصله است که در آن c ثابت اختیاری است.

تعریف: اگر $y = f(x)$ یک تابع مشتق پذیر باشد. دیفرانسیل تابع f را با df (dy) نمایش داده می شود به صورت

$$dy = df = f'(x) dx \text{ تعریف می کنیم که در آن } x \text{ عضو } D_f \text{ است.}$$

توجه: قوانین دیفرانسیل همانند قوانین مشتق می باشد زیرا کافی است که $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ به صورت

$$dy = f'(x) dx \text{ بنویسیم.}$$

مثال ۳: دیفرانسیل توابع $y = 5x^2 + e^x$ و $y = \sin x + \ln x$ و $y = x^4 + 10x + 5$ بدست آورید.

حل:

$$y = x^4 + 10x + 5 \rightarrow dy = (4x^3 + 10) dx$$

$$y = 5x^2 + e^x \rightarrow dy = (10x + e^x) dx$$

$$y = \sin x + \ln x \rightarrow dy = (\cos x + \frac{1}{x}) dx$$

تعریف: اگر $f(x)$ یک تابع باشد عمل معکوس دیفرانسیل گیری یا یافتن تابع اولیه ی $F(x)$ برای تابع $f(x)$ را انتگرال نامعین تابع $f(x)$ می نامیم و علامت \int را برای انتگرال نامعین بکار می بریم و می نویسیم

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

توجه: یافتن تابع اولیه یعنی انتگرال نامعین عکس عمل مشتق گیری (ضدمشتق) است و همچنین انتگرال نامعین عکس عمل دیفرانسیل گیری است و c را ثابت انتگرال گیری می نامیم. پس:

$$\int f(x) dx = F(x) + c \leftrightarrow F'(x) = f(x) \quad (d(F(x))) = f(x) dx$$

مثال ۴: با توجه به مثال ۳ انتگرالهای زیر نتیجه می شد.

$$\int (10x + e^x) dx = 5x^2 + e^x + c$$

$$\int (\cos x + \frac{1}{x}) dx = \sin x + \ln|x| + c$$

$$\int (4x^3 + 10) dx = x^4 + 10x + c$$

مثال ۵: چون $(\sin x)' = \cos x$ پس $\int \cos x dx = \sin x$

و همچنین $\int \cos x dx = \sin x + c$

مثال ۶: چون $(e^x)' = e^x$ پس $\int e^x dx = e^x$

و همچنین $\int e^x dx = e^x + c$

مثال ۷: چرا $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + c$, $\int \sin x dx = -\cos x + c$

حل: زیرا $d(\frac{1}{6}x^6 + c) = x^5 dx$ و $d(-\cos x + c) = \sin x dx$

تبصره: چون دو عمل مشتق و انتگرال نامعین معکوس هم هستند برای یادگیری بیشتر دو جدول که در آن قوانین مشتق و انتگرالهای مقدماتی قرار دارد در زیر می آوریم.

به کمک قضیه زیر می توان تعداد زیادی از انتگرالها را حل کرد.

قضیه (خواص انتگرال نامعین)

$$(1) \quad \int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad a \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(3) \quad \int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$(4) \quad \int [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)] dx = \\ a_1 \int f_1(x) dx + a_2 \int f_2(x) dx + \dots + a_n \int f_n(x) dx$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

مثال ۸: انتگرالهای زیر را حل کنید.

$$\int (\sin x - 2\cos x) dx \quad (\text{الف})$$

$$\int (3e^x + 4\sin x) dx \quad (\text{ب})$$

حل: (الف)

$$\int (\sin x - 2\cos x) dx = \int \sin x dx - 2 \int \cos x dx = -\cos x - 2\sin x + c$$

(ب)

$$\int (3e^x + 4\sin x) dx = 3 \int e^x dx + 4 \int \sin x dx = 3e^x - 4\cos x + c$$

جدول شماره (۱) قوانین مشتق

ردیف	تابع	مشتق تابع	ردیف	تابع	مشتق تابع
1	$Y=c$	$y' = 0$	۱۸	$Y=\sec^{-1} x$	$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
2	$Y=ax$	$y' = a$	۱۹	$Y=\csc^{-1} x$	$y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
3	$Y=ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	۲۰	$Y=f(u)$	$y' = u'f'(u)$
4	$Y=\sin x$	$y' = \cos x$	۲۱	$Y=e^u$	$y' = u'e^u$
5	$Y=\cos x$	$y' = -\sin x$	۲۲	$Y=a^u$	$y' = (Lna)a^u$
6	$Y=\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$y' = \sec^2(x)$ $= 1 + \tan^2(x)$	۲۳	$Y=\text{Lnu}$	$y' = \frac{u'}{u}$
7	$Y=\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$y' = -\csc^2(x)$ $= -(1 + \cot^2 x)$	۲۴	$y = \text{Log}_a^u$	$y' = \frac{u'}{u(Lna)}$
8	$Y=\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$y' = \sec x \tan x$	۲۵	$Y=\sin u$	$y' = u' \cos u$
9	$Y=\csc x = \frac{1}{\sin x}$	$y' = -\csc x \cot x$	۲۶	$Y=\cos u$	$y' = -u' \sin u$
10	$Y=e^x$	$y' = e^x$	۲۷	$Y=\tan u$	$y' = u' \sec^2(u)$ $= u' (1 + \tan^2(u))$
11	$Y=a^x$	$y' = (Lna)a^x$	۲۸	$Y=\cot u$	$y' = -u' \csc^2(u)$ $= -u' (1 + \cot^2 u)$
12	$Y=\text{Lnx}$	$y' = \frac{1}{x}$	۲۹	$Y=\sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$
13	$y = \text{Log}_a^x$	$y' = \frac{1}{x(Lna)}$	۳۰	$Y=\csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
14	$Y=\sin^{-1} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	۳۱	$Y=\sin^{-1} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
15	$Y=\cos^{-1} x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	۳۲	$Y=\cos^{-1} u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16	$Y=\tan^{-1} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	۳۳	$Y=\tan^{-1} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
17	$Y=\cot^{-1} x$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$	34	$Y=\cot^{-1} u$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

جدول شماره (۲) انتگرال مقدماتی

۱	$\int dx = x + c$
۲	$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c & n \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c & n = -1 \end{cases}$
۳	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
۴	$\int \cos x dx = \sin x + c$
۵	$\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
۶	$\int (1 + \cot^2 x) dx = \int \csc^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
۷	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$
۸	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$
۹	$\int e^x dx = e^x + c$
۱۰	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$
۱۱	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c = -\cos^{-1} x + c$
۱۲	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c = -\cot^{-1} x + c$

توجه: در ادامه روشهای انتگرال گیری جدول شماره ۲ را کاملتر می کنیم.

مثال ۹: با استفاده از جدول مقدماتی انتگرالها (جدول ۲) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1) \int \sqrt[3]{x^2} dx, \quad 2) \int \frac{1}{x^7} dx, \quad 3) \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$4) \int (5x + 6) dx, \quad 5) \int (x - 3)(x + 3) dx$$

$$1) \int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c \quad \text{حل:}$$

$$2) \int \frac{1}{x^7} dx = \int x^{-7} dx = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + c = \frac{-1}{6} x^{-6} + c = \frac{-1}{6x^6} + c$$

$$3) \int x^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

$$4) \int (5x + 6) dx = 5 \int x dx + 6 \int dx = \frac{5}{2}x^2 + 6x + c$$

$$5) \int (x - 3)(x + 3) dx = \int (x^2 - 9) dx = \int x^2 dx - 9 \int dx = \frac{x^3}{3} - 9x + c$$

1.7 تمرین بخش

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1) \int (3x^4 + 2x - 4) dx$$

$$2) \int (5e^{-x} - 6e^x) dx$$

$$3) \int (6\sin x + 9\cos x) dx$$

$$4) \int (x^2 - 1)(x^2 + 1) dx$$

$$5) \int (x^4 + \frac{5}{x^2}) dx$$

$$6) \int (\sqrt{x} + x^2 + 8x) dx$$

$$7) \int (\tan^2 x + \cot^2 x + 2) dx$$

$$8) \int \left(\frac{3}{x} + 3^x + 2x^{-8} \right) dx$$

$$9) \int (x^2 - 4)(x^2 + 4) dx$$

$$10) \int \frac{(x^3 + x^2 + 2x + 2)}{\sqrt{x}} dx$$

$$11) \int (x - 1)(x^2 + x + 1) dx$$

$$12) \int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx$$

بخش 2.7 روش های انتگرال گیری

برای محاسبه انتگرال نامعین روشهای زیادی وجود دارد. در این بخش و بخش های بعد به مهمترین آن ها می پردازیم.

قرار داد: برای راحتی بجای انتگرال نامعین از کلمه انتگرال استفاده می کنیم. یکی از روش های انتگرال گیری استفاده از تعریف انتگرال و جدول مقدماتی و خواص انتگرال است. در این روش انتگرال را با محاسبه ساده (استفاده از اتحادها، مزدوج گیری، ضرب و تقسیم و اضافه کردن یک عبارت به تابه زیر علامت انتگرال گیری) به یک انتگرال موجود در جدول مقدماتی تبدیل می کنیم و سپس جواب انتگرال را می نویسیم.

مثال 1: انتگرال $\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)} dx$ را محاسبه کنید.

حل: (استفاده از اتحاد $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$)

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)} dx = \int \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)} dx = \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx + \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$$

$$= \tan x - \cot x + c$$

مثال 2: انتگرالهای زیر را حل کنید.

$$1) \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx \quad 2) \int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx \quad 3) \int \tan^2(x) dx$$

حل:

$$1) \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2(x^2 + 1) + 1}{x^2 + 1} dx = \int x^2 dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \tan^{-1} x + c$$

$$2) \int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} dx = 2 \int \cos x dx = 2 \sin x + c$$

$$3) \int \tan^2(x) dx = \int (1 + \tan^2(x) - 1) dx = \int (1 + \tan^2(x)) dx - \int dx$$

$$= \tan x - x + c$$

مثال 3: انتگرالهای زیر را حل کنید.

$$1) \int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^4} dx \quad 2) \int \frac{e^x + 1}{e^x} dx$$

حل:

$$1) \int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^4} dx = \int \frac{dx}{x^2} + 3 \int \frac{dx}{x^3} + \int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-2} dx + 3 \int x^{-3} dx + \int x^{-4} dx$$

$$= -x^{-1} - \frac{3}{2} x^{-2} - \frac{1}{3} x^{-3} + c = -\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + c$$

$$2) \int \frac{e^x + 1}{e^x} dx = \int dx + \int \frac{1}{e^x} dx = x + \int e^{-x} dx = x - e^{-x} + c$$

یکی دیگر از روش های انتگرال گیری روش تغییر متغیر یا روش جانشینی است. این روش در محاسبه انتگرالها به کار برده می شود. این روش را به صورت قضیه زیر بیان می کنیم.

قضیه (تغییر متغیر) فرض کنید که $f(u)$ تابعی باشد که روی بازه I تعریف می شود و فرض کنید $g(x)$ تابعی باشد که برد آن بازه I (فاصله) است. اگر تابع $F(u)$ اولیه $f(u)$ روی I و $u=g(x)$ باشد آنگاه

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

که در آن $du=g'(x)dx$ است. ($U=g(x) \rightarrow du=g'(x)dx$ تغییر متغیر)

در روش تغییر متغیر معمولاً تابعی که زیر رادیکال، در مخرج کسر، در توان، در کمان مثلثاتی یا داخل پرانتز قرار دارد را به عنوان تغییر متغیر یعنی u در نظر می گیریم و سپس از u دیفرانسیل می گیریم و در انتگرال قرار می دهیم تا انتگرال به یک انتگرال ساده یا انتگرال موجود در جدول تبدیل شود و به کمک جدول مقدماتی آن راحل می کنیم. این گونه تغییر متغیر زمانی به کار می بریم که دیفرانسیل تغییر متغیر یعنی du در انتگرال موجود باشد یا بتوان آن را در انتگرال ساخت.

مثال ۴: انتگرالهای زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \int \sqrt{5x-3} dx \quad \text{ب) } \int \tan x dx \quad \text{ج) } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{د) } \int \cot g x dx$$

حل:

$$\text{الف) } \int \sqrt{5x-3} dx = \frac{1}{5} \int \sqrt{u} du = \frac{2}{15} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{15} (5x-3)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\text{تغییر متغیر : } U = 5x - 3 \rightarrow du = 5dx \rightarrow dx = \frac{1}{5} du$$

$$\text{ب) } \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c$$

$$\text{تغییر متغیر } U = \cos x \rightarrow du = -\sin x dx$$

$$\text{ج) } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^u du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

$$\text{تغییر متغیر } U = \sqrt{x} \rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$$

$$\text{د) } \int \cot g x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|\cos x| + c$$

$$\text{تغییر متغیر } U = \sin x \rightarrow du = \cos x dx$$

مثال ۵: انتگرالهای زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad \text{ب) } \int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx \quad \text{ج) } \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

حل: برای هر سه انتگرال از تغییر متغیر $u = \ln x$ استفاده می کنیم بنابراین داریم: $du = \frac{1}{x} dx$

$$\text{الف) } \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{dx}{u} = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$$

$$\text{ب) } \int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

$$\text{ج) } \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + c = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c$$

مثال ۶: انتگرالهای زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \int \sin(ax) dx \quad \text{ب) } \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx \quad \text{ج) } \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

حل: برای انتگرال الف) از تغییر متغیر $u = ax$ استفاده می کنیم بنابراین داریم: $du = a dx$

$$\text{الف) } \int \sin(ax) dx = \frac{1}{a} \int \sin u du = -\frac{1}{a} \cos u + c = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c$$

برای انتگرال ب) و ج) از تغییر متغیر $u = \frac{x}{a}$ کمک می گیریم پس داریم $\frac{dx}{a} = du$

$$\text{ب) } \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)} dx = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} u + c = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\text{ج) } \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{dx}{a \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \sin^{-1} u + c = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

مثال ۷: انتگرالهای زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \int \sec x dx \quad \text{ب) } \int \csc x dx$$

حل: برای این دو انتگرال تابع زیر علامت انتگرال را در یک عبارت مناسب ضرب و تقسیم می کنیم سپس از تغییر متغیر کمک می گیریم.

$$\text{الف) } \int \sec x dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\text{تغییر متغیر } U = \sec x + \tan x \rightarrow du = (\sec x + \tan x) \sec x dx$$

$$\text{ب) } \int \csc x dx = \int \frac{\csc x (\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

$$\text{تغییر متغیر } U = \csc x - \cot x \rightarrow du = (\csc x - \cot x) \csc x dx$$

توجه: تغییر متغیر در یک انتگرال منحصربفرد نیست به عبارت دیگر برای حل یک انتگرال می توان از چند تغییر متغیر کمک گرفت.

مثال ۸: انتگرال $\int x\sqrt{x-1} dx$ را به کمک تغییر متغیر الف) $u=x-1$ ب) $u=\sqrt{x-1}$ محاسبه کنید.

حل: الف) تغییر متغیر $u=x-1 \rightarrow du = dx$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1} dx &= \int (u+1)\sqrt{u} du = \int u^{\frac{3}{2}} du + \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c\end{aligned}$$

ب) تغییر متغیر $u=(\sqrt{x-1} \rightarrow x-1 = u^2 \rightarrow dx = 2udu, x = u^2 + 1)$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1} dx &= \int (u^2+1)u2u du = 2 \int u^4 du + 2 \int u^2 du = \frac{2}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + c \\ &= \frac{2}{5}(\sqrt{x-1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + c = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c\end{aligned}$$

تبصره: باتوجه به مثالهای ۴ و ۵ و ۶ و ۷ می توان چند انتگرال به جدول شماره ۲ به صورت اضافه کرد.

ردیف	انتگرال نامعین
۱۳	$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c$
۱۴	$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + c$
۱۵	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
۱۶	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
۱۷	$\int \sec x dx = \ln \sec x + \tan x + c$
۱۸	$\int \csc x dx = \ln \csc x - \cot x + c$
۱۹	$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$
۲۰	$\int \cot x dx = \ln \cos x + c$

تمرین بخش 2.7

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

- 1) $\int x(x^2 + 3)^7 dx$
- 2) $\int x^2 e^{1+x^2} dx$
- 3) $\int \frac{x + \tan^{-1} x}{1+x^2} dx$
- 4) $\int \frac{\ln x}{x} dx$
- 5) $\int \frac{1}{4+x^2} dx$
- 6) $\int x e^{x^2} dx$
- 7) $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- 8) $\int x\sqrt{x+2} dx$
- 9) $\int \cos x e^{\sin x} dx$

10) $\int x \sin(10x^2) dx$

11) $\int \sin x e^{\cos x} dx$

بخش 3.7 انتگرال گیری به روش جزء جزء

یکی دیگر از روشهای انتگرال گیری روش جزء جزء است. این روش از فرمول دیفرانسیل $d(uv) = u dv + v du$ به صورت $u dv = d(uv) - v du$ نتیجه می شود. با انتگرال گیری داریم $\int u dv = uv - \int v du$. از این روش برای حل انتگرال $\int f(x)g(x)dx$ استفاده می کنیم که در آن $f(x)$ و $g(x)$ توابع مثلثاتی، چندجمله ای، نمایی، لگاریتمی و معکوس مثلثاتی هستند.

در این روش یکی از توابع $f(x)$ و $g(x)$ که مشتق آن ساده است (و بعد از مشتق گیری درجه اش کم می شود) را برابر با u انتخاب می کنیم و تابع دیگر همراه با dx را برابر با dv انتخاب می کنیم از u دیفرانسیل گرفته و از dv انتگرال می گیریم و به کمک دستور $\int u dv = uv - \int v du$ از انتگرال $\int f(x)g(x)dx$ راحل می کنیم. به عبارت ریاضی:

$$\int f(x)g(x)dx = \int u dv = uv - \int v du = f(x) \int g(x) dx - \int f'(x) \left(\int g(x) dx \right) dx$$

$$\begin{cases} f(x) = u \rightarrow du = f'(x) dx \\ g(x) dx = dv \rightarrow v = \int g(x) dx \end{cases}$$

مثال ۱: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \int x \sin(x) dx \quad \text{ب) } \int x e^x dx \quad \text{ج) } \int x \ln x dx$$

حل: الف)

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ \sin x dx = dv \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x \sin(x) dx = \int u dv = uv - \int v du = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv \rightarrow v = e^x \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$\int x e^x dx = \int u dv = uv - \int v du = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

$$\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ x dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases} \quad \text{ج)}$$

$$\int x \ln x dx = \int u dv = uv - \int v du = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$$

مثال ۲: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \int \ln x dx \quad \text{ب) } \int \tan^{-1} x dx$$

حل:

$$\text{الف) } \int \ln x dx = \int u dv = uv - \int v du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

$$\begin{cases} u = \operatorname{Ln}x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \int \tan^{-1} x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(1+x^2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u = \tan^{-1} x \rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z = 1+x^2 \rightarrow dz = 2x \, dx \rightarrow \int \frac{x}{1+x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}|z| + c \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(1+x^2) + c \end{aligned}$$

توجه: در یک انتگرال ممکن است چندین بار از روش جزء بجزء استفاده شود تا انتگرال حل شود. (مثال زیر)

مثال ۳: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \int e^x \sin(x) \, dx$$

$$\text{ب) } \int e^x \cos x \, dx$$

حل:

$$2) \quad \begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x \, dx \\ dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \sin x \end{cases}$$

$$1) \quad \begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x \, dx \\ dv = \sin x \, dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

طبق (۱) داریم:

$$\begin{aligned} \text{الف) } \int e^x \sin(x) \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \rightarrow 2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) \\ &\rightarrow \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c \end{aligned}$$

طبق (۲) داریم:

$$\begin{aligned} \text{ب) } \int e^x \cos(x) \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx \rightarrow \end{aligned}$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\sin x + \cos x) \rightarrow \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

تعمیم روش جزء بجزء:

فرض کنید که $g^{(n)}(x)$ مشتق مرتبه n نام تابع $g(x)$ باشد و $f(x)$ تابعی باشد که از هر مرتبه ای دارای مشتق است. در این صورت با استفاده مکرر از روش جزء بجزء داریم:

$$\int f(x)g^{(n)}(x) dx = f(x)g^{(n-1)}(x) - f'(x)g^{(n-2)}(x) + f''(x)g^{(n-3)}(x) - \dots + (-1)^n \int g(x)f^{(n)}(x) dx$$

مثال ۴: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int (3x^3 + x^2 + 1)\sin(x) dx$ ب) $\int x^5 e^x dx$

حل:

الف) $\int (3x^3 + x^2 + 1)\sin(x) dx = (3x^3 + x^2 + 1)(-\cos x) - (9x^2 + 2x)(-\sin x) + (18x + 2)(\cos x) - (18)(\sin x) + c$

ب) $\int x^5 e^x dx = x^5 e^x - (5x^4)e^x + (20x^3)e^x - (60x^2)e^x + (120x)e^x - 120e^x + c$

تمرین بخش 3.7

انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int x^2 \ln x dx$ 2) $\int \frac{\sin 2x}{e^x} dx$ 3) $\int x^3 e^{x^2} dx$
 4) $\int \frac{\cot^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ 5) $\int x \tan^{-1} x dx$ 6) $\int x^2 \cos x dx$
 7) $\int \sin x \ln(\cos x) dx$ 8) $\int \cos(\ln x) dx$ 9) $\int \sin(\ln x) dx$
 10) $\int \frac{x}{e^x} dx$ 11) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ 12) $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$

بخش 4.7 انتگرال گیری از توابع مثلثاتی (توان های $\sin x$ و $\cos x$)

برای محاسبه انتگرال های $\int \cos^m(x) dx$ و $\int \sin^n(x) dx$ و $\int \sin^n(x)\cos^m(x) dx$ روش های متفاوتی وجود دارد. یکی از این روش ها روش بازگشتی است که در تمرین های این فصل آمده است. روش دیگر که به m و n بستگی دارد و به صورت زیر است.

الف) اگر m و n دو عدد زوج باشند می توان از اتحاد های $\cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}$ و $\sin^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$ استفاده کرد. با استفاده از این اتحادها توان های $\sin x$ و $\cos x$ کم می شود.

ب) اگر یکی از دو عدد m و n عدد طبیعی فرد باشند از تغییر متغیر های زیر کمک می گیریم.

اگر m فرد باشد از تغییر متغیر $u = \sin x$ استفاده می کنیم (به عبارت دیگر اگر توان $\cos x$ فرد باشد $u = \sin x$) و از اتحاد $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ کمک می گیریم.

اگر n فرد باشد از تغییر متغیر $u = \cos x$ استفاده می کنیم (به عبارت دیگر اگر توان $\sin x$ فرد باشد $u = \cos x$) و از اتحاد $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ کمک می گیریم.

ج) اگر هر دو m و n عدد صحیح منفی باشند به انتگرال های $\int \sec^p(x) dx$ و $\int \csc^q(x) dx$ و

$\int \sec^p(x) \csc^q(x) dx$ می رسمیم که در تمرین های تکمیلی آخرین فصل روش حل آن خواهد آمد.

$$(p=-m, q=-p)$$

مثال ۱: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \int \cos^3(x) dx \quad \text{ب) } \int \sin^4(x) dx \quad \text{ج) } \int \sin^3(x) \cos^2(x) dx$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{الف) } \int \cos^3(x) dx &= \int \cos x (1 - \sin^2(x)) dx = \int (1 - u^2) dx = u - \frac{u^3}{3} + c \\ &= \sin x - \frac{\sin^3(x)}{3} + c \end{aligned}$$

$$U = \sin x \rightarrow du = \cos x dx$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \int \sin^4(x) dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int [1 + \cos^2 2x - 2\cos 2x] dx \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } \int \sin^3(x) \cos^2(x) dx &= \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x dx = - \int (1 - u^2) u^2 du \\ &= - \int (u^2 - u^4) du = -\frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + c = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + c \end{aligned}$$

$$U = \cos x \rightarrow du = -\sin x dx$$

مثال ۲: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \int \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \cos^2 x dx \quad \text{ب) } \int \sin^5 x dx$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{الف) } \int \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \cos^2 x dx &= \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) \cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx \\ &= \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 4x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ب) } \int \sin^5 x \, dx &= \int \sin x (\sin^2 x)^2 \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx = - \int (1 - u^2)^2 \, du \\
 &= - \int (1 + u^4 - 2u^2) \, du = -u - \frac{1}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + c \\
 &= -\cos x - \frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x + c
 \end{aligned}$$

$U = \cos x \rightarrow \text{تغییر متغیر} \quad du = -\sin x \, dx$

تمرین بخش 4.7

انتگرال های زیر را حل کنید.

$$1) \int \sin^3 x \cos^3 x \, dx \quad 2) \int \cos^6 x \, dx \quad 3) \int \sin^2 ax \, dx$$

$$4) \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx \quad 5) \int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \, dx \quad 6) \int \sin^3 x \, dx$$

$$7) \int \cos x \cos 3x \, dx \quad 8) \int \sqrt{\cos x} \sin^3 x \, dx \quad 9) \int \cos x \sin^5 x \, dx$$

تبصره: برای محاسبه انتگرال الف) $\int \sin(mx) \cos(nx) \, dx$ ب) $\int \sin(mx) \sin(nx) \, dx$ ج) $\int \cos(mx) \cos(nx) \, dx$ از اتحادهای متناظرشان به صورت زیر استفاده می کنیم.

$$\text{الف) } \sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$$

$$\text{ب) } \sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$\text{ج) } \cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$$

برای حل تمرین ۷ از قسمت ج استفاده کنید.

بخش 5.7 تغییر متغیر های مثلثاتی

اگر تابع زیر علامت انتگرال شامل عبارتهای $\sqrt{a^2 + x^2}$ و $\sqrt{a^2 - x^2}$ و $\sqrt{x^2 - a^2}$ باشند که در آن $a > 0$ است (انتگرال توابع رادیکالی) در این صورت از تغییر متغیرهای مثلثاتی به صورت زیر کمک می گیریم.

الف) اگر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^2 + x^2}$ باشد از تغییر متغیر $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ و یا $x = a \tan \theta$ استفاده می کنیم.

در این صورت اگر $x = a \tan \theta$ آنگاه $dx = a(1 + \tan^2 \theta) d\theta$ و

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = a \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = a |\sec \theta| = a \sec \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \\
 &< \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \text{ زیرا}$$

ب) اگر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{x^2 - a^2}$ باشد از تغییر متغیر $x = a \sec \theta$ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$) استفاده می‌کنیم.

در این صورت اگر $x = a \sec \theta$ آنگاه $dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ و

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = a \sqrt{\sec^2 \theta - 1} = a |\tan \theta| \\ &= a \tan \theta \quad \left(\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}) \right)\end{aligned}$$

زیرا $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$

ج) اگر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^2 - x^2}$ باشد از تغییر متغیر $x = a \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) یا $x = a \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) استفاده می‌کنیم.

در این صورت اگر $x = a \sin \theta$ آنگاه $dx = a \cos \theta d\theta$ و

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = a \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = a |\cos \theta| = a \cos \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

زیرا $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$

بطور خلاصه این تغییر متغیرها در جدول زیر می‌آوریم.

$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\sqrt{x^2 - a^2}$
$x = a \sin \theta$ $dx = a \cos \theta d\theta$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$	$x = a \tan \theta$ $dx = a(1 + \tan^2 \theta) d\theta$ $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta$	$x = a \sec \theta$ $dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$

مثال ۱: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{ب) } \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} dx \quad \text{ج) } \int \sqrt{1-x^2} dx$$

حل:

$$\begin{aligned}\text{الف) } \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta \sec \theta} d\theta = \int \frac{\sec \theta}{\tan^2 \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = -\frac{1}{\sin \theta} + c \\ &= -\frac{xx}{\sqrt{1+x^2}} + c\end{aligned}$$

$$x = \tan \theta \rightarrow dx = \sec^2 \theta d\theta, \sqrt{1+x^2} = \sec \theta, \sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin \theta = u \rightarrow du = \cos \theta \rightarrow \int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\sin \theta} + c$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} dx &= \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta-4}} d\theta = \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{2\tan\theta} d\theta = \int \sec\theta d\theta \\ &= \text{Ln}|\sec\theta + \tan\theta| + c = \text{Ln}\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + c \end{aligned}$$

$$x = 2\sec\theta \rightarrow dx = 2\sec\theta\tan\theta d\theta, \sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta, \frac{x}{2} = \sec\theta$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos\theta\cos\theta d\theta = \int \cos^2\theta d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + c = \frac{1}{2}\sin^{-1}x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

$$x = \sin\theta \rightarrow dx = \cos\theta d\theta, \sqrt{1-x^2} = \cos\theta, \theta = \sin^{-1}x, \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

مثال ۲: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx \quad \text{ب) } \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{الف) } \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx &= \int \frac{9\sin^2\theta 3\cos\theta}{3\cos\theta} d\theta = 9 \int \sin^2\theta d\theta = 9 \int \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \int \frac{9}{2} d\theta - \frac{9}{2} \int \cos 2\theta d\theta = \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\sin 2\theta + c \\ &= \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + c \end{aligned}$$

$$x = 3\sin\theta \rightarrow dx = 3\cos\theta d\theta, \sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta, \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right), \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx &= \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{2\sec\theta\sqrt{4\sec^2\theta-4}} d\theta = \int \frac{\tan\theta}{2\tan\theta} d\theta = \int \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2}\theta + c \\ &= \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c \end{aligned}$$

$$x = 2\sec\theta \rightarrow dx = 2\sec\theta\tan\theta d\theta, \sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta, \frac{x}{2} = \sec\theta, \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

5.7 تمرین بخش

انتگرال های زیر را حل کنید.

$$1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx \quad (a > 0) \quad 2) \int \sqrt{x^2+a^2} dx \quad (a > 0)$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx \quad 4) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$5) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 6) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} dx \quad (a > 0)$$

7) $\int x^3 \sqrt{4-x^2} dx$

8) $\int \frac{(\ln x)^3}{x \sqrt{(\ln x)^2 - 4}} dx$

9) $\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x} dx$

10) $\int x^2 \sqrt{25-x^2} dx$

بخش 6.7 انتگرال گیری از توابع گویا (روش تجزیه کسرها)

در این بخش انتگرال توابع گویا به صورت $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ را که در آن $f(x)$ و $g(x)$ دو چند جمله ای به صورت زیر هستند را به روش تجزیه کسرها حل می کنیم.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

اگر درجه $f(x)$ یعنی n بزرگتر از درجه $g(x)$ یعنی m باشد با استفاده از تقسیم چندجمله ای ها، $f(x)$ را بر $g(x)$ تقسیم می کنیم. در این صورت دو چندجمله ای $p(x)$ و $r(x)$ وجود دارند که درجه $r(x)$ از درجه $g(x)$ کمتر است و

$$\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \rightarrow \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int p(x) dx + \int \frac{r(x)}{g(x)} dx$$

برای حل $\int \frac{r(x)}{g(x)} dx$ که درجه $r(x)$ کمتر از درجه $g(x)$ است چندجمله ای $g(x)$ را به عبارتهای تجزیه ناپذیر از درجه 1 و 2 تجزیه می کنیم $g(x)$ می تواند به صورت های زیر تجزیه شود.

$$g(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) \quad \text{الف)}$$

که در آنها a_i ها اعداد حقیقی متمایز هستند. به عبارت دیگر $g(x)$ ریشه های متمایز دارد.

$$g(x) = (x - a_1)^r (x - a_2)^s \dots (x - a_l)^l \quad \text{ب)}$$

یعنی $g(x)$ ریشه های تکراری دارد

$$g(x) = (ax^2 + bx + c)(x - d) \dots (x - t) \quad \text{ج)}$$

در تجزیه $g(x)$ عبارت درجه 2 مانند $ax^2 - bx + c$ وجود دارد

$$g(x) = (ax^2 + bx + c)^r (x - d)(x - c) \quad \text{د)}$$

در تجزیه $g(x)$ عبارت درجه 2 مانند $ax^2 + bx + c$ چند بار تکرار شده است. همچنین ممکن است که در تجزیه $g(x)$ تمام حالت های بالا با هم موجود باشند.

روش تجزیه کسرها برای هر حالت جداگانه بیان می کنیم و برای هر حالت مثال می آوریم.

$$g(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) \quad \text{حالت الف)}$$

$a_m, a_{m-1}, \dots, a_2, a_1$ متمایز هستند. در این حالت فرض می کنیم:

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \dots + \frac{A_m}{(x - a_m)}$$

که در آن A_1 و A_2 و ... و A_m مقادیر ثابتی هستند که باید مقدار آنها را تعیین کنیم که با مخرج مشترک گیری و متحد القاری کردن صورت های دو طرف تساوی A_1 و A_2 و ... و A_m را معین می کنیم سپس انتگرالهای زیر را حل می کنیم..

$$\int \frac{r(x)}{g(x)} dx = \int \frac{A_1}{x-a_1} dx + \int \frac{A_2}{x-a_2} dx + \dots + \int \frac{A_m}{x-a_m} dx$$

$$= A_1 \text{Ln}|x-a_1| + A_2 \text{Ln}|x-a_2| + \dots + A_m \text{Ln}|x-a_m| + c$$

مثال ۱: انتگرال $\int \frac{dx}{x-x^3}$ را حل کنید.

حل: $g(x) = x - x^3 = x(1-x^2) = x(1-x)(1+x)$

$$\frac{1}{x-x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x} = \frac{(1-x^2)A + Bx(1+x) + Cx(1-x)}{x-x^3}$$

برای محاسبه A و B و C به دو روش وجود دارد.

(۱) با برابر قرار دادن صورت های دو طرف تساوی و تشکیل یک دستگاه توسط ضرایب مجهول و حل آن

(۲) با برابر قرار دادن صورت های دو طرف تساوی و دادن مقادیر دلخواه به x و یافتن A و B و C

پس طبق روش دوم داریم.

$$(1-x^2)A + Bx(1+x) + Cx(1-x) = 1$$

$$x=0 \rightarrow A = 1, \quad x=1 \rightarrow 2B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{2}, \quad x=-1 \rightarrow -2C = 1 \rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

با جایگذاری داریم:

$$\int \frac{1}{x-x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \text{Ln}|x| - \frac{1}{2} \text{Ln}|1-x| - \frac{1}{2} \text{Ln}|x+1| + c$$

مثال ۲: انتگرال $\int \frac{xdx}{x^2+2x-3}$ را حل کنید.

حل: $g(x) = x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{(x+3)A + B(x-1)}{x^2+2x-3}$$

$$(x+3)A + B(x-1) = x$$

$$x=1 \rightarrow 4A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{4}, \quad x=-3 \rightarrow -4B = -3 \rightarrow B = \frac{3}{4}$$

با جایگذاری داریم:

$$\int \frac{1}{x^2+2x-3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{1}{2} \text{Ln}|x-1| + \frac{3}{4} \text{Ln}|x+3| + c$$

حالت ب) $g(x) = (x-a_1)^r (x-a_2)^s \dots (x-a_l)^l$

در این حالت بعضی از عوامل درجه ۱ در تجزیه تکرار شده اند که به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-a_1)^r} + \dots + \frac{B_1}{x-a_l} + \frac{B_2}{(x-a_l)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-a_l)^l}$$

و مانند حالت الف) مقادیر A_i ها و B_j ها را می یابیم.

مثال ۳: انتگرال $\int \frac{x}{(x+2)^2(x+1)} dx$ را حل کنید.

حل :

$$\frac{x}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1)}{(x+2)^2(x+1)}$$

$$A(x+1)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1) = x$$

$$x=0-1 \rightarrow A = -1 \quad , \quad x = -2 \rightarrow -C = -2 \rightarrow C = 2$$

$$x = 0 \rightarrow 4A + 2B + C = 0 \rightarrow 2B = -4A - C = 4 - 2 = 2 \rightarrow B = 1$$

باجایگذاری داریم:

$$\int \frac{x}{(x+2)^2(x+1)} dx = -\int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+2} dx + 2 \int \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

$$= -\ln|x+1| + \ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + c$$

مثال ۴: انتگرال $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$ را حل کنید.

حل :

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$1 = Ax(x-1) + B(x-1) + cx^2$$

$$x = 0 \rightarrow 1 = -B \rightarrow B = -1 \quad , \quad x = 1 \rightarrow C = 1 \quad , \quad x = 2 \rightarrow 1 = 2A + B + 4C$$

$$\rightarrow 2A = 1 - B - 4C = 1 + 1 - 4 = -2 \rightarrow A = -1$$

باجایگذاری داریم:

$$\int \frac{dx}{x^3-x^2} = -\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x-1} = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + c$$

حالت ج) در تجزیه $g(x)$ عبارت درجه ۲ مانند $ax^2 + bx + c$ موجود باشد.اگر $g(x) = (ax^2 + bx + c)(x-d) \dots (x-t)$ آنگاه

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{D}{x-d} + \dots + \frac{R}{x-r}$$

حالت د) در تجزیه $g(x)$ عبارت درجه ۲ مانند $ax^2 + bx + c$ تکرار شده باشد. یعنی

$$g(x) = (ax^2 + bx + c)^r (x-d)(x-c)$$

در این صورت

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-t}$$

برای دو حالت ج و د نیز همانند دو حالت الف و ب مقادیر A_i ها و B_j ها و D و E و R را می یابیم.

مثال ۵: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \int \frac{dx}{x^3+x} \quad \text{ب) } \int \frac{dx}{(x+2)(x^2+1)}$$

حل: الف)

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + x(Bx + C)}{x(x^2 + 1)}$$

$$A(x^2 + 1) + x(Bx + C) = 1$$

$$x = 0 \rightarrow A = 1, x = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} 2A + B + C = 1 \\ 2A + B - C = 1 \end{cases} \rightarrow C = 0, B = -1$$

$$\int \frac{dx}{x^3 + x} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{-x}{x^2 + 1} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

زیرا

$$\int \frac{-x}{x^2 + 1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln|u| + c = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c, u = x^2 + 1 \rightarrow du = 2x dx$$

(ب)

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}$$

$$A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 2) = 1$$

$$x = -2 \rightarrow 5A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow A + 2C = 1 \rightarrow 2C = \frac{4}{5} \rightarrow C = \frac{2}{5} \\ x = 1 \rightarrow 2A + 3B + 3C = 1 \rightarrow 3B = -\frac{3}{5} \rightarrow B = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{5} \int \frac{-x+2}{x^2+1} dx = \frac{1}{5} \ln|x+2| - \frac{1}{5} \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{5} \ln|x+2| - \frac{1}{10} \ln(x^2+1) + \frac{2}{5} \tan^{-1} x + c$$

زیرا

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c, u = x^2+1 \rightarrow du = 2x dx$$

مثال ۶: انتگرال $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$ را حل کنید.

حل:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)x + (Dx+E)x}{x(x^2+1)^2}$$

$$A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x^2 + 1)x + (Dx + E)x = 1 \rightarrow$$

$$(A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + C)x^2 + Ex + A = 1$$

$$\begin{array}{ll} \text{مقدار ثابت دوطرف تساوی: } A=1 & \text{ضرب } x^4: A+B=0 \text{ پس } B=-1 \\ \text{ضرب } x^3: C=0 & \text{ضرب } x^2: 2A+B+C=0 \text{ پس } D=-1 \\ \text{ضرب } x: C+E=0 \text{ پس } E=0 & \end{array}$$

بنابراین داریم:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c$$

زیرا:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c, \quad u = x^2+1 \rightarrow du = 2x dx$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2u} + c = \frac{1}{2(x^2+1)} + c, \quad u = x^2+1 \rightarrow du = 2x dx$$

مثال ۷: انتگرال $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$ را حل کنید.

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x} = \frac{A(a+x)+B(a-x)}{a^2-x^2} \quad \text{حل}$$

$$A(a+x) + B(a-x) = 1$$

$$x=-a \rightarrow 2B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{2a}, \quad x = a \rightarrow 2A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a-x} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a+x} = -\frac{1}{2a} \ln|a-x| + \frac{1}{2a} \ln|a+x| + c = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

تمرین بخش 6.7

$$1) \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

$$2) \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$$

$$3) \int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$$

$$4) \int \frac{x^2}{x^2+x-6} dx$$

$$5) \int \frac{dx}{x^3+3x^2}$$

$$6) \int \frac{x^2+4x-1}{x^3-x} dx$$

$$7) \int \frac{5x-2}{x^2-4} dx$$

$$8) \int \frac{dx}{(x-2)^2(x+1)}$$

$$9) \int \frac{dx}{x^2(1+x)^2}$$

$$10) \int \frac{4x dx}{(1-x^2)^2(1+x^2)}$$

$$11) \int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x} dx$$

$$12) \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$$

$$13) \int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$$

راهنمایی در تمرین ۱۲ و ۱۳ از تغییر متغیر $u=x^6$ کمک بگیرید.

بخش 7.7 انتگرال گیری از توابع گویای مثلثاتی

در این بخش به حل انتگرال گویا بر حسب $\sin x$ و $\cos x$ معروف به توابع گویای مثلثاتی که با $R(\sin x, \cos x)$ نمایش می دهیم می پردازیم.

دو روش برای حل این انتگرالها یعنی $\int R(\sin x, \cos x) dx$ وجود دارد.

روش تغییر متغیر عمومی (کلی) و روش تغییر متغیر خصوصی (جزئی).

روش تغییر متغیر عمومی: این تغییر متغیر $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ است که معادل آن $x = 2 \tan^{-1} z$ است. در این صورت با محاسبه داریم

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

با جایگذاری dx و $\sin x$ و $\cos x$ در انتگرال به یک انتگرال گویا بر حسب z می‌رسیم و به کمک روش تجزیه کسرها آن را حل می‌کنیم.

مثال ۱: انتگرال $\int \frac{dx}{2+2\sin x+\cos x}$ را حل کنید.

حل: با تغییر متغیر عمومی $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ داریم

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

با جایگذاری در انتگرال داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+2\sin x+\cos x} &= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{2+\frac{4z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2dz}{2+2z^2+4z+1-z^2} = \int \frac{2dz}{z^2+4z+3} = 2 \int \frac{dz}{(z+2)^2-1} = \\ &= -\operatorname{Ln} \left| \frac{1+(z+2)}{1-(z+2)} \right| + c = -\operatorname{Ln} \left| \frac{3+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{-1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right| + c = -\operatorname{Ln} \left| \frac{3+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right| + c \end{aligned}$$

زیرا طبق مثال ۷ بخش ۶، ۷ داریم $(a=1, x=z+2)$

$$\int \frac{dz}{(z+2)^2-1} = -\frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{1+(z+2)}{1-(z+2)} \right| + c$$

مثال ۲: انتگرال $\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x}$ را حل کنید.

حل: با تغییر متغیر عمومی $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ داریم

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

با جایگذاری در انتگرال داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x} &= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1-\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2dz}{1+z^2-2z+1-z^2} = \int \frac{2dz}{2-2z} = \int \frac{dz}{1-z} = -\operatorname{Ln}|1-z| = \\ &= -\operatorname{Ln} \left| 1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \end{aligned}$$

توجه: روش تغییر متغیر عمومی اغلب طولانی است ولی همواره می‌توان از آن استفاده کرد.

روش تغییر متغیر خصوصی (جزئی) در انتگرال مثلثاتی: می‌توان از سه شرط زیر کمک گرفت:

(۱) اگر $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$ آنگاه از تغییر متغیر $z = \tan x$ استفاده می‌کنیم در این صورت با محاسبه داریم:

$$dx = \frac{dz}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad x = \tan^{-1} z$$

(۲) اگر $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$ آنگاه از تغییر متغیر $z = \cos x$ استفاده می‌کنیم

(۳) اگر $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$ آنگاه از تغییر متغیر $z = \sin x$ استفاده می‌کنیم

مثال ۳: انتگرال $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ را حل کنید.

حل: حالت ۱) برقرار است بنابراین از تغییر متغیر $z = \tan x$ کمک می‌گیریم و

$$dx = \frac{dz}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad x = \tan^{-1} z$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2} = \int \frac{dz}{1+2z^2} = \int \frac{dz}{1+(\sqrt{2}z)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}(\sqrt{2}z) + c =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}(\sqrt{2} \tan x) + c$$

مثال ۴: نشان دهید که $\int \sec x dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + c$

حل:

$$\int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + c$$

از حالت ۳) استفاده از تغییر متغیر $z = \cos x$ کمک گرفته ایم.

نکته: در مثال زیر اگر از تغییر متغیر عمومی استفاده کنیم به انتگرالی می‌رسیم که محاسبه آن طولانی است. ولی با استفاده از جدول مقدماتی (ضرب صورت و مخرج تابع زیر علامت انتگرال در مزدوج عبارت واقع در مخرج) به یک انتگرال ساده می‌رسیم.

مثال ۵: انتگرال $\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx$ را حل کنید.

حل: صورت و مخرج تابع زیر علامت انتگرال در مزدوج $1-\sin x$ ضرب می‌کنیم.

$$\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} dx = \int \frac{\sin x + \sin^2 x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \tan^2 x dx = -\frac{1}{\cos x} + \int (1 + \tan^2 x) dx - \int dx = -\sec x + \tan x - x + c$$

در پایان چند انتگرال می‌آوریم مرجعی برای برخی از انتگرال‌ها هستند.

1) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + c \quad a > 0$

2) $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{(n-1)} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{(n-2)} x dx$

3) $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{(n-1)} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{(n-2)} x dx$

4) $\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{(n-1)} x - \int \tan^{(n-2)} x dx$

5) $\int \cotg^n x dx = -\frac{1}{n-1} \cotg^{(n-1)} x - \int \cotg^{(n-2)} x dx$

6) $\int \sec^m x dx = \frac{1}{m-1} \sec^{(m-2)} x \tan x + \frac{m-2}{m-1} \int \sec^{(m-2)} x dx$

7) $\int \csc^m x dx = -\frac{1}{m-1} \csc^{(m-2)} x \cotg x + \frac{m-2}{m-1} \int \csc^{(m-2)} x dx$

8) $\int \csc x dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + c$

9) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{(n-1)} e^x dx$

تمرین بخش 7.7

انتگرال های زیر را حل کنید.

$$1) \int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x} \quad 2) \int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad 3) \int \frac{dx}{1 - \sin x}$$

$$4) \int \frac{dx}{1 + \cos x} \quad 5) \int \frac{dx}{1 - \cos x} \quad 6) \int \frac{dx}{\tan x - 1}$$

$$7) \int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x} \quad 8) \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} \quad 9) \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin x + \tan x} \quad 11) \int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x} \quad 12) \int \frac{dx}{4\sin^2 x - 3\cos^2 x}$$