فصل ۱

منطق و اثبات

هر علم، به ویژه ریاضیات، از یک طرف با مفاهیم سر و کار دارد کـه بایـد بـا **تعریـف** دقیق شناخته شوند، و از طرف دیگر بر آن است که **احکامی** را، هر چنـد کـه سـرراسـت و ساده باشند، با استدلال **اثبات** کند (نه با جنگ و دعوا یا سوگند خوردن !)

تعریف چیست، **حکم** کدام است، **چطور استدلال** کنیم؟

منطق ریاضی قواعد و روش‌های علمی رسیدن به این مقصود را در اختیار می‌گذارد.

قصد ما در این فصل کوتاه، که برای دو جلسه‌ی درس **مبانی علوم ریاضی** تهیـه شـده است، معرفی مختصر این مطالب است. برای کسب اطلاعات بیشتر در باره‌ی منطق ریاضـی، بـه کتاب‌هایی که در فهرست منابع آمده، رجوع نمایید.

اندیشیدن بیاموزیم و اندیشه ورزی کنیم!

۱.۱ منطق

در این بخش برخی از واژه‌ها و مفاهیم مربوط به منطق گزاره‌ها را می‌آوریم که به مرور، به طور صریح و ضمنی، به کار خواهیم برد.

تعریف چیست؟

از همان دوران کودکی متوجه شدیم که به کمک حواس می‌توانیم از هر شئ، با توجه به مشخصات ظاهری‌ای که دارد، تصویری در ذهن ایجاد کنیم.

مشخصات هر شئ معرف آن است.

یکی از مشکلات **مبتدیان** علم و دانش، درک تعریف مفاهیم علمی، به ویژه **مفاهیم** مجرد **ریاضی**، است. زیرا غالباً شاهد عینی و تصویری ندارند و **عقل** عامل اصلی درک مشخصات آن‌ها است.

استعداد ممکن است فطری باشد، ولی به پرورش نیاز دارد.

با تمرین‌کردن و اندیشه‌ورزی،

عقل نیز قادر به درک مفاهیم مجرد می‌شود.

به توانایی‌های خود کم اهمیت ندهیم!

حتی خبره‌ترین دانشمندان نیز فرایند پیچیده‌ی فراگیری مفاهیم علمی را به مرور و با تلاش پشت سر گذاشتند!

البته تنها با تماشای بازی فوتبال، نمی‌توان فوتبالیست شد،

ما که نشدیم!

گفتیم که درک **حسی** ساده‌تر از درک **عقلی** است. برای مثال، درک سیب ساده‌تر از درک عنصر اکسیژن است. حتی درک اعداد ۱، ۲، ۳، . . . بسیار آسان‌تر از قبول و درک اعدادی چون، ۵-، $\ln 2$، e، π، . . . است. البته میزان و نوع نیاز افراد به درک اشیاء یا مفاهیم یکسان نیست و لزومی هم ندارد یکسان باشد. میزان شناخت میوه‌فروش از سیب با میزان شناخت کشاورز یا گیاه‌شناس متفاوت است. کودک برای انتخاب رنگ آب‌نباتش نیازی به آگاهی از طول موج نوری که از آن ساطع می‌شود، ندارد.

میزان نیاز شناخت دانشجوی علوم ریاضی از تعریف مفاهیم بسیار بیشتر از دیگران است!

تعریف باید جامع و مانع باشد!

یعنی باید تمام اشیای مورد نظر را دربر گیرد و مانع شمول شیئی که مورد نظر نیست شود.

تعریف نباید مستلزم دور باشد!

نمی‌توان گفت که **متناهی** آن است که **نامتناهی** نباشد، و **نامتناهی** آن است که **متناهی** نباشد.

گزاره

حال که نسبتاً با **تعریف** مفاهیم آشنا شدیم، یکی از اساسی‌ترین مفاهیم منطق ریاضی یعنی **گزاره** را معرفی می‌کنیم. گفتیم که ریاضی‌دانان برآنند که **درستی** یا **نادرستی** جمله‌هایی را با استدلال اثبات کنند. پس این جمله‌ها باید قابلیت **درست** یا **نادرست** بودن را داشته باشند.

جمله‌ای خبری را که بتواند یک و تنها یکی از دو صفت درست یا نادرست را بپذیرد، گزاره می‌نامیم.

۱.۱.۱ بحث در کلاس

۱- آیا باید **درستی** یا **نادرستی** گزاره همین حالا معلوم باشد؟

۲- گزاره بودن جمله‌های زیر و **درستی** یا **نادرستی** آن‌ها را (در صورت امکان) به کمک **استاد درس** به بحث بگذارید.

(الف) عدد π از ۳ بزرگ‌تر است.

(ب) عدد π از ۴ کوچک‌تر است.

(پ) $\pi = ۳.۱۴$.

(ت) برخی انسان‌ها باسوادند.

(ث) اگر باران بر زمین ببارد، زمین خیس می‌شود.

(ج) بیست و ششم اردیبهشت سال ۱۳۸۹ یکشنبه بود.

(چ) پنجم اسفند سال ۲۰۰۰ شمسی یکشنبه است.

(ح) رقم صدم بسط اعشاری عدد π برابر با ۴ است.

(خ) فردوسی در روز اول بیست سالگی‌اش شعری سرود.

یقیناً به آسانی متوجه شدید که همه‌ی این جمله‌ها گزاره‌اند. از گزاره‌های **(الف)** تا **(ج)** تنها **(پ)** نادرست است (**چرا؟**) برای تعیین درستی یا نادرستی **(چ)** و **(ح)** محاسبه‌های زیادی باید انجام داد، ولی به هر حال **یا درست** هستند **یا نادرست** و **حالت سومی وجود ندارد**. همچنین، درستی یا نادرستی گزاره‌ی **(خ)** معلوم نیست، ولی مجدداً از دو حالت **درست** یا **نادرست** خارج نیست، حتی اگر تا ابد معلوم نشود!

حتماً شنیده‌اید که درستی گزاره‌ی

معادله‌ی $x^n + y^n = z^n$ با $n \geq ۳$ جواب صحیح برای $x, y, z \neq ۰$ ندارد.

که به **آخرین قضیه‌ی فرما** معروف است، پس از حدود ۳۵۰ سال اثبات شد و شگفتی قرن بیستم نام گرفت.

احتمالاً برخی از شما با ناممکن بودن **تثلیث زاویه**، **تربیع دایره**، و **تضعیف مکعب** با خط کش و پرگار آشنا هستید. با وجودی که ناممکن بودن آن‌ها سال‌هاست که

اثبات شده است، هنوز برخی از **غیر ریاضی‌دانان** به جای استفاده‌ی بهتر از وقت و انرژی خود و دیگران، برای اثبات ممکن بودن آن‌ها تلاش می‌کنند.

۲.۱.۱ بحث در کلاس

دلیل گزاره نبودن جمله‌های زیر را به بحث بگذارید.

۱- قیمت کفش شما **ارزان** است.

۲- **او** فوتبالیست است.

۳- x عددی مثبت است.

حتماً متوجه شده‌اید که جمله‌های بالا با وجود خبری بودن، به این دلیل گزاره‌ی ریاضی نیستند که نمی‌توان یکی از دو صفت **درست** یا **نادرست** را برای آن‌ها قائل شد. توجه کنید که نمی‌دانیم **ارزان** یعنی چقدر، **او** کیست، و x کدام است.

ترکیب گزاره‌ها

گزاره‌ها می‌توانند ساده یا مرکب باشند، یعنی به گونه‌ای از ترکیب چند گزاره تشکیل شده باشند. برای مثال، "**عدد π از ۳ بزرگ‌تر و از ۴ کوچک‌تر است**" گزاره‌ای مرکب است که از دو گزاره‌ی ساده‌ی "**عدد π از ۳ بزرگ‌تر است**" و "**عدد π از ۴ کوچک‌تر است**" ساخته شده است. به طور کلی، گزاره‌ها را **چطور** می توان با هم ترکیب کرد؟ اگر P و Q گزاره باشند، برخی از روش‌های اصلی و متداول ترکیب آن‌ها به صورت زیر است:

ردیف	نام	می خوانیم	نماد گذاری ریاضی
۱	**نقیض گزاره**	چنین نیست که P	$P', \sim P, \neg P$
۲	**ترکیب عطفی**	P و Q	$P \wedge Q$
۳	**ترکیب فصلی**	P یا Q	$P \vee Q$

۴	**ترکیب شرطی**	اگر P آنگاه Q	$P \to Q$
۵	**ترکیب دوشرطی**	P اگر و تنها اگر Q	$P \leftrightarrow Q$

بسیاری از گزاره‌های دیگر با تکرار و ترکیبی از این روش‌ها به دست می‌آیند. روشن است که درستی یا نادرستی گزاره‌های مرکب به درستی یا نادرستی گزاره‌های سازنده‌اش بستگی دارد.

از گزاره‌های بالا، حالت‌های درست و نادرست **۱**، **۳**، و **۴** را مورد بحث قرار می‌دهیم، بقیه روشن هستند.

۳.۱.۱ نقیض گزاره

توجه می‌کنیم که وقتی گزاره‌ای واقعی جانشین P می‌شود، جمله‌ی "**چنین نیست که P**" را به گونه‌ای می‌نویسیم که روان و سلیس خوانده شود. همچنین، توجه می‌کنیم که

اگر P درست باشد، $\neg P$ نادرست است، و اگر P نادرست باشد، $\neg P$ درست است.

جدول زیر مبین این واقعیت است.

P	$\neg P$
د	ن
ن	د

۴.۱.۱ بحث درکلاس

۱- آیا نقیض گزاره‌ی ۲>۵ را می‌توان به‌جای **چنین نیست که ۲>۵** یا به جای

$2 \not< 5$ به صورت $2 \geq 5$ نیز نوشت؟

۲- آیا نقیض $2|5$ را می توان به جای **چنین نیست که $2|5$** یا به جای $2 \nmid 5$ به صورت $5|2$ نوشت ؟

۳- آیا نقیض گزاره‌ی **همه‌ی انسان‌ها باسواد هستند** را می‌توان به‌صورت **همه‌ی انسان‌ها با سواد نیستند** یا **همه‌ی انسان‌ها بی‌سواد هستند**، نوشت؟

گرچه پاسخ به سؤال **۳** منفی است، ممکن است با لحنی ادا شود که صحیح به نظر آید! در ریاضیات باید هر آنچه می‌گوییم یا می‌نویسیم نزد همه و در هر شرایطی به یک معنی باشد.

۵.۱.۱ ترکیب فصلی $P \vee Q$

تذکر این نکته لازم است که گرچه در زبان محاوره‌ای وقتی می‌گوییم **این یا آن** معمولاً منظورمان هر دو نیست. ولی در ریاضیات رابط **"یا"** هر دو حالت را نیز در بر می‌گیرد. پس

گزاره‌ی مرکب "P یا Q" ($P \vee Q$) تنها وقتی نادرست است که هر دو گزاره‌ی P و Q نادرست باشند.

P	Q	$P \vee Q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

۶.۱.۱ ترکیب شرطی $P \to Q$

درک گزاره‌ی شرطی **اگر** P **آنگاه** Q دقت و توجه بیشتری را می‌طلبد. ابتدا در بحث زیر شرکت کنید.

۷.۱.۱ بحث در کلاس

به‌نظر شما در چه صورتی ادعای **"اگر باران بر زمین ببارد، زمین خیس می‌شود"** **نادرست** است؟ روشن است که

تنها در صورتی گزاره‌ی شرطی "اگر P آنگاه Q" نادرست است که P درست باشد ولی Q نادرست!

پس جدول زیر را داریم

P	Q	$P \to Q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

اگر قبول سطرهای سوم و چهارم جدول بالا آزار دهنده‌اند، نگران نباشید، حتی ریاضی‌دانان حرفه‌ای نیز مدت‌ها درگیر آن بودند! وقتی باران نباریده، گوینده‌ی جمله ضامن خیس شدن یا خیس نشدن زمین نیست، هست؟

در سطرهای **۳** و **۴** جدول بالا، می‌گوییم که

گزاره‌ی $P \to Q$ به انتفای مقدم درست است.

اگر گزاره‌ای درست باشد، آن را **قضیه** می‌نامیم. متداول است که وقتی $P \to Q$ درست است، یعنی قضیه است، آن را به صورت $P \Rightarrow Q$ نشان دهیم. همچنین، با توجه به جدول بالا،

اگر P نادرست باشد، صرف‌نظر از درستی یا نادرستی Q، گزاره‌ی $P \Rightarrow Q$ درست است. پس با توجه به سطر اول جدول، باید از فرض درستی P، درستی Q را اثبات کنیم.

۸.۱.۱ تذکر

معمولاً گزاره‌ای را که **همیشه درست** است با T یا ۱ و گزاره‌ای را که **همیشه نادرست** است با F یا ۰ نشان می‌دهیم. همچنین، دو گزاره را **برابر** یا **معادل** می‌دانیم اگر ارزش‌های درستی آن‌ها یکسان باشند. این بخش را با بیان برخی از ویژگی‌های روشن گزاره‌ها به پایان می‌بریم. تنها برخی را به عنوان نمونه اثبات می‌کنیم.

۹.۱.۱ قضیه

فرض کنیم P، Q، R گزاره‌هایی دلخواه هستند. در این صورت، داریم

۱- $P \vee P = P$ (**خودتوانی**)

۲- $P \vee Q = Q \vee P$ (**تعویض‌پذیری**)

۳- $P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$ (**شرکت‌پذیری**)

۴- $P \vee F = P$ (**ویژگی** F)

۵- $P \vee T = T$ (**ویژگی** T)

۱۰.۱.۱ قضیه

$P \rightarrow Q$ *اگر و تنها اگر* $P \vee Q = Q$ *اگر و تنها اگر* $P \wedge Q = P$.

اثبات

یکسان بودن ستون‌های ارزش‌های درستی و نادرستی سه گزاره‌ی داده شده که بر حسب ارزش‌های گزاره‌های p و q در جدول زیر محاسبه شده است حکم‌های قضیه را اثبات می‌کند:

P	Q	$P \to Q$	$P \vee Q$	$P \vee Q \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \leftrightarrow P$
د	د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د	ن	ن

۱۱.۱.۱ قضیه

برای گزاره‌های دلخواه R، Q، P داریم.

۱- (**ویژگی‌های جذب**)

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$

$$P \wedge (P \vee Q) = P$$

۲- (**ویژگی‌های توزیع‌پذیری**)

$$P \vee \left(Q \wedge R\right) = \left(P \vee Q\right) \wedge \left(P \vee R\right)$$

$$P \wedge \left(Q \vee R\right) = \left(P \wedge Q\right) \vee \left(P \wedge R\right)$$

گزاره‌های سوردار

در بحث **۲.۱.۱** دیدیم که جمله‌های **او فوتبالیست است** و **x عددی مثبت است** به این دلیل گزاره نیستند که **او** و x مجهول هستند. البته اگر به‌جای **او** نام شخصی، مثلاً علی دایی یا ابراهیمی و به جای x عددی چون ۷ یا π قرار دهیم، گزاره به دست می‌آید که می‌توان یکی از دو صفت **درست** یا **نادرست** را برای آن قایل شد!

۱۲.۱.۱ تعریف

جمله‌ای که شامل **متغیر** (مجهول) باشد به طوری که وقتی عضوی از مجموعه‌ی معینی را جانشین آن متغیر می‌کنیم گزاره به‌دست می‌آید، **گزاره نما** می نامیم.

گزاره نماها را به‌گونه‌ای که در زیر می‌بینیم نیز می توان به گزاره تبدیل کرد.

برخی از گزاره‌ها شامل الفاظ **هر** یا **بعضی** هستند. برای مثال **هر انسانی فانی است** و **بعضی انسانها باسوادند** از این نوع هستند. **سور عمومی هر** را با $\forall$ و **سور وجودی** یا **بعضی** را با $\exists$ نشان می‌دهیم. در زبان ریاضی، الفاظ **هر** و به ویژه **بعضی** معنی خاصی دارند که خواهیم دید.

اگر $P(x)$ **گزاره‌نما**، یعنی **شرطی روی** x، باشد، گزاره‌ی **"برای هر** x، $P(x)$**"** را به‌صورت $\forall x, P(x)$ می‌نویسیم. همچنین، گزاره‌ی **"برای بعضی از** x**ها**، $P(x)$**"** را به صورت $\exists x, P(x)$ می‌نویسیم.

توجه کنید که جمله‌ی **برای هر** x بسیار کلی است و ممکن است شامل اشیایی شود که برای آن‌ها شرط $P(x)$ بی‌معنی باشد. از این رو، اغلب تغییرات x را در مجموعه‌ای چون A محدود می‌کنیم و می‌نویسیم $\forall x \in A, P(x)$. روشن است که اگر A را تغییر دهیم، گزاره‌ی دیگری به دست می‌آید.

برای مثال، اگر x در مجموعه‌ی $B=\{$**علی کریمی**، **کریم باقری**، **علی دایی**$\}$ تغییر کند، گزاره‌ی "**برای هر** $x \in A$، x **فوتبالیست است**" گزاره‌ای **درست**، و اگر x در مجموعه‌ی

A=$\{$**علی دایی**، **دکتر کرمزاده** ، **دکتر بهزاد**، **دکتر محمودی**، **دکتر ابراهیمی**$\}$

که چهار نفر ریاضیدان هستند و نفر دیگر فوتبالیست است تغییر کند، گزاره‌ای **نادرست** به دست می‌آید. توجه می‌کنیم که

۱۳.۱.۱ تعریف

گزاره‌ی $\forall x \in A, P(x)$ **نادرست** است اگر و تنها اگر **دست کم یک عضو** (**حتی یک عضو**) چون a در A وجود داشته باشد به طوری که $P(a)$ نادرست باشد!

و گزاره‌ی $\exists x \in A, P(x)$ **نادرست** است اگر و تنها اگر **هیچ** عضوی چون $a \in A$ وجود نداشته باشد به طوری که $P(a)$ درست باشد.

۱۴.۱.۱ بحث در کلاس

مجموعه‌های A و B بالا را در نظر بگیرید. **درستی** یا **نادرستی** گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۱- عضوی در B وجود دارد که فوتبالیست است.

۲- عضوی در A وجود دارد که فوتبالیست است.

۳- برخی از اعضای B فوتبالیست هستند.

۴- برخی از اعضای A فوتبالیست هستند.

یقیناً به راحتی متوجه شدید که گزاره‌های **۱** و **۲** درست هستند. ولی، اگر چه گزاره‌ی **۳** همان گزاره‌ی **۱** و گزاره‌ی **۴** همان گزاره‌ی **۲** است، گاهی با این چنین گزاره‌ها قدری مشکل داریم! مشکل از اینجا ناشی می‌شود که در زبان محاوره‌ای اغلب لفظ **برخی** به این معنی تعبیر می‌شود که **بیش از یکی ولی نه همه**، که در ریاضیات چنین نیست و **بیش از یکی و حتی همه** می‌تواند باشد. البته ممکن است بگویید که **اگر فقط یکی** یا **همه** مورد نظر

است، چرا از لفظ **برخی** استفاده می‌شود؟ حق با شما است، ولی این موضوع حقایق بالا را بی‌اعتبار نمی‌کند!

۱۵.۱.۱ نقیض گزاره‌های سوردار

نکتهی دیگری که باید در مورد این سورها بیان کنیم، نحوه‌ی نقیض کردن آن‌ها است که به روشی به صورت‌های زیر انجام می‌شوند.

$$\neg\left(\forall x \in A, P\left(x\right)\right) \equiv \exists x \in A, \neg P\left(x\right)$$
$$\neg\left(\exists x \in A, P\left(x\right)\right) \equiv \forall x \in A, \neg P\left(x\right)$$

تمرین ۱.۱

۱- از جمله‌های داده شده کدام‌ها گزاره‌اند؟ $۲ < ۵$، $۲ < x$، عددی طبیعی چون x وجود دارد به طوری که $۲ < x$.

۲- از جمله‌های زیر کدام‌ها درست و کدام‌ها نادرست هستند؟ برای پاسخ خود دلیلی بیاورید.

(الف) اگر $x = ۳$ آنگاه $۲ < x$.

(ب) اگر $x = ۱$ یا $x = ۲$ آنگاه $x(x-۳) = ۰$.

(پ) عدد صحیح x وجود دارد به طوری که $x(x-۳) = ۰$.

(ت) اگر عدد صحیح x وجود داشته باشد به طوری که $x^{۲} = -۱$ آنگاه در درس مبانی علوم ریاضی نمره‌ی ۱۸ می‌گیرم.

(ث) اگر دو خط در صفحه موازی نباشند، متقاطع هستند.

(ج) اگر امروز یکشنبه باشد، آنگاه فردا دوشنبه است.

(چ) اعداد صحیح x و y وجود دارند به طوری که x^{y} عددی حقیقی است.

۳- جدول‌های ارزش گزاره‌های مرکب زیر را بنویسید:

(الف) $P \Rightarrow P'$.

(ب) $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ و $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$. (گزاره‌هایی همیشه درست هستند. قضیه‌ی ۱۱.۱.۱ را ببینید.)

(پ) $P \vee \left(Q \wedge R\right) \Leftrightarrow \left(P \vee Q\right) \wedge \left(P \vee R\right)$ و $P \wedge \left(Q \vee R\right) \Leftrightarrow \left(P \wedge Q\right) \vee \left(P \wedge R\right)$. (این دو نیز همیشه درست هستند. قضیه‌ی ۱۱.۱.۱ را ببینید. توجه کنید که، چون این دو گزاره‌ی مرکب از سه گزاره تشکیل شده‌اند، هشت حالت درست و نادرست برای هرگزاره وجود دارد.)

۴- گزاره‌های زیر را به نثر روان فارسی بنویسید:

(الف) $(\forall \varepsilon > \circ)(\exists \delta > \circ)(\forall x \in \mathbb{R})[|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon]$. آیا این گزاره معرف $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ است؟

(ب) $(\exists \circ \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z}) \quad (x + \circ = x = \circ + x)$. آیا این گزاره درست است؟

(پ) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists x' \in \mathbb{Z}) \quad (x + x' = \circ = x' + x)$. آیا این گزاره درست است؟

(ت) $(\exists k \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z}) \quad (x + k = \circ = k + x)$. آیا این گزاره درست است؟

۵- نقیض گزاره‌های تمرین ۴ را بنویسید. (بیش‌تر دقت کنید.)

۲.۱ اثبات ریاضی

هنر ریاضیات خلق اثباتها است!

یادآوری می‌کنیم که هر گزاره‌ای را که درستی آن اثبات شده باشد، **قضیه** می‌نامیم. به بیان ساده،

اثبات درستی یک گزاره یعنی نمایشی قانع کننده از درست بودن آن، به روش‌های استانده‌ی مورد قبول .

برخی از روش‌های اثبات را به اختصار در زیر می‌آوریم. برای کسب اطلاع بیشتر به کتاب‌های ؟؟؟ داده شده در فهرست منابع رجوع نمایید.

۱.۲.۱ روش اثبات مستقیم

قضیه‌ها اغلب به‌صورت گزاره‌های شرطی **اگر** P **آنگاه** Q هستند، یعنی دارای **فرض‌هایی** هستند که **حکمی** را نتیجه می‌دهند. در روش اثبات مستقیم این گونه قضیه‌ها، دو مرحله‌ی زیر را انجام می‌دهیم.

۱- **فرض می‌کنیم P درست است.**

۲- با استفاده‌ی مستقیم از اصول موضوع، تعریف‌ها، قضیه‌های قبلی و **درستی** P، **درستی** Q را اثبات می‌کنیم.

۲.۲.۱ بحث درکلاس

برای مثال، می‌خواهیم قضیه‌ی زیر را به‌این روش اثبات کنیم.

۳.۲.۱ قضیه

مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است.

اثبات

اثبات را مرحله به مرحله انجام می‌دهیم.

۱- فرض می‌کنیم که اعداد x و y زوج هستند.

۲- در این صورت، بنابر **تعریف** اعداد زوج، اعدادی صحیح چون a و b وجود دارند به-طوری که $x=۲a$ و $y=۲b$. حال، بنابر **ویژگی** توزیع‌پذیری جمع روی ضرب اعداد، داریم $x+y= ۲a+۲b=۲(a+b)$.

۳- دوباره، بنابر تعریف زوج بودن اعداد، چون $x+y$ مضرب ۲ است، پس زوج است. ■

۴.۲.۱ تذکر

بیان نکته‌های زیر مفید است.

۱- جمله‌ی "**اگر** P " لزوماً به این معنی نیست که گزاره‌ی P به خودی خود درست است، بلکه ما آن را **درست فرض می‌کنیم**. برای مثال، ممکن است استاد درس بگوید که

اگر **معدل کلاس** در امتحان از **۱۵** بیشتر باشد،
آنگاه نمره‌ی **هر** دانشجو را در **۱.۱** ضرب می‌کنم!

یقیناً منظور او این نیست که معدل کلاس از **۱۵** بیشتر خواهد شد!

۲- جمله‌ی "**آنگاه** Q" نیز لزوماً به این معنی نیست که گزاره‌ی Q به خودی خود درست است و لذا منظور استاد در گزاره‌ی بالا لزوماً به این معنی نیست که نمره‌ی هر دانشجو را، صرف‌نظر از معدل کلاس، در **۱.۱** ضرب می‌کند! بلکه قول او همان است که گفته است!

بکوشید به یکدیگر کمک کنید که معدل کلاس از ۱۵ بیشتر شود!
آنوقت من هم ارفاق می‌کنم!

۵.۲.۱ روش عکس نقیض

با توجه به ستون‌های مربوط به گزاره‌های $P \to Q$ و $\neg Q \to \neg P$ در جدول زیر

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$
د	د	**د**	ن	ن	**د**
د	ن	**ن**	د	ن	**ن**
ن	د	**د**	ن	د	**د**
ن	ن	**د**	د	د	**د**

مشاهده می‌کنیم که اولی درست است اگر و تنها اگر دومی درست باشد. پس می‌توانیم برای اثبات درستی $P \to Q$، درستی $\neg Q \to \neg P$ را نشان دهیم. گزاره‌ی دوم را **عکس نقیض** گزاره‌ی اول و این روش اثبات را **روش عکس نقیض** می‌نامیم.

۶.۲.۱ بحث در کلاس

۱- عکس نقیض گزاره‌ی مذکور در قضیه‌ی **۳.۲.۱** را بنویسید.

۲- قضیه‌ی **۳.۲.۱** را به‌روش عکس نقیض اثبات کنید. با توجه به پاسخ بند **۱**، باید فرض کنید که $a+b$ فرد است و نشان دهید که a یا b فرد است.

۷.۲.۱ روش برهان خلف

در این روش برای اثبات درستی گزاره، آن را نادرست فرض می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این **فرض خلف**، حقیقت دانسته‌ای را **نقض** می‌کند. در بحث زیر شرکت کنید.

۸.۲.۱ بحث درکلاس

به روش **برهان خلف** ثابت کنید که $\sqrt{۲}$ اصم است. یعنی فرض کنید که، **برخلاف حکم**، $\sqrt{۲}$ گویا است، و مثلاً $\sqrt{۲}=\frac{a}{b}$ و به **تناقض** برسید. می‌توانید $\frac{a}{b}$ را به گونه‌ای به $\frac{m}{n}$ ساده

کنید که $(m,n)=۱$. سپس با عملیاتی به این نتیجه برسید که $(m,n)\neq ۱$، که **متناقض** با $(m,n)=۱$ است.

برخی از دانشجویان عادت کرده‌اند که درستی قضیه‌ها را به روش برهان خلف اثبات کنند! ولی اگر به روش مستقیم می‌توان راحت‌تر به نتیجه رسید، **چرا با برهان خلف؟!**

۹.۲.۱ روش اثبات وجود

گاهی لازم است وجود شیئی را که دارای ویژگی‌هایی خاص است اثبات کنیم. این کار به دو روش انجام می‌شود. در یکی مثالی واقعی از آن شئ ارائه می‌دهیم. برای مثال، برای اثبات وجود اعداد اصم، $\sqrt{۲}$ را مثال می‌زنیم.

در روش دیگر، بدون ارائه‌ی دستورالعملی برای پیدا کردن آن عضو، تنها وجود آن را اثبات می‌کنیم. برای مثال، **برای اثبات وجود دو عدد اصم a و b با این ویژگی که a^b گویا باشد**، بدون ذکر مثالی از a و b با ویژگی مورد نظر، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

اگر عدد $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گویا باشد، آنگاه حکم (با قرار دادن $a=b=\sqrt{۲}$) اثبات می‌شود. اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ اصم باشد، آنگاه با قرار دادن $a=\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ و $b=\sqrt{۲}$ حکم اثبات می‌شود. زیرا $a^b=(\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}^{۲}=۲$ عددی گویا است.

۱۰.۲.۱ اثبات به روش حالت‌ها

در این روش، حکم را به تعدادی متناهی حالت تقسیم می‌کنیم و هر حالت را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم. البته گاهی تعداد حالت‌ها ممکن است بسیار زیاد باشد. برای مثال، اثبات اولیه‌ی قضیه‌ی **چهار رنگ** به این روش و با در نظر گرفتن ۱۹۳۶ حالت اثبات شد. البته بعدها تعداد حالت‌ها به حدود ۶۰۰ حالت تقلیل داده شد.

۱۱.۲.۱ اثبات به روش استقرا

فرض کنیم $P(n)$ گزاره‌نمایی درباره‌ی اعداد طبیعی است و می‌خواهیم درستی گزاره‌ی "**برای هر عدد n، $P(n)$ درست است**" را اثبات کنیم. در واقع باید نشان دهیم که $P(۱)$، $P(۲)$، $P(۳)$ و الی آخر درست هستند. ولی تعداد این گزاره‌ها نامتناهی است و یقیناً نمی‌توانیم همه را بیازماییم! این کار را در دو مرحله‌ی زیر انجام می‌دهیم:

۱- نشان می‌دهیم که $P(۱)$ درست است؛ یعنی $P(n)$ به ازای $n=۱$ درست است.
۲- با فرض درستی $P(n)$ به درستی $P(n+۱)$ می‌رسیم.

سپس می‌گوییم که بنابر استقرا $P(n)$ **برای هر عدد طبیعی n درست است**.
این روش اثبات را **اثبات به روش استقرا** می‌گوییم.

۱۲.۲.۱ بحث در کلاس

به روش استقرا نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n، داریم

$$P(n): ۱+۲+\cdots+n=n(n+۱)/۲$$

روشن است که به ازای $n=۱$، سمت چپ $P(n)$ برابر با ۱ و سمت راست آن نیز برابر با ۱ است. پس $P(۱)$ درست است. حال فرض کنید $P(n)$ درست است، یعنی داریم

$$۱+۲+\cdots+n=n(n+۱)/۲$$

برای اثبات درستی $P(n+۱)$، نشان دهید که

$$(۱+۲+\cdots+n)+(n+۱)=n(n+۱)/۲+(n+۱)=(n+۱)(n+۲)/۲$$

پس، **بنابر استقرا**، $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست است.

این بخش را با بیان این نکته به پایان می‌بریم که گاهی در پایان اثبات‌ها عبارت QED را می‌بینید. این حروف، حروف اول کلمه‌های جمله‌ی لاتین "Quad Evat emonstrandun" هستند که به معنی **آنچه می‌خواستیم نشان دهیم** است . نمادهای متداول‌تر عبارت اند از □، ■، △، ▲.

توجه کنید که تنها با آگاهی از روشها و فنون اثبات، ضمانتی برای خلق اثبات نیست.

تبحر در ارائه‌ی اثبات‌ها به‌خودی خود و با بالارفتن سن به دست نمی‌آید؛ می‌آید؟! بلکه دست کم باید اثبات‌های دیگران را با دقت و برای آموزش پیچ و خم‌ها و ترفندهای آن‌ها مطالعه کرد و با تمرین و پشتکار این ترفندها را آموخت.

شما می توانید.

البته، تنها با تماشای فوتبال، نمی توان فوتبالیست شد! می‌توان؟!

تمرین ۲.۱

۱- عکس نقیض جمله‌های زیر را بنویسید و درستی جمله‌های به دست آمده را با دلیل تعیین کنید:

(الف) اگر x فرد باشد، انگاه مربع آن فرد است.

ب) $f(x)=\sin x$ آنگاه $f'(x)=\cos x$.

پ) اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد، پیوسته است.

ت) عدد طبیعی x زوج است اگر و تنها اگر $x^{۲}$ زوج باشد.

۲- از جمله های زیر کدام(ها) درست است؟

الف) $\forall x, P(x) \to \exists x, P(x)$.

ب) $\exists x \forall y, P(x,y) \to \forall x \exists y, P(x,y)$.

۳- آیا برای اثبات درستی $P \to (Q \to R)$ می توان درستی $(P \wedge Q) \to R$ را اثبات کرد؟ چرا؟

فصل ۲

مجموعه‌ها و اعمال روی آن‌ها

امروزه مفهوم **مجموعه** در سراسر ریاضیات و بسیاری از علوم دیگر، بنیادی تلقی می شود- حتی بنیادی تر از مفهوم **عدد** که در گذشته اساس کار شمرده می‌شد.

از آنجا که با این مفهوم و برخی از مفاهیم مرتبط با آن به‌طور **شهودی** در دوره دبیرستان آشنا شده‌اید، سعی می‌کنیم از مطالب ساده‌تر سریع‌تر گذر کنیم و بیشتر به مطالب جدیدتر و مجردتر بپردازیم. سعی ما بر این است که دانسته‌هایتان را **عمیق‌تر** و شما را برای درک مطالب **مجردتر** این کتاب و **دروس دیگر** آماده کنیم و از شما نیز چنین انتظاری داریم.

۱.۲ مجموعه و زیرمجموعه

در این بخش، به مناسبت یادآوری مفهوم **مجموعه**، تلاش می‌شود که **دقت** شما در برخورد با واژه‌های ریاضی **تقویت** شود. استادان درس معمولاً مطالعه‌ی قسمتی از مطالب این بخش را به عهده‌ی دانشجویان می‌گذارند تا بتوانند آن را در یک جلسه به پایان برسانند.

مانند مفهوم بنیادی **نقطه** در هندسه، **مجموعه** نیز مفهومی به اصطلاح **تعریف نشده** است. با وجود این، عبارت زیر **توصیفی** ساده و قابل استفاده از این واژه به دست می‌دهد که برای خوانندگان این کتاب مقدماتی مناسب و کافی است.

مجموعه دسته‌ای از اشیای مشخص و دو به دو متمایز است.

درک مدرسه‌ای شما از این مفهوم، نیازهای اولیه‌ی شما را برآورده می‌کند. ولی همان‌طور که گفتیم، برای تقویت ذهنتان، خواندن مطالب تشریحی زیر آموزنده است.

هرگاه مفهوم یا واژه‌ای علمی معرفی می‌شود، باید **قراردادهای** کار با آن را نیز بیان کنیم، که به مرور در این کتاب چنین خواهیم کرد. ابتدا کلمه‌ها و واژه‌های به کار رفته برای توصیف **مجموعه** را روشن‌تر می‌کنیم، و به این وسیله دقت علمی‌مان را بهبود می‌بخشیم. یادآوری می‌کنیم که گاهی **معنی** واژه‌های علمی، به‌ویژه ریاضی، با معنی لغوی و متداول آن‌ها **تفاوت**هایی دارد.

از آنجا که هدف شما تنها به خاطر سپردن واژه‌ها نیست و نباید باشد (استاد درس و ما نیز چنین هدفی را دنبال نمی‌کنیم)، با راهنمایی استاد درس، سؤال‌های زیر را با همکلاسی‌های خود به بحث بگذارید تا سلول‌های خاکستری مغز شما بی‌کار ننشینند !

تا فرد سخن نگفته باشد　　　عیب و هنرش نهفته باشد!

همان‌طور که تنها با تماشای بازی فوتبال، نمی‌توان فوتبالیست شد (**ما که نشدیم!**)، تنها با شنیدن و خواندن مباحث علمی، به‌ویژه ریاضی، نمی‌توان ریاضی‌دانی **سازنده** و **خلاق** شد.

فکر کنید و بحث کنید.

۱.۱.۲ بحث در کلاس

۱- در معرفی واژه‌ی **مجموعه** در برخی لغت‌نامه‌ها آمده است که:

مجموعه دسته‌ای از اشیاء است که دارای خواص مشترک باشند.

آیا در توصیف ریاضی این واژه که در بالا داده شد، چنین شرطی وجود دارد؟ برای مثال، آیا در ریاضیات دسته‌ی متشکل از سه شئ **میدان آزادی**، **ملانصرالدین**، و **استان گلستان** را می‌توان **مجموعه** نامید؟

۲- آیا واژه‌ی **شئ** که در توصیف مجموعه به‌کار بردیم، منظور **شیئی** بی‌جان است؟ آیا با وجودی که من و شما اشیایی بی‌جان نیستیم، دسته‌ی متشکل از **من**، **شما**، و **صندلی شما** را می توان مجموعه نامید؟

۳- منظور از واژه‌ی **مشخص** که در توصیف مجموعه به‌کار بردیم، چیست؟ آیا به این دلیل که در این لحظه برایمان **مشخص** نیست که فلان عدد هزار رقمی اول است یا نیست، نمی توانیم **دسته‌ی اعداد اول** را **مجموعه** بنامیم؟

۴- آیا **دسته‌ی دانشجویان قدبلند** یا **دسته‌ی کفش‌های ارزان** را می‌توان **مجموعه** نامید؟

۵- منظور از **دو به دو متمایز** چیست؟ آیا اگر این قید را برداریم، مفهوم با معنی دیگری به دست می‌آید؟ اگر اطلاعات عددی به دست آمده در سه آزمایش علمی اعداد ۲، ۵، ۲ باشند و **مهم** باشد که هر سه نتیجه را ثبت کنیم، کافی است این دسته را با واژه‌ای دیگر بجز **مجموعه** بنامیم، همان‌طور که میوه‌ی سیب را گلابی نمی‌نامیم، یا حتی خیار سبز را خیار چنبر نمی‌نامیم.

۶- آیا در توصیف داده شده برای مجموعه، **ترتیب** نام بردن اشیای مجموعه مهم است؟ به عبارت دیگر آیا اگر ترتیب نام بردن اشیای مجموعه را تغییر دهیم، مجموعه‌ی دیگری به دست می‌آید؟ اگر اطلاعات عددی به دست آمده در سه آزمایش علمی **به ترتیب** ۲۰،۳۰،۱۰ باشند

و ترتیب ثبت و رجوع به این خروجی ها مهم باشد، چه پیشنهاد مـی‌کنیـد؟ مانـند خیارسـبز و خیار چنبر که از صفت‌های سبز و چنبر استفاده شد، استفاده از صفت **مرتب** و نامیـدن آن بـا واژه‌ی مرکب **مجموعه‌ی مرتب** چطور است؟

۷- آیا **مجموعه** لازم است بیش از یک شئ داشته باشد؟ آیا اصلاً لازم است حتماً شیئی داشته باشد؟

۲.۱.۲ نمادگذاری

زبان ریاضیات، مانند هر زبان دیگر، نمادگذاری خاص خود را دارد. اگرچه معمولاً مجموعه‌هـا را با حروف بزرگ لاتین A، B، ...، اشیای آن‌ها را با حروف کوچک a، b، ...، نمایش خـواهیم داد، رعایت این قرارداد الزامی نیست.

هر شئ مجموعه را **عضو** آن مجموعه می‌نامیم و اگر شئ a عضو مجموعه‌ی A باشد می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم **a عضو A است**، یا با هر عبارتی که به این معنـی باشـد. اگـر شئ a عضو A نباشد می‌نویسیم $a \notin A$. (توجه کنید که اگر چه نماد عضویت $\in$ شکل تغییـر یافته‌ی حرف یونانی ε (اپسیلون) است، آن را اپسیلون نخوانید.)

برخی از مجموعه‌ها به دلایلی، خاص هستند و به آن‌ها اسامی و نمادهایی خاص نسـبت می‌دهیم. برای مثال،

هر مجموعه‌ای را که تنها یک عضو دارد، مجموعه‌ای تک عضوی می‌نامیم.

همچنین، گاهی شرط معرف یک مجموعه طوری است که هیچ شیئی در آن شرط صدق نمی‌کند. برای مثال، **مجموعه‌ی انسان‌های با قد ۱۰۰ متر** عضوی ندارد.

مجموعه‌ای را که هیچ عضوی ندارد، مجموعه‌ی تهی (یا پوچ) می‌نامیم و آن‌را با نماد $\emptyset$ نمایش می‌دهیم.

نباید چنین تصور شود که این مجموعه بی‌اهمیت است. خواهیم دید که ایـن مجموعـه و نماد $\emptyset$ دست‌کم برای بیان اختصاری برخی از واقعیت‌ها مفیداند. (نماد $\emptyset$ را گروه بورباکی، بـه-

ویژه آندره وایل، در سال ۱۹۳۹ معرفی کردند. این نماد از حرف دانمارکی و نروژی Ø گرفته شده است، و علی‌رغم شباهت آن به حرف یونانی φ (**فی**) هیچ ربطی به آن ندارد و آن را فی نمی‌خوانیم.)

۳.۱.۲ نمایش مجموعه‌ها

مجموعه را بر حسب مورد و نیاز، به روش‌های زیر می‌توان نمایش داد.

نمایش تفصیلی یا فهرستی

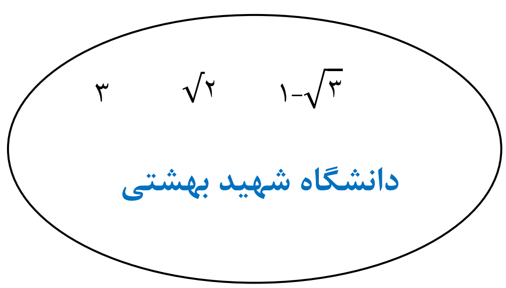
شاید ساده‌ترین روش مشخص کردن یک مجموعه، فهرست کردن عضوهایش درون آکولادها باشد. برای مثال

A={۳ , √۲ , **دانشگاه شهید بهشتی**, ۱- √۳}

نمایش **تفصیلی** یا **فهرستی** مجموعه‌ای است که سه عضوش اعداد ۳، √۲ ، √۳ -۱ و یک عضو دیگر آن، **دانشگاه شهید بهشتی**، و تنها این چهار عضو، هستند.

آیا عدد √۳ یا گروه ریاضی عضو این مجموعه هستند؟

گاهی عضوهای یک مجموعه را درون یک منحنی بسته، به نام **دایره‌ی اویلر** یا **نمودار ون** (Venn)، فهرست می‌کنیم:



نمایش توصیفی یا شرطی

روش فهرستی برای نمایش مجموعه‌هایی که دارای عضوهای زیادی هستند، مناسب نیست. برای مثال **مجموعه‌ی اعداد اول** با همین توصیف بهتر مشخص می‌شود تا به صورت فهرستی و ناقص $\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,...\}$. دست‌کم به این دلیل که، چون طبق قرارداد، برای عضوهای داخل آکولادها هیچ ترتیبی قایل نمی‌شویم، فهرست بالا را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\{۷,۵,۱۳,۱۱,۲,۳, ...\}$$

حال چه کسی می تواند از این آشفتگی سردر آورد و با اطمینان بگوید که عضوهای نانوشته چه اعداد یا اشیائی هستند و این مجموعه همان مجموعه‌ی اعداد اول است ؟! البته باید **اذعان** کنیم که ریاضی‌دانان گاهی نمادگذاری فهرستی را برای چنین مجموعه‌هایی نیز به کار می‌برند. مثال‌های زیر را ببینید.

$\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,...\}$; مجموعه‌ی **اعداد طبیعی**.

$\mathbb{N}_۰ = \{۰,۱,۲,۳,...\}$; مجموعه‌ی **اعداد حسابی**.

$\mathbb{Z} = \{ ... ,-۲,-۱, ۰,۱,۲,۳,...\}$; مجموعه‌ی **اعدادصحیح**.

$\mathbf{E} = \{۰,۲,۴,۶,...\}$; مجموعه‌ی **اعداد** (حسابی) **زوج**.

$\mathbf{O} = \{۱,۳,۵,...\}$; مجموعه‌ی **اعداد** (طبیعی) **فرد**.

$$A = \{۱,۲,۳,...,۹۹۹\}$$

اگر عضوهای مجموعه‌ای چون A با تحمیل شرط یا شرایطی، کاملاً و بدون ابهام مشخص شوند، آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

A=\{x | x شرط یا شرایطی درباره‌ی\}

و می خـوانیم **مجموعه‌ی همه‌ی x ها (اشیا)یی که در شـــرط یـــا شـــرایط داده شده صدق می‌کنند**، یا با هر عبارتی که به این معنی باشد. برای مثال،

$$\mathbb{N} = \{ x | \text{ عددی طبیعی است } x \}$$

$$\mathbf{E} = \{ x | \text{ عددی حسابی و زوج است } x \}$$

$$A = \{ x | \text{ دانشجوی دانشگاه شهید بهشتی است } x \}$$

اگر عضوهای A با تحمیل شرط یا شرایطی از عضوهای مجموعه‌ی مشخص دیگری چون Y انتخاب شوند، می‌توانیم بنویسیم.

$$A = \{ x | \ x \in Y \text{ و شرط یا شرایطی در باره‌ی } x \}$$

البته متداول‌تر است که شرط $x \in Y$ را در سمت چپ خط عمودی بنویسیم:

$$A = \{ x \in Y | \text{ شرط یا شرایطی در باره‌ی } x \}$$

و می‌خوانیم **مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی چون x از مجموعه‌ی Y که . . .** یا با هر عبارتی که به این معنی باشد.

نکته‌ی جالب در نمایش شرطی این است که بدون اینکه حتی یک عضو از مجموعه را نام ببریم، می‌توانیم آن را کاملاً توصیف کنیم. البته شرایط معرف مجموعه باید **بدون ابهام** و برای عضوهای مجموعه زمینه‌ی Y **با معنی** باشند. به مثال‌های زیر نیز توجه کنید.

$$\mathbf{E} = \{ n \in \mathbb{N} | \text{ زوج است } n \}$$

$$\mathbf{O} = \{ n \in \mathbb{N} | \text{ فرد است } n \}$$

$$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid ۱ \leq x \leq ۹۹۹ \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x^{۵} - ۳x^{۲} - ۲۰ = ۰ \}$$

که آخری مجموعه‌ی همه‌ی اعداد صحیحی است که در معادله‌ی $x^{۵} - ۳x^{۲} - ۲۰ = ۰$ صدق می‌کنند. برای مثال، $۲ \in A$، زیرا عددی طبیعی است و . . . . ولی چرا $۱ \notin A$ و $۱/۲ \notin A$. البته اگر بخواهیم، و امکان‌پذیر باشد، که همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی A را بیابیم، باید معادله‌ی $x^{۵} - ۳x^{۲} - ۲۰ = ۰$ را حل کنیم و همه‌ی جواب‌های آن را که در $\mathbb{Z}$ هستند، بیابیم، که لزوماً کار ساده‌ای نیست.

مجموعه‌ی

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = m/n, \quad m,n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq ۰\}$$

مجموعه‌ی اعداد گویا است. اگر $\mathbb{R}$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی **اعداد حقیقی** باشد، آنگاه

$$\mathbb{C} = \{ a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-۱}\}$$

مجموعه‌ی **اعداد مختلط** است. ممکن است با $i = \sqrt{-۱}$ آشنا نباشید و آن را **بی‌معنی** بپندارید. در این لحظه آن را صرفاً یک نماد در نظر بگیرید تا در دروس دیگر ریاضی با آن بیشتر آشنا شوید.

به مثال نمونه‌ای زیر نیز توجه کنید. فرض کنید $Y = \{۲, ۵, ۷\}$ و

$$\begin{aligned} A &= \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ نصف عضوی از } Y \text{ است}\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid x = (۱/۲)k, \quad k \in Y\} \\ &= \{۱\} \qquad (\text{چرا؟}) \end{aligned}$$

۴.۱.۲ تساوی مجموعه‌ها

حال که اشیای جدیدی به نام مجموعه معرفی شدند، اولین سؤالی را که باید پاسخ داد این است که چه وقت دو مجموعه را **مساوی** در نظر می‌گیریم؟ شاید بگویید که پاسخ به این سؤال روشن است. البته اگر مجموعه‌های A و B به صورت فهرستی با نوشتن همه‌ی عضوهای آن‌ها نمایش داده شده باشند، تشخیص تساوی یا عدم تساوی آن‌ها، گرچه ممکن است پر زحمت باشد، چندان مشکل نیست. ولی اگر A یا B به صورت شرطی و با شرایط متفاوت معرفی شده باشند، تشخیص تساوی یا عدم تساوی آن‌ها گاهی سریع یا آسان نیست. در ریاضیات نمونه‌هایی از این نوع وجود دارند که تشخیص تساوی یا عدم تساوی آن‌ها بعد از صدها سال هنوز میسر نشده است. حال تعریف رسمی زیر را می‌آوریم:

۵.۱.۲ تعریف

مجموعه‌های A و B را **مساوی** می‌گوییم اگر هر عضو A عضوی از B باشد، و برعکس. به زبان نمادهای منطقی، دو گزاره‌ی زیر درست باشند:

$$a \in A \Rightarrow a \in B$$
$$a \in B \Rightarrow a \in A$$

اگر A ، B مساوی باشند، می‌نویسیم $A = B$ ، و در غیر این‌صورت می‌نویسیم $A \neq B$.

۶.۱.۲ بحث در کلاس

۱- به **چند دلیل** می‌توانید بگویید که $\{g,d\} \neq \{a, f, d\}$؟ آیا لازم است همه‌ی این دلایل را بیاوریم؟

۲- در **چه** شرط یا شرایطی $A \neq B$ ؟ آیا باید هیچ عضو مشترکی نداشته باشند؟

۳- **چطور** می‌توان بدون محاسبه‌ی عضوهای مجموعه‌های زیر، نشان داد که

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid ۲x + ۲ = ۰\} \neq \{۱, -۱\}$$
$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x^۲ + ۱ = ۲\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid ۲x^۲ + ۲ = ۴\}$$
$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x^۳ = ۴x\} \neq \{۲x \in \mathbb{N} \mid x^۲ = ۴\}$$

۴- نشان دهید که $\{x \in \mathbb{N} \mid x + ۱ = ۰\} = \{x \mid$ x انسانی با قد ۱۰۰ متر است$\}$.

۵- چطور ثابت می‌شود که تنها یک مجموعه‌ی تهی وجود دارد؟

تا اینجا، در این بخش، اغلب به معرفی و تفسیر واژه‌ها پرداختیم. حال قدری، نه چندان زیاد، به استدلال نیز می‌پردازیم. از این رو دقت و تفکر بیشتری از خواننده طلب می‌شود.

یکی از ضعف‌های ما انسان‌ها، به ویژه مبتدیان، این است که به خوبی نمی‌توانیم آنچه را که می‌دانیم بیان کنیم یا بنویسیم. این ضعف به خودی خود و در اثر مرور زمان برطرف نمی‌شود.

باید تلاش کنیم آن را بهبود بخشیم.

در علوم، **به ویژه در ریاضیات**، نمی‌توان بـا **سـوگند** خـوردن یـا **اصـرار** کـردن درستی یا نادرستی مطلبی را به دیگران قبولاند، بلکه باید آن را با **استدلال** منطقی **اثبـات** کرد.

تلاش کنید از هر فرصتی استفاده کنید تا فن استدلال کردن و به‌ویژه نوشتن اثبات‌ها را در خود بهبود بخشید. از ما گفتن!!

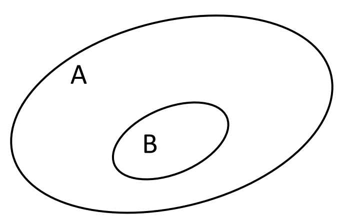
گاهی قسمتی از یک مجموعه مـورد نظـر اسـت. بـرای مثـال، گـاهی مجموعـه‌ی همـه‌ی موجودات، گاهی فقط مجموعه‌ی جانداران، و گاهی تنها مجموعه‌ی انسان‌ها مورد نظر است. این موضوع تعریف زیر را پیشنهاد می‌کند.

۷.۱.۲ تعریف

اگر هر عضو مجموعه‌ی B عضو مجموعه‌ی A باشد، می‌گوییم که B **زیرمجموعه‌ی** A است و می نویسیم $B \subseteq A$. با نمادهای ریاضی،

$$x \in B \Rightarrow x \in A$$

نمودار وِن زیر این حالت را نشان می‌دهد:



گاهی می‌گوییم که **A شامل B** یـا **B مشـمول در A** اسـت. همچنـین، نمادگـذاری $B \supseteq A$ به معنی $B \subseteq A$ است. بیان این نکته لازم است که برخی از نویسندگان نمـاد $\subset$ را

به جای $\subseteq$ به‌کار می‌برند، ولی ما نماد $\subseteq$ را ترجیح می‌دهیم. اگر B زیرمجموعه‌ی A **نباشد**، می نویسیم $A \not\subseteq B$.

مثال‌های مفهوم **زیرمجموعه** بسیارند و ارائه‌ی چند نمونه را به عهده‌ی شما می‌گذاریم. ترجیح می‌دهیم سؤال‌های زیر را به بحث بگذاریم.

۸.۱.۲ بحث در کلاس

سؤال‌های زیر را، به راهنمایی استاد درس، با همکلاسی‌های خود مورد بحث قرار دهید.

۱- در **چه** صورتی $A \not\subseteq B$؟ **آیا** باید هیچ عضو B در A نباشد؟

۲- **آیا** اگر $A = B$، می توان نتیجه گرفت که هر دو رابطه‌ی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ رخ می‌دهند؟ **برعکس چطور؟**

۳- **آیا** اگر $A \neq B$، می توان نتیجه گرفت که دست کم یکی از دو حالت $A \not\subseteq B$ یا $B \not\subseteq A$ رخ می‌دهد؟

۴- آیا همواره یکی از دو حالت $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ رخ می‌دهد؟

۵- **آیا** برای هر مجموعه چون A، عبارت‌های $A \subseteq A$ و $\varnothing \subseteq A$ در تعریف زیرمجموعه می‌گنجند؟ **چطور؟**

۶- چطور استدلال می‌کنید که اگر $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq Z$ آنگاه $X \subseteq Z$؟

در یکی از کتاب‌های درسی دوره‌ی دبیرستان آمده است که

از حذف برخی از اعضای مجموعه‌ی غیر تهی A، مجموعه‌های دیگری به دست می‌آیند که این مجموعه‌ها را زیر مجموعه‌ی A می‌نامیم.

تفاوت‌های این تعریف را با تعریف داده شده در این بخش به بحث بگذارید.

با توجه به این مطلب، مفاهیم جدید زیر را معرفی می‌کنیم. دیدیم که برای هر مجموعه‌ی دلخواه A، داریم $A \subseteq A$ و $\varnothing \subseteq A$.

۹.۱.۲ تعریف

اگر $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$، می‌گوییم که B **زیرمجموعه‌ی سره** (**حقیقی**، **محض**، **اکید** یا **واقعی**) A است و می‌نویسیم

$$B \subset A \quad \text{یا} \quad B \underset{\neq}{\subseteq} A$$

تفاوت نمادهای $\subseteq$ و $\subset$ شبیه به تفاوت $\leq$ با $<$ در اعداد است.

اگر $B \subseteq A$ و $B \neq \varnothing$، می‌گوییم که B **زیرمجموعه‌ی ناتهی** A است، اگر $B \subseteq A$، $B \neq \varnothing$ و $B \neq A$، گاهی می‌گوییم که B **زیرمجموعه‌ی نابدیهی** A است؛ شاید بهتر باشد روشن‌تر بگوییم که B زیرمجموعه‌ی **ناتهی و سره‌ی** A است.

مجموعه‌ی توانی

ممکن است چنین تصور شود که یک مجموعه نمی‌تواند عضو مجموعه‌ای دیگر باشد و تنها می‌تواند زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ای باشد. ولی، یادآوری می‌کنیم که هر شئ مشخص، چون عدد، انسان، حرف، کلمه، و **حتی مجموعه**های دیگر، می توانند عضو مجموعه باشند. برای مثال $A = \{\{x\}, \{x, y\}, ۵\}$ مجموعه‌ای با سه عضو $\{x\}$، $\{x, y\}$، و ۵ است که دو عضو آن خود مجموعه‌اند. توجه کنید که گرچه $y \in \{x, y\}$ و $\{x, y\} \in A$ ولی $y \notin A$. به عنوان نمونه‌ای دیگر، $\{\varnothing, \{a\}\}$ مجموعه‌ای با دو عضو است که هر دو عضو آن مجموعه‌اند. همچنین، $\{\varnothing\}$ مجموعه‌ای تک عضوی است که تنها عضو آن **مجموعه‌ی** تهی است.

۱۱.۱.۲ تعریف

اگر هر عضو مجموعه‌ای خود یک مجموعه باشد، آن را **مجموعه‌ای از مجموعه‌ها** می‌گوییم.

هشدار! تجربه نشان داده است که گاهی مبتدیان با مجموعه‌های غیر بسیط، بـه ویـژه **مجموعه‌ای از مجموعه‌ها**، دیرتر مانوس می‌شوند. پس دقت و توجه بیشـتری لازم اسـت. برای تاکید، این نوع مجموعه‌ها را با نمادهای تحریری $\mathscr{A}$، $\mathscr{B}$، ... نمایش می‌دهیم.

۱۲.۱.۲ بحث در کلاس

۱- درستی یا نادرستی عبارت $\{\varnothing\} \neq \varnothing$ را به بحث بگذارید.

۲- مجموعه‌ای سه عضوی چون $\mathscr{A}$ بنویسید که هر عضو آن زیرمجموعه‌ی $\mathscr{A}$ نیز باشد! (کمی بیشتر تلاش کنید!) یک عضو $\mathscr{A}$ را $\varnothing$ بگیرید.

مجموعه‌های از نوع تعریف زیر را بسیار به کار خواهیم بـرد. فـرض کنـیم A مجموعـه‌ای دلخواه است:

۱۳.۱.۲ تعریف

مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A را **مجموعه‌ی توانی** A می‌نامیم و آن را با نماد $\mathcal{P}(A)$ نشان می‌دهیم. پس

$$\mathcal{P}(A)=\{X \mid X \subseteq A\}$$

توجه کنید که A و $\varnothing$ عضو $\mathcal{P}(A)$ هستند.

۱۴.۱.۲ بحث در کلاس

۱- فرض کنید $A=\{a\}$. مجموعه‌های $\mathcal{P}(A)$ و $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ را مشخص کنید.

۲- فرض کنید $A=\{\varnothing\}$. مجموعه‌هـای $\mathcal{P}(A)$ و $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ را مشـخص کنیـد. پاسخ‌های خود را با پاسخ‌های سؤال ۱ مقایسه کنید!

۳- فرض کنید A، B، C، به ترتیب، مجموعه‌هایی یک، دو، و سه عضوی باشـند. هـر یک از مجموعه‌های توانی $\mathcal{P}(A)$، $\mathcal{P}(B)$، $\mathcal{P}(C)$ **چند** عضو دارد؟ نشان دهید

که اگر A دارای n عضو باشد، آنگاه $\mathcal{P}(A)$ دارای 2^n عضو است. (یکی از دلایل نامگذاری مجموعه‌ی توانی همین است!)

خانواده

قرارداد کردیم که تکرار عضو در مجموعه‌ها مجاز نباشد. اگر به هر دلیلی عضوهایی تکرار شوند و بخواهیم آن‌ها را به تعداد تکرارشان ثبت کنیم، دسته‌ی حاصل را به جای مجموعه، **خانواده** می‌نامیم. به عبارت دقیق‌تر

۱۵.۱.۲ تعریف

دسته‌ای از اشیای مشخص را که لزوماً دو به دو متمایز نیستند، **خانواده** می‌نامیم.

روشن است که مفهوم خانواده، مفهوم مجموعه را نیز دربر می‌گیرد. گاهی لازم است اشیای یک مجموعه یا خانواده را با اعضای یک مجموعه **برچسب** بزنیم یا به زبان ریاضی **اندیسدار** کنیم.

۱۶.۱.۲ تعریف

فرض کنیم I مجموعه است و متناظر با هر $i \in I$، شیئ a_i وجود دارد. دراین صورت خانواده‌ی به نمایش

$$F = \{a_i\}_{i \in I}$$

را **خانواده‌ای اندیسدار** و I را **مجموعه‌ی اندیس‌های** آن می‌نامیم.

توجه می‌کنیم که هر مجموعه‌ی A را می‌توانیم مثلاً با خودش اندیسدار کنیم: $A = \{x_a\}_{a \in A}$ که در آن $x_a = a$. قدری پیچیده شد. نگران نباشید به مرور برایتان روشن‌تر می شود.

۱۷.۱.۲ پارادکس راسل

درک مطالب زیر ممکن است برای برخی از شما قدری مشکل‌تر از مطالب قبلی باشد. اگر بار اول متوجه نشدید، نگران نباشید (**نویسندگان این کتاب نیز مانند شما بودند**)، به مرور درک بهتری از آن به دست خواهید آورد. می‌خواهیم این سؤال را به بحث بگذاریم که

آیا دسته‌ی همه‌ی مجموعه‌ها را می‌توان مجموعه نامید؟

۱۸.۱.۲ بحث در کلاس

فرض کنیم پاسخ به سؤال بالا مثبت باشد و **مجموعه‌ی** همه‌ی مجموعه‌ها را Ω بنامیم. در این صورت

$$\mathcal{R} = \left\{ X \in \Omega \middle| X \notin X \right\}$$

نیز باید **مجموعه** باشد. به عبارت دیگر $\mathcal{R}$ **مجموعه‌ی** همه‌ی مجموعه‌هایی چون X است که به خودشان تعلق ندارند! حال با کمی تلاش، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

۱- **آیا** $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$؟ یعنی **آیا** $\mathcal{R}$ در شرط معرف مجموعه‌ی $\mathcal{R}$ صدق می‌کند؟!

۲- **آیا** $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$؟!

۳- چه پارادکسی حاصل می‌شود؟ این پارادکس به **پارادکس راسل** معروف است. نتیجه بگیرید که واژه‌ی **مجموعه** را نمی‌توان برای **دسته‌ی** Ω در نظر گرفت، و باید واژه‌ی دیگری، برای مثال **کلاس**، را به آن نسبت داد.

۱۹.۱.۲ مجموعه‌ی مرجع

با توجه به مطالب بالا، **دسته‌ی** همه‌ی اشیاء را نمی‌توان مجموعه نامید. ولی وقتی موضوع خاصی را مطالعه می‌کنیم، عضوهای مجموعه‌ای مشخص مورد نظر هستند. برای مثال، گیاه-شناسان عضوهای مجموعه‌ی گیاهان را مطالعه می‌کنند و مثلاً، کاری به برج آزادی یا

ملانصرالدین ندارند. در این صورت می‌گوییم که مجموعه‌ی گیاهان **مجموعه‌ی مرجع** مورد بحث گیاه شناسان است. به عنوان مثالی دیگر، ممکن است در مبحثی از ریاضیات تنها اعداد صحیح مورد بحث باشند و به اعداد کسری یا به گیاهان کاری نداشته باشیم. در این صورت $\mathbb{Z}$ را به عنوان **مجموعه‌ی مرجع** مورد بحث در نظر می‌گیریم. بنابراین،

مجموعه‌های مرجع متفاوتی وجود دارند که در هر بحث خاص باید مشخص شود.

۲۰.۱.۲ بحث در کلاس

۱– آیا به نظر شما مجموعه‌ی مرجع باید خیلی بزرگ باشد؟ چه اندازه باشد کافی است؟

۲– آیا مجموعه‌های $\{۱,۲,۳,…,۲۵\}$ و $\{a,b,c,...,z\}$ می‌توانند مجموعه‌ی مرجع بحث معینی باشند؟

۲۱.۱.۲ تعریف

از این پس همیشه فرض می‌کنیم که مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌های یک مجموعه به نام **مجموعه‌ی مرجع** به نمایش U (گاهی M) هستند.

اصطلاح‌های دیگری که برای مجموعه‌ی مرجع به کار می‌روند عبارت‌اند از: **مجموعه‌ی عام**، **اصلی**، **مادر**، **جهانی**، **جامع**، **عالم سخن**، و از این قبیل.

حال نوبت شماست که آستین‌ها را بالا بزنید و با تلاش برای حل کردن تمرین‌های این بخش، حتی اگر کاملاً موفق نشدید، آموخته‌های خود را تقویت کنید. بسیاری از این تمرین‌ها به آسانی حل می‌شوند.

به توانایی‌های خود کم اهمیت ندهید!

تمرین ۱.۲

۱. از دسته‌های زیر کدام‌ها مجموعه هستند؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

(الف) سه تابلو از نقاشی‌های معروف استاد کمال الملک.

(ب) شهرهای استان گلستان.

(پ) شهرهای خوب استان گلستان.

(ت) شهرهای پر جمعیت ایران.

(ث) شهرهای با بیش از صد میلیون نفر جمعیت در ایران.

۲. مجموعه‌های زیر را به روش شرطی نمایش دهید.

(الف) مجموعه‌ی حروف الفبای فارسی.

(ب) $A = \{۱۰, ۱۲, ۱۴, \dots\}$

۳. در صورت امکان، مجموعه‌های زیر را به صورت تفصیلی نمایش دهید.

(الف) $A = \{ x \mid$ حرفی از پنج حرف اول حروف الفبای فارسی است $x\}$

(ب) $B = \{x \mid$ نام شهری از شهرهای ایران است $x\}$

۴. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin \mathbb{N}\}$.

۵. از مجموعه‌های زیر کدام‌ها متناهی و کدام‌ها نامتناهی هستند؟

(الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد.

(ب) مجموعه‌ی اعداد اول زوج.

(پ) مجموعه‌ی اعداد اول فرد.

(ت) مجموعه‌ی دانشجویان سال اول در جهان.

۶. درستی یا نادرستی حکم‌های زیر را تعیین کنید. یادآوری می‌کنیم که، برای اثبات نادرستی حکم، باید مثالی بیاورید.

(الف) $x \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

(ب) $\{x\} \subseteq \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

(پ) $\{x\} \in \{x\}$.

۷. درستی یا نادرستی حکم‌های زیر را تعیین کنید. برای حکم‌های نادرست، مثال بیاورید.

(الف) اگر $x \in A$ و $A \in B$، آنگاه $x \in B$.
(ب) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آنگاه $A \subseteq C$.
(پ) اگر $A \subseteq B$ و $x \notin B$ آنگاه $x \notin A$.

۸. **آیا** توانستید به سؤال **۲** بحث **۱۲.۱.۲** پاسخ دهید؟

۹. ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ آنگاه $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

۱۰. فرض کنید $A = \{۱, ۲, \cdots, n\}$. نشان دهید که $\mathcal{P}(A)$ دارای ۲^{n} عضو است.

۱۱. اگر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای $۲k + ۱$ عضوی برابر با ۳۲ باشد، تعداد زیرمجموعه های مجموعه‌ای $k + ۳$ عضوی چند است؟

۱۲. تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای k عضوی ۴۸ عضو بیش‌تر از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای ۴ عضوی است. عدد k چند است؟

۱۳. اگر مجموعه‌ی $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ دارای ۱۶ عضو باشد، A چند عضو دارد؟

۱۴. دو مجموعه‌ی A و B روی هم ۱۵ عضو دارند. اگر تعداد زیرمجموعه‌های یکی هشت برابر تعداد زیرمجموعه‌های دیگری باشد، هر یک از این دو مجموعه چند عضو دارد؟

۱۵. تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای $۲k + ۱$ عضوی ۳۲ برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای k عضوی است. عدد k چند است؟

۱۶. اگر تعداد عضوهای مجموعه‌ای را ۳ عضو افزایش دهیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۱۱۲ عضو افزایش می یابد. این مجموعه چند عضو دارد؟

۱۷. تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای n عضوی برابر با $۱۶^{n-۳}$ است. این مجموعه چند عضو دارد؟

۱۸. فرض کنیم $\mathscr{A}$ "مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هایی باشد که با کمتر از چهل کلمه توصیف می‌شوند." آیا $\mathscr{A} \in \mathscr{A}$ ؟

۱۹. فرض کنیم آرایشگر x فقط صورت کسانی را اصلاح می‌کند که صورت خود را اصلاح نمی

کنند. فرض کنید $\mathscr{A}$ **دسته‌ی** "**اشخاصی باشد که صورت خود را اصلاح نمی‌کنند.**" **آیا** $x \in \mathscr{A}$ ؟

۲۰. فرض کنیم x کتابنامه‌ای است که کتاب‌هایی را معرفی می‌کند که خود را معرفی نمی کنند. فرض کنیم $\mathscr{A}$ **دسته‌ی** "**کتابنامه‌هایی باشد که خود را معرفی نمی-کنند.**" **آیا** $x \in \mathscr{A}$ ؟

۲.۲ اجتماع و اشتراک

در بخش قبل، پس از معرفی و شناختن مفهوم مجموعه، توانستیم با معرفی مفهوم‌های **زیرمجموعه** و **مجموعه‌ی توانی**، مجموعه‌های جدیدی از یک مجموعه‌ی داده شده بسازیم. در بقیه‌ی این فصل، روش‌ها و ابزارهای دیگری برای ساختن مجموعه‌های جدیدی از مجموعه‌های داده شده معرفی می‌کنیم. با این اعمال در دبیرستان به صورت شهودی آشنا شده‌اید. پس، مطابق معمول این درس و دروس دیگر دانشگاهی، **سعی ما** و **شما** این باید باشد که ضمن تقویت دانسته‌هایمان و علاوه بر به خاطر سپردن مفاهیم و مطالب،

فعالانه وارد بازی شویم **وووووو...** **اندیشه ورزی کنیم!**

عمل اجتماع

به بیان ساده و غیر رسمی، عمل **اجتماع** مثل این است که اشیای دو پاکت را در یک پاکت بریزیم، و قرارداد عدم تکرار عضو در مجموعه را اعمال کنیم. به زبان ریاضی

۱.۲.۲ تعریف

اجتماع مجموعه‌های A و B مجموعه‌ی **همه‌**ی عضوهایی است که به A **یا به** B (یا **به هر دو**) تعلق دارند. این مجموعه را با نماد $A \cup B$ نمایش می‌دهیم، و می خوانیم.

A اجتماع B.

اگر از شما بخواهیم که، برای مثال، اجتماع $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ را پیدا کنید، شک نداریم که به‌راحتی می‌نویسید $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$. پس سعی کنیم به قضیه ها و مسئله‌های مجرد مربوط به این عمل بیشتر توجه کنیم. برای مثال، تمرین کنید که بتوانید روش انشایی تعریف اجتماع A و B را به روش شرطی بنویسید، **یعنی عبارت** $A\cup B=\{x|\ldots,\ldots\}$ **را کامل کنید**.

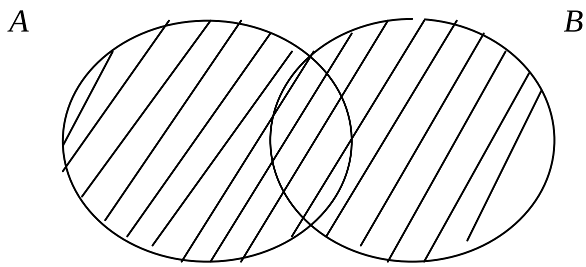
دو **نکته** در تعریف اجتماع قابل توجه است. همان‌طور که قبلاً نیز گفتیم، گاهی معنی لغوی و متداول کلمات با تعبیر ریاضی آن‌ها متفاوت است. در زبان محاوره‌ای وقتی می‌گوییم **این یا آن** معمولاً منظور **تنها یکی** از آن دو است، ولی در زبان ریاضی **هر دو** نیز می‌تواند باشد. نمادی که گاهی به جای **یا** در ریاضیات به کار می‌رود به صورت "$\vee$" است . پس، می‌نویسیم

$$A\cup B=\{x|\ x\in A \text{ یا } x\in B \text{ (یا هر دو)}\}$$
$$=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$$

نکته‌ی مهم دیگری که لازم به بیان است، کلمه‌ی **همه** در تعریف انشایی اجتماع است. اگر این کلمه را ننویسیم و مانند یکی از کتاب‌های دبیرستان بنویسیم: **اجتماع مجموعه‌های A و B مجموعه‌ای** (**به "ای" توجه کنید**) **است که اعضایش متعلق به A و B باشند**، آنگاه، برای مثال مجموعه‌ی $\{۲,۳\}$، و چند مجموعه‌ی دیگر، و البته $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، در شرط داده شده در این عبارت برای $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ صدق می‌کنند! **این طور نیست**؟ از **فصل۱** یادآوری می‌کنیم که باید دقت کنیم که در ریاضیات

تعریف باید جامع و مانع باشد.

نمایش تصویری $A\cup B$ با نمودار ون به صورت زیر است.



$A\cup B$ ناحیه‌ی **سایه زده** است.

۲.۲.۲ بحث در کلاس

۱- اجتماع $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ و $B=\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}$ را پیدا کنید.

۲- اجتماع $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-۲<x<۵\}$ و $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\ x>۲\}$ را بیابید.

۳- بدون تعیین عضوهای $A=\{\,x\in\mathbb{Z}\,|\,x^{۲}-۴x-۵=۰\,\}$ و $B=\{\,x\in\mathbb{Z}\,|\,۲x^{۲}-۵x+۳=۰\,\}$، نشان دهید که $-۱,۱\in A\cup B$ ولی $۲\notin A\cup B$.

ویژگی‌های عمل اجتماع

وقتی اعمال جدیدی معرفی می‌شوند، لازم است ویژگی‌های دیگر آن‌ها را که حاصل از تعریف هستند، بررسی کنیم تا بهتر بتوانیم در مباحث مجرد آن‌ها را به کار ببریم. اگر چه گاهی اثبات درستی این ویژگی‌ها (که تحت عنوان **لم**، **قضیه**، یا **نتیجه**) می‌آیند سرراست و آسان است، آوردن آن‌ها برای استفاده‌ی بعدی لازم است.

شما برخی از آن‌ها را به عنوان تمرین حل کنید، تا فن نوشتن را در خود تقویت کنید.

۳.۲.۲ قضیه

فرض کنیم C,B,A مجموعه‌هایی دلخواه هستند. در این صورت، داریم

۱- $A\cup A=A$ (**خودتوانی**)

۲- $A\cup B=B\cup A$ (**تعویضپذیری**)

۳- $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (**شرکت‌پذیری**)

۴- $A\cup\varnothing=A$ (**ویژگی** $\varnothing$)

۵- $A\cup M=M$ (**ویژگی** M)

اثبات

همگی سرراست هستند. ■

لازم به توجه است که ویژگی شرکت‌پذیری اجتماع نشان می‌دهد که حاصل اجتماع $A\cup B\cup C$ مستقل از نحوه‌ی قراردادن پرانتزها است و معمولاً هیچ پرانتزی در این عبارت نمی‌نویسیم.

ارتباط $\cup$ با $\subseteq$

همان‌طور که در اعداد ارتباط بین چهار عمل اصلی، و با ترتیب، اهمیت دارد، بررسی ارتباط بین اعمالی که به مرور روی مجموعه‌ها تعریف خواهیم کرد، اهمیت دارد. در زیر ویژگی‌های عمل اجتماع را نسبت به $\subseteq$ مطالعه می‌کنیم.

صورت و اثبات قضیه‌ی زیر آموزنده است. همتای آن را به کرات در این درس و درس‌های دیگر، برای مفاهیم مختلف، خواهید دید. این قضیه در واقع **ویژگی مشخصه‌ی** اجتماع است، به این معنی که حکمی معادل با تعریف اجتماع ارائه می‌دهد. این نوع ارائه‌ی مجرد تعریف را می‌توان **تعریف براساس ویژگی** نامید.

۴.۲.۲ قضیه

*مجموعه‌ی $A\cup B$ **کوچکترین مجموعه‌ی شامل** A و B است؛ به عبارت دیگر*

۱- $A\cup B$ مجموعه‌ای شامل A و B است، یعنی $A,B\subseteq A\cup B$ و

۲- اگر C هر مجموعه‌ای با ویژگی ۱ باشد، یعنی $A,B\subseteq C$، آنگاه $A\cup B$ کوچک‌تر از C است، یعنی $A\cup B\subseteq C$.

اثبات

حکم ۱ روشن است. به اثبات حکم ۲ توجه کنید. فرض کنیم C شامل A و B است و $x \in A \cup B$. تنها دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in C. & (\text{زیرا } A \subseteq C) \\ \text{یا} \\ x \in B \Rightarrow x \in C. & (\text{زیرا } B \subseteq C) \end{cases}$$

در نتیجه $A \cup B \subseteq C$. ■

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که $\subseteq$ را می‌توان با استفاده از $\cup$ تعریف کرد. اثبات آن سر-راست است.

۵.۲.۲ قضیه

$A \subseteq B$ *اگر و تنها اگر* $A \cup B = B$.

قضیه‌ی زیر بیان می‌کند که عمل اجتماع رابطه‌ی $\subseteq$ را به اصطلاح **حفظ می‌کند** یا با آن **سازگار** است. اثبات آن سرراست است.

۶.۲.۲ قضیه

گزاره‌ی زیر همیشه درست است.

$$(A \subseteq C, B \subseteq D) \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$$

۷.۲.۲ بحث در کلاس

از عبارت‌های زیر کدام(ها) همواره درست هستند؟ اگر حکمی دو طرفه نادرست است، کدام طرف آن نادرست است؟ همان طور که قبلاً نیز گفتیم، برای حکم نادرست مثالی بیاورید.

۱- $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$.

۲- $C\subseteq A\cup B\Leftrightarrow C\subseteq A \quad \wedge \quad C\subseteq B$.

۳- $C\subseteq A\cup B\Leftrightarrow C\subseteq A \quad \vee \quad C\subseteq B$.

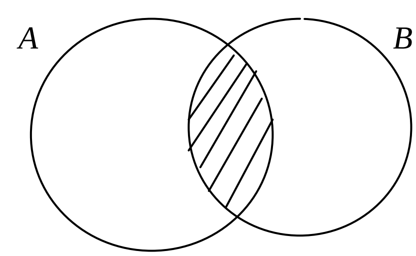
عمل اشتراک

عمل دیگری که می‌توان با مجموعه‌ها انجام داد و مجدداً مجموعه به‌دست آورد، **عمل اشتراک** یا **مقطع** نام دارد.

۸.۲.۲ تعریف

اشتراک مجموعه‌های A و B مجموعه‌ی **همه‌ی** عضوهایی است که به هر دو مجموعه تعلق دارند. این مجموعه را با $A\cap B$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم **A اشتراک B**.

در نمودار ون داریم



$A\cap B$ ناحیه‌ی **سایه زده** است.

ویژگی‌های این عمل همتای ویژگی‌های عمل اجتماع است. با این حال آن‌ها را می‌آوریم.

ابتدا باید بگوییم که پیدا کردن اشتراک دو مجموعه که عضوهایش داده شده باشند، برایتان

آسان است، پس روی موارد مجرد متمرکز می‌شویم. قبل از ادامه‌ی بحث، **عبارت** $A\cap B=\{x|......\}$ **را کامل کنید**.

همان‌طور که در قسمت عمل اجتماع نیز گفتیم، کلمه‌ی **همه** در تعریف انشایی اشتراک نیز با اهمیت است. در همان کتاب دبیرستانی آمده است که **اشتراک دو مجموعه‌ی A و B مجموعه‌ای** (**به "ای" توجه کنید**) **است که اعضایش به هر دو مجموعه‌ی A و B تعلق داشته باشند**. این نیز ایجاد شبهه می‌کند (**چطور؟**)

۹.۲.۲ بحث در کلاس

۱- بندهای **۱** و **۲** بحث در کلاس **۲.۲.۲** را برای عمل اشتراک نیز حل کنید.

۲- بدون تعیین عضوهای مجموعه‌های زیر، نشان دهید که $-۱\in A\cap B$ و $۰,۱\notin A\cap B$:

$A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^۲-۴x-۵=۰\}$ و $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^۲-۱=۰\}$.

۳- همتای قضیه‌های **۴.۲.۲**، **۵.۲.۲**، و **۶.۲.۲** را برای عمل اشتراک بنویسید.

۱۰.۲.۲ قضیه

برای مجموعه‌های دلخواه A، B، C داریم

۱- (**ویژگی‌های جذب**)

$$A\cup(A\cap B)=A$$
$$A\cap(A\cup B)=A$$

۲- (**ویژگی‌های توزیع‌پذیری**)

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

اثبات

۱- با توجه به اینکه $A\cap B\subseteq A$ و با استفاده از قضیه‌ی **۵.۲.۲**، حکم اول اثبات می‌شود. حکم دوم مشابه است.

۲- از آنجا که $A\subseteq A\cup B, A\cup C$ ، $B\cap C\subseteq C\subseteq A\cup C$، و $B\cap C\subseteq B\subseteq A\cup B$، نتیجه می‌گیریم که $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

برای اثبات **عکس** این رابطه، فرض می‌کنیم $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. در این صورت، $x\in A\cup B$ و $x\in A\cup C$. حال دو حالت $x\in A$ و $x\notin A$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x\in A$ آنگاه $x\in A\cup(B\cap C)$، و اگر $x\notin A$ آنگاه، از $x\in A\cup B$ و $x\in A\cup C$ نتیجه می‌گیریم که $x\in B$ و $x\in C$. در نتیجه $x\in(B\cap C)$. پس باز هم $x\in A\cup(B\cap C)$ و حکم تساوی اول اثبات شده است.

اثبات تساوی دوم مشابه اولی است. البته راه دیگری نیز وجود دارد: دومی را از اولی نتیجه بگیرید (**چطور؟**) همچنین، پیشنهاد می‌کنیم برای تمرین، این حکم‌ها را با عضوگیری نیز **اثبات کنید**. ■

تعمیم اجتماع و اشتراک

در بالا اعمال اجتماع و اشتراک دو یا تعدادی متناهی مجموعه را آموختیم. در این قسمت اعمال اجتماع و اشتراک را به تعدادی دلخواه (**متناهی** یا **نامتناهی**) تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم $\mathscr{A}$ مجموعه (یا خانواده) ای متناهی یا نامتناهی از مجموعه‌ها باشد.

۱۱.۲.۲ تعریف

اجتماع $\mathscr{A}$، به نمایش $\bigcup\mathscr{A}$ یا $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ ، مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی است که دست‌کم به یکی از مجموعه‌های خانواده‌ی $\mathscr{A}$ تعلق دارند.

۱۲.۲.۲ بحث در کلاس

۱- روش انشایی تعریف بالا را به روش شرطی بنویسید:

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A=\bigcup\mathscr{A}=\{x|\ \cdots\ \}$$

۲- مشابه تعریف بالا، اشتراک خانواده‌ی $\mathscr{A}$ را تعریف کنید.

$$\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A=\bigcap\mathscr{A}=\{x|\ \cdots\ \}$$

۳- اجتماع و اشتراک مجموعه‌ی $\mathscr{A}=\{\{n+۱\}\}_{n\in N}$ را بیابید.

توجه می‌کنیم که اگر $\mathscr{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای اندیسدار از مجموعه‌ها باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\bigcup\mathscr{A}=\bigcup_{i\in I}A_i=\{x|\ \exists i\in I,\ \ x\in A_i\}$$

$$\bigcap\mathscr{A}=\bigcap_{i\in I}A_i=\{x|\ \forall i\in I,\ \ x\in A_i\}$$

مبتدیان گاهی به نادرست مثلاً به جای $\bigcup_{i\in I}A_i$ می‌نویسند

$$A_1\cup A_2\cup.....$$

البته اگر مجموعه‌ی اندیس‌ها یعنی I برابر با $\{1,2,...,n\}$ یا برابر با $\mathbb{N}$ باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\bigcup\mathscr{A}=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$$

$$\bigcup\mathscr{A}=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup...$$

و به همین صورت برای اشتراک. پس **مراقب نمادگذاری‌ها باشیم**.

۱۳.۲.۲ بحث در کلاس

۱- مطابق معمول، فرض کنید که هر مجموعه‌ی A_i زیرمجموعه‌ی M است. حدس بزنید $\bigcup_{i\in\varnothing} A_i$ و $\bigcap_{i\in\varnothing} A_i$ چه مجموعه‌هایی هستند. (یکی M و دیگری $\varnothing$ است).

۲- فرض کنید X مجموعه است. مجموعه‌های $\bigcup\mathcal{P}(X)$ و $\bigcap\mathcal{P}(X)$ را مشخص کنید.

تمرین ۲.۲

۱. درستی یا نادرستی حکم‌های زیر را تعیین کنید. توجه کنید که، برای اثبات نادرستی یک حکم، کافی است **مثال نقض** ارائه دهید. یعنی، در این مورد، مجموعه‌هایی چون A، B، C مثال بزنید به طوری که در فرض صدق کند ولی در حکم صدق نکند!

(الف) اگر $A\cup B=A\cup C$ آنگاه $B=C$.

(ب) اگر $A\cap B=A\cap C$ آنگاه $B=C$.

(پ) اگر $A\cup B=A\cup C$ و $A\cap B=A\cap C$ آنگاه $B=C$.

۲. فرض کنید $X\cup Y=T\cup S$ و $X\cap Y=T\cap S=\varnothing$. ثابت کنید که $X=\varnothing$ اگر و تنها اگر $T=(X\cap S)\cup(Y\cap T)$.

۳. تعیین کنید که از عبارت‌های زیر کدام‌ها همواره درست هستند؟ اگر حکمی دو شرطی برقرار نباشد، آیا از یک طرف برقرار است؟

(الف) $C\subseteq A\cup B\Leftrightarrow C\subseteq A \ \wedge \ C\subseteq B$.

(ب) $C\subseteq A\cup B\Leftrightarrow C\subseteq A \ \vee \ C\subseteq B$.

(پ) $A\cup B\subseteq C\Leftrightarrow A\subseteq C \ \wedge \ B\subseteq C$.

(ت) $A\cap B\subseteq C\Leftrightarrow A\subseteq C \ \vee \ B\subseteq C$.

۴. نشان دهید که حکم‌های زیر معادل هستند. تمرین مهمی است.

(الف) $A\subseteq B$.

(ب) $A\cap B=A$.

(پ) $A\cup B=B$.

۵. ثابت کنید که دستگاه معادله‌های زیر دقیقاً یک جواب برای X دارد. (فکر کنید.)

$$\begin{cases} A\cup X=A\cup B \\ A\cap X=\varnothing \end{cases}$$

۶. درستی یا نادرستی حکم‌های زیر را اثبات کنید. توضیح داده شده در تمرین **۱** را مرور کنید.

(الف) $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$.

(ب) $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$.

۷. این تمرین توانایی شما را در برخورد با تعریف‌های جدید تقویت می‌کند! فرض کنید $B\subseteq A$. تعریف می‌کنیم که

$$(A:B)=\{X\in\mathcal{P}(A)\mid B\subseteq X\}$$

(الف) مجموعه‌ی $(A:B)$ را برای $B=\{a,b\}$ و $A=\{a,b,c,d,e\}$ بیابید.

(ب) نشان دهید که $(A:\varnothing)=\mathcal{P}(A)$.

(پ) فرض کنید A دارای n عضو و $B\subseteq A$ دارای m عضو است. تعداد عضوهای $(A:B)$ را بیابید.

۸. فرض کنید که $|X|$ نمایانگر تعداد عضوهای مجموعه‌ی متناهی X باشد. نشان دهید که

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

۹. مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0,1/n]$ $[0,1/n]$ **(ب)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,1/n]$

(پ) $\bigcap_{n=1}^{99}[0,1/n]$ **(ت)** $\bigcup_{n=1}^{99}[0,1/n]$

(ث) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-1/n,1/n)$ **(ج)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-1/n,1/n)$

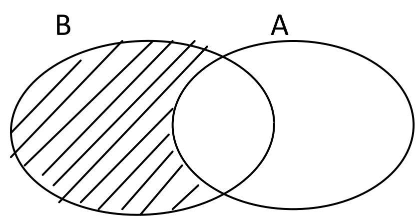
۳.۲ تفاضل و متمم

دو عمل اساسی دیگر که می‌توان با مجموعه‌ها انجام داد، **تفاضل** و **متمم گیری** هستند.

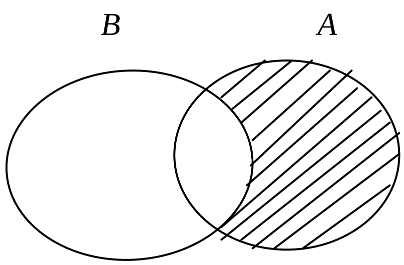
۱.۳.۲ تعریف

تفاضل مجموعه‌ی B از مجموعه‌ی A همه‌ی عضوهایی از A است که به B تعلق ندارند. این مجموعه را با A-B یا $A\backslash B$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم A **منهای** B.

نمودار ون متناظر به صورت زیر است.



$B\backslash A$ ناحیه‌ی **سایه زده است**



$A\backslash B$ ناحیه‌ی **سایه زده** است

چون این عمل ممکن است با تصور اولیه‌ی ما کمی متفاوت باشد، توجه بیشتری را مـی-طلبد. برای مثال، اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۱,۳,a,b,c\}$، آنگاه

$$B\setminus A=\{a,b,c\} \text{ و } A\setminus B=\{۲,۴\}$$

ملاحظه می‌کنیم که در تفاضل مجموعه‌ی Y از مجموعه‌ی X تنها آن عضوهایی از Y موثرند که در X نیز هستند و تنها این عضوها از X حذف می‌شوند و با بقیه‌ی عضـوهای Y کـاری نـداریم.
نکته‌ی دیگر این است که برای تعریف تفاضل Y از X لزومی ندارد که Y زیـر مجموعـه‌ی X باشد.

۲.۳.۲ بحث در کلاس

۱- روش انشایی تعریف تفاضل B از A را به روش شرطی بنویسید.

۲- مجموعه‌ی $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\setminus\{\varnothing\}$ را بیابید.

۳- فرض کنید $C=\{x\in\mathbb{N} \mid ۲<x<۸\}$ و $D=\{x\in\mathbb{Z} \mid x<۴\}$. درستی یا نادرستی $۵\in C\setminus D$، $۹\notin C\setminus D$، $۳\in C\setminus D$ را بررسی کنید.

ویژگی‌های عمل تفاضل و ارتباط این عمل با اعمالی که قبلاً دیدیم بسیارند. برخی را در زیر و تعدادی را در تمرین‌ها می‌آوریم. اگر چه به خاطر سپردن همه‌ی آن‌ها چندان ضروری نیست، ولی تلاش برای اثبات کردن برخی از آن‌ها تمرین خوبی برایتان است. برخی از اثبات‌های خود را با اثبات‌های همکلاسی‌هایتان مقایسه کنید و ببینید **آیا** زبان ریاضی یکدیگر را درک می‌کنید؟ **آیا** اثبات‌های یکدیگر را قبول دارید؟ شاید حتی به هم **نمره** بدهید!

۳.۳.۲ قضیه

برای مجموعه‌های دلخواه A و B داریم

۱- $A\setminus B = A\setminus(B\cap A)$.

۲- $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\varnothing$.

۳- $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cup B)$.

۴- $A\cup B=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)$.

اثبات

حکم **۳** را اثبات می‌کنیم. **شما نیز یکی را انتخاب و اثبات کنید.**

باید ثابت کنیم که هر عضو طرف چپ عبارت **۳**، عضوی از طرف راست آن است، و بر عکس. این اثبات را به تفصیل می‌آوریم. شما نیز اوایل کار چنین کنید، ولی بعدها می‌توانید اثبات‌ها را خلاصه‌تر بنویسید.

(یک) فرض کنیم $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. بنا به تعریف اجتماع، دو حالت $x\in A\setminus B$ یا $x\in B\setminus A$ رخ می‌دهد. در حالت $x\in A\setminus B$، داریم $x\in A$ ولی $x\notin B$. بنابراین $x\in A\cup B$ ولی $x\notin A\cap B$ (**چرا؟**) در نتیجه $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. به همین روش از حالت دوم $x\in B\setminus A$ نیز نتیجه می‌گیریم که x متعلق به طرف راست عبارت **۳** است.

(دو) حال فرض می‌کنیم $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. بنا بر تعریف تفاضل، داریم $x\in A\cup B$ ولی $x\notin A\cap B$. از $x\in A\cup B$ دو حالت $x\in A$ یا $x\in B$ و از $x\notin A\cap B$ نیز دو حالت $x\notin A$ یا $x\notin B$ نتیجه می‌شوند. بنابراین باید ۴= ۲.۲ حالت $(x\in A$ و $x\notin A)$، $(x\in A$ و $x\notin B)$، $(x\in B$ و $x\notin A)$، و $(x\in B$ و $x\notin B)$ را در نظر بگیریم. روشن است که دو حالت اول و آخر رخ نمی‌دهند. پس فرض می‌کنیم $(x\in A$ و $x\notin B)$ که در نتیجه $x\in A\setminus B$ و بنابراین $x\in\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right)$. به همین صورت، از حالت $(x\in B$ و $x\notin A)$ در نهایت همین نتیجه حاصل می‌شود . بنابراین، در هر حالت x متعلق به طرف چپ عبارت ۳ است و حکم اثبات شده است. ■

۴.۳.۲ بحث در کلاس

روشن است که $A\setminus A=\varnothing$. آیا این حکم معادل تعریف مجموعه‌ی $\varnothing$ است؟

متمم مجموعه

این عمل حالت خاص عمل تفاضل است. فرض کنیم M مجموعه‌ی مرجع است و $A\subseteq M$.

۵.۳.۲ تعریف

مجموعه‌ی $M\setminus A$، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی عضوهای M که در A نیستند، را **متمم** A می‌نامیم و با A' یا A^C نشان می‌دهیم.

با توجه به ارتباط تعریف متمم با تعریف تفاضل، گاهی تفاضل $A\setminus B$ را **متمم نسبی** B در A، و $B'=M\setminus B$ را **متمم مطلق** نیز می‌نامند.

۶.۳.۲ بحث در کلاس

از آنجا که $A' = M \setminus A$، ویژگی‌های عمل متمم‌گیری حالت خاص ویژگی‌های عمل تفاضل است . احکام زیر را اثبات کنید.

۱- $M' = \varnothing$ و $\varnothing' = M$.

۲ـ $A'' = A$، که در آن $A'' = (A')'$؛ یعنی عمل متمم گیری **خودتوان** است. اگر متمم $A \subseteq B$ آنگاه $B' \subseteq A'$. یعنی، عمل متمم‌گیری رابطه‌ی $\subseteq$ را عکس می‌کند.

۳ـ داریم $A \setminus B = A \cap B'$. این حکم، تعریف تفاضل با فرض دانستن تعریف متمم است.

از این رو، و با توجه به تجرد کم‌تر مفهوم متمم نسبت به مفهوم تفاضل، در کتاب‌های مقدماتی (دبیرستانی) مفهوم متمم قبل از تفاضل تعریف می‌شود.

قضیه‌ی زیر بسیار آموزنده است. در واقع حکم سوم **تعریف براساس ویژگی**، یعنی تعریفی بدون اشاره به عضو مجموعه‌ها، برای متمم ارائه می‌کند.

۷.۳.۲ قضیه

برای مجموعه‌های A و B داریم

۱- *$A \cap A' = \varnothing$ و اگر $A \cap B = \varnothing$، آنگاه داریم $B \subseteq A'$؛ یعنی A' **بزرگ‌ترین** مجموعه با ویژگی $A \cap A' = \varnothing$ است.*

۲- *$A \cup A' = M$ و اگر $A \cup B = M$، آنگاه $A' \subseteq B$؛ یعنی A' **کوچک‌ترین** مجموعه با ویژگی $A \cup A' = M$ است.*

۳- *اگر برای مجموعه‌ای چون B داشته باشیم $A \cap B = \varnothing$ و $A \cup B = M$ آنگاه $B = A'$؛ یعنی A' با ویژگی‌های $A \cap A' = \varnothing$ و $A \cup A' = M$، که در بندهای ۱ و ۲ آمدند، منحصر به فرد است.*

اثبات

ابتدا توضیحات داده شده در احکام قضیه را به کمک استاد درس به بحث بگذارید. حکم **۱** را اثبات می‌کنیم و بقیه را به شما واگذار می‌کنیم.

برای اثبات قسمت اول بند **۱**، یعنی $A \cap A' = \varnothing$، فرض می‌کنیم، بر **خلاف** حکم، $A \cap A' \neq \varnothing$ و در نتیجه، عضوی چون x در $A \cap A'$ وجود دارد. پس باید $(x \in A$ و $x \in A')$، یعنی $(x \in A$ و $x \notin A)$ که یک **تناقض** است. پس فرض $A \cap A' \neq \varnothing$ نادرست است، یعنی باید $A \cap A' = \varnothing$.

برای اثبات قسمت دوم حکم **۱**، باید از $A \cap B = \varnothing$ نتیجه بگیریم که $B \subseteq A'$. فرض می‌کنیم $x \in B$. ادعا می‌کنیم که $x \in A'$. **اگر** چنین **نباشد**، آنگاه باید $x \in A$ و لذا از $x \in B$ و $x \in A$، باید $x \in A \cap B = \varnothing$، که **تناقض** است. از این رو $B \subseteq A'$. ■

احکام قضیه‌ی زیر به **قوانین دمورگان** معروف هستند.

۸.۳.۲ قضیه (**قوانین دمورگان**)

برای مجموعه‌های دلخواه A و B، داریم

۱- $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

۲- $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

اثبات

۱- به مرور اثبات‌ها را کوتاه‌تر می‌نویسیم. دلیل هر مرحله‌ی زیر را بنویسید.

$$\begin{aligned} x \in A' \cap B' &\Leftrightarrow x \in A' \quad \& \quad x \in B' \\ &\Leftrightarrow x \notin A \quad \& \quad x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B)' \end{aligned}$$

بنابراین، حکم **۱** اثبات شده است (**چطور؟**)

حکم **۲** را می‌توان به صورت بالا یا به روش زیر اثبات کرد. گرچه ممکن است درک آن **هوشمندی** بیشتری بخواهد، ولی **ترفندی جدید** معرفی می‌کند.

از آنجا که حکم **۱** برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه درست است، به ویژه برای A' و B' نیز برقرار است. پس

$$\left(A'\cup B'\right)' = A''\cap B'' = A\cap B \qquad (\text{چرا؟})$$

حال از دو طرف این تساوی متمم می‌گیریم. داریم

$$\left(A'\cup B'\right) = \left(A\cap B\right)'$$

که همان حکم **۲** است. ملاحظه می‌کنیم که خودتوانی عمل متمم‌گیری، یعنی $A'' = A$، در این روش اثبات بسیار با اهمیت است. ■

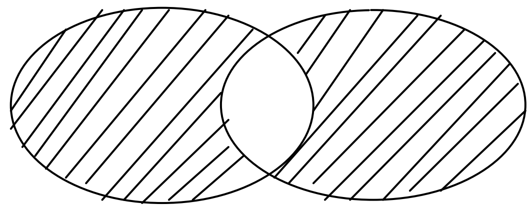
تفاضل متقارن

این بخش را با معرفی عمل دیگری به نام **تفاضل متقارن** مجموعه‌ها ادامه می‌دهیم. خواهیم دهید که تفاضل متقارن A و B اجتماع دو تفاضل $A\setminus B$ و $B\setminus A$ است و ویژگی‌هایی بهتر از ویژگی‌های **تفاضل** دارد. یادآوری می‌کنیم که واژه‌ی **یا** در زبان محاوره‌ای مانع جمع است، در حالی که در ریاضی چنین نیست و می‌تواند هر دو حالت مورد بحث را در بر گیرد. تفاضل متقارن به **یا** در زبان محاوری توجه دارد.

۹.۳.۲ تعریف

تفاضل متقارن مجموعه‌های A و B مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی است که به A یا B ولی نه به هر دو تعلق دارند. آن را به صورت $A\Delta B$ نشان می‌دهیم.

نمودار ون زیر گویای این تعریف است.



$A\Delta B$ ناحیه **سایه زده** است.

۱۰.۳.۲ بحث در کلاس

۱- تفاضل متقارن $\{۱,۲,a\}\ \Delta\ \{۱,۵,b\}$ را بیابید.

۲- مجموعه‌ی $A\Delta B$ را با استفاده از هر سه عمل اجتماع، تفاضل، و اشتراک بنویسید.

۳- مجموعه‌ی $A\Delta B$ را تنها با استفاده از دو عمل تفاضل و اجتماع بنویسید و ادعای خود را اثبات کنید.

۱۱.۳.۲ بحث در کلاس

حتماً این حکم را قبلاً نیز دیده‌اید: **تعریف بر اساس ویژگی**. نشان دهید که مجموعه‌ی $X = A\Delta B$ کوچک‌ترین مجموعه‌ای است که در تساوی $A\cup X = B\cup X$ صدق می‌کند (ابتدا حکم را به صورت **۱** و **۲** مانند قضیه‌ی **۴.۲.۲** بنویسید.)

قضیه‌ی زیر برخی از ویژگی‌های اساسی عمل Δ را نشان می دهد.

۱۲.۳.۲ قضیه

برای مجموعه‌های دلخواه A، B، C، داریم

۱- $A\Delta\varnothing = A$.

۲- $A\Delta A = \varnothing$.

۳- $A\Delta B = B\Delta A$.

۴- $A\Delta\left(B\Delta C\right) = \left(A\Delta B\right)\Delta C$.

۵- $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

اثبات

این حکم‌ها را می‌توان به روش عضوگیری اثبات کرد. ولی سعی می‌کنیم از ویژگی‌های اعمال دیگر استفاده کنیم.

۱-

$$\begin{aligned} A\Delta\varnothing &= (A\setminus\varnothing)\cup(\varnothing\setminus A)\\ &= A\bigcup\varnothing = A \end{aligned}$$

۲- $A\Delta A=(A\setminus A)\cup(A\setminus A)=\varnothing\bigcup\varnothing=\varnothing$.

۳- سر راست است.

مراحل اثبات احکام ۴ و ۵ قدری طولانی است. وقت خود را در کلاس نگیرید. سعی کنید در منزل انجام دهید. ■

تمرین ۳.۲

۱. کدام حکم قضیه‌ی ۳.۳.۲ را شما اثبات کردید؟

۲. نشان دهید که

(الف) $X\setminus(A\cup B)=(X\setminus A)\cap(X\setminus B)$.

(ب) $X\setminus(A\cap B)=(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$.

۳. ثابت کنید که $A\cap B'=\varnothing=A'\cap B$ اگر و تنها اگر $A=B$.

۴. تساوی‌های زیر را اثبات کنید.

(الف) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

(ب) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$.

(پ) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap C)\setminus(A\cap C)$.

۵. نشان دهید که

(الف) $A\cap B=\varnothing$ اگر و تنها اگر $B\subseteq A'$. از این رو، A' بزرگ ترین مجموعه با ویژگی $A\cap A'=\varnothing$ است.

(ب) $A\cup B=U$ اگر و تنها اگر $A'\subseteq B$. تعبیر این حکم چیست؟

(پ) نشان دهید که A' با ویژگی های $A\cap A'=\varnothing$ و $A\cup A'=U$ منحصر به فرد است.

۶. نشان دهید که $X=\varnothing$ اگر و تنها اگر $T=X\Delta T$. یعنی، $T=(X\cap T')\cup(X'\cap T)$.

۷. ثابت کنید که $A\Delta B=A$ اگر و تنها اگر $B=\varnothing$.

۸. درستی یا نادرستی $\mathcal{P}(A\setminus B)=\mathcal{P}(A)\setminus\mathcal{P}(B)$ را اثبات کنید.

۹. فرض کنید $\mathscr{A}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها و X مجموعه‌ای دلخواه باشد. نشان دهید که

(الف) $X\setminus\bigcup\mathscr{A}=\bigcap_{A\in\mathscr{A}}(X\setminus A)$.

(ب) $X\setminus\bigcap\mathscr{A}=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}(X\setminus A)$.

(پ) $\bigcup\mathscr{A}\setminus X=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}(X\setminus A)$.

(ت) $\bigcap\mathscr{A}\setminus X=\bigcap_{A\in\mathscr{A}}(X\setminus A)$.

۴.۲ ضرب و همضرب

عمل دیگری را که می‌توان با مجموعه‌ها انجام داد و حاصل آن یک مجموعه باشد، **عمل ضرب** است که به نام ابداع کننده‌ی آن، به ضرب **دکارتی**، معروف است. این عمل قدری با اعمال دیگر متفاوت است. برای معرفی این عمل، ابتدا باید مفهوم **زوج** یا **جفت مرتب** را یادآوری کنیم. با این مفهوم نیز از قبل آشنا هستید و حالت خاصی از آن را برای نمایش

صفحه‌ی مختصات به کار برده‌اید. از این رو، به خاطر معرفی مجدد این مفهوم، چند نکته‌ی مجرد ریاضی را بیان می‌کنیم.

۱.۴.۲ تعریف

"عبارت" (a,b) را **زوج**، **جفت**، یا **دوتایی مرتب** از دو شئ (نه لزوماً متمایز) a و b می‌نامیم که تساوی آن‌ها به صورت **مؤلفه‌ای** زیر تعریف می‌شود:

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c \quad \& \quad b=d \qquad (*)$$

اگر حتی هیچ توضیحی درباره‌ی این **عبارت** ندهیم، مشکلی در به کار بردن آن نخواهید داشت، و قبلاً نیز، در دوره‌ی دبیرستان، نداشتید؛ همان‌طور که بدون آگاهی دقیق علمی (فیزیکی) از تعریف رنگ **سبز** یا **آبی**، مشکلی برای تشخیص آن ندارید. ولی خواندن مطالب زیر مفید است.

همان‌طور که در معرفی مفهوم **مجموعه** نیز دیدیم، در ریاضیات به چنین جمله‌هایی که در کادر بالا آمده صرفاً **توصیف** واژه‌ی **جفت مرتب** یا نمادگذاری (**عبارت** (a,b)) می‌گوییم و نه **تعریف** دقیق علمی آن. **کوراتوفسکی** مفهوم **جفت مرتب** را به کمک مفهوم مجموعه به صورت زیر تعریف می‌کند:

۲.۴.۲ تعریف

جفت مرتب به نمایش (a,b) عبارت است از

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که تعریف کوراتوفسکی دارای ویژگی (*) است.

۳.۴.۲ قضیه

تعریف کوراتوفسکی دارای ویژگی زیر است.

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \quad \& \quad b=d$$

اثبات

روشن است که اگر $a=c$ و $b=d$، آنگاه

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}=(c,d)$$

برعکس، فرض کنیم، با توجه به تعریف کواتوفسکی، $(a,b)=(c,d)$، یعنی $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$. دو حالت زیر رخ می‌دهد.

(**حالت ۱**): فرض کنیم $a=b$. در این صورت، $\{a\}=\{a,b\}$ و در نتیجه $(a,b)=\{\{a\}\}$ مجموعه‌ای تک عضوی است. حال چون $(a,b)=(c,d)$، نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌ی کوراتوفسکی معرف (c,d) یعنی $\{\{c\},\{c,d\}\}$ نیز تک عضوی است. پس $\{c\}=\{c,d\}$ و در نتیجه $c=d$. حال تساوی $(a,b)=(c,d)$ به این معنی است که $\{a\}=\{c\}$ و در نتیجه $a=c$. پس $b=a=c=d$.

(**حالت۲**): فرض کنیم $a\neq b$. در این صورت، $\{a,b\}\neq\{b\}$. در نتیجه مجموعه‌ی $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$ دارای دو عضو است. بنابراین، مجموعه‌ی $(c,d)=\{\{c\},\{c,d\}\}$ نیز دو عضوی است. حال، از تساوی مجموعه‌های $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$ نتیجه بگیرید که $\{a\}=\{c\}$ و $\{a,b\}=\{c,d\}$ (**چطور؟**) بنابراین $a=c$ و $b=d$ (**چرا؟**) ■

حال که با توجه به تعریف کوراتوفسکی، جفت‌های مرتب، اشیائی **موجه** شدند، از این پس تعریف کوراتوفسکی را به حاشیه می‌گذاریم و صرفاً از نماد (a,b) و ویژگی (❋) استفاده می‌کنیم.

۴.۴.۲ تعریف

حاصل‌ضرب (**دکارتی**) مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B را با $A\times B$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A\times B=\{(a,b)|\ \ a\in A,b\in B\}$$

واژه‌ی **حاصل‌ضرب** در فصل **۱۱** توجیه می‌شود.

۵.۴.۲ بحث در کلاس

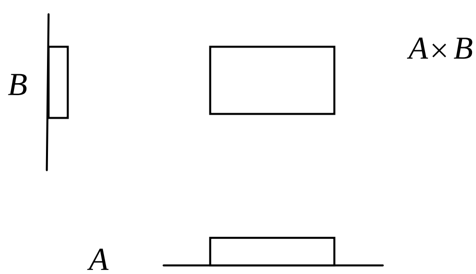
در هر یک از حالت های زیر، $A\times B$ و $B\times A$ را مشخص کنید.

۱- $A=\{a\}$ و $B=\{b\}$.

۲- $A=\varnothing$ و B دلخواه (تهی یا ناتهی) باشد.

۳- $A=B=\{۱,۲\}$.

این عمل مجموعه‌ها را شاید نتوان به خوبی با نمودار ون نمایش داد. یکی از نمایش‌های متداول حاصل‌ضرب مجموعه‌ها که ایده‌ی آن از نمایش نقطه در صفحه‌ی مختصات دکارتی می آید، به صورت زیر است.



۶.۴.۲ بحث در کلاس

۱- مجموعه‌های زیر را در دستگاه مختصات دکارتی نشان دهید.

(الف) $[۱,۲]\times[۳,۴]$

(ب) $\{۱,۲\}\times\{۱,۲,۳\}$

۲ - به این سؤال با دقت و بدون عجله پاسخ دهید. **آیا** هر زیرمجموعه‌ی $A\times B$ لزوماً به صورت $S\times T$ است که در آن $S\subseteq A$ و $T\subseteq B$؟ اگر پاسخ منفی است، مثالی ارائه دهید. برعکس چطور؟

حال برخی از **ویژگی‌های** عمل ضرب و ارتباط آن را با عمل‌های دیگر که بیشتر استفاده می شوند، می‌آوریم.

۷.۴.۲ قضیه

برای مجموعه‌های دلخواه A، B، C داریم

۱- $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

۲- $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

۳- $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

اثبات

حکم **۳** را اثبات می‌کنیم. شما نیز یکی دیگر را اثبات کنید.

$$
\begin{aligned}
A\times(B\setminus C)&=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\setminus C\}\\
&=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C\}\\
&=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\notin A\times C\}\\
&=(A\times B)\setminus(A\times C)
\end{aligned}
$$

۸.۴.۲ بحث در کلاس

عبارت‌های زیر را کامل و سپس آن‌ها را اثبات کنید.

$$A\times\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}\cdots$$
$$A\times\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}\cdots$$

در زیر با تعمیم مفهوم جفت مرتب، حاصل‌ضرب دکارتی تعـدادی **دلخــواه** مجموعـه را معرفی می‌کنیم. ابتدا تعریف زیر را ببینید.

۹.۴.۲ تعریف

برای هر $n\in\mathbb{N}$، عبارت $(a_1,\ldots,a_n)$ را یک $n-$**تایی مرتب** از n شئ (نه لزوماً متمایز) می‌نامیم. هر a_i را **جمله** یا **مولفه‌ی** iام این $n-$تایی مرتب می‌نامیم. همچنین،

$$(a_1,\ldots,a_n)=(a'_1,\ldots,a'_n)\Leftrightarrow\forall i,a_i=a'_i$$

حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌های A_1، . . . ، A_n عبارت است از

$$A_1\times\ldots\times A_n=\{(a_1,\ldots,a_n)|\ \ \forall i,a_i\in A_i\}$$

در حالتی که همه‌ی A_iها با هم برابرند، به جای $A\times\ldots\times A$ می‌توانیم بنویسیم A^n.

تعمیم بعدی این مفهوم به صورت زیر است.

۱۰.۴.۲ تعریف

عبارت $(a_1,a_2,\ldots)$ را یک **دنباله‌ی نامتناهی** می‌نامیم. همچنین،

$$(a_1,a_2,\ldots)=(a_1',a_2',\ldots)\Leftrightarrow\forall i,a_i=a_i'.$$

دنباله‌ی $(a_1, a_2, \ldots)$ را به صورت‌های فشرده‌ی $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ یا $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ نیز نشان می‌دهیم.
حال این مفاهیم را به کلی‌ترین صورت آن تعمیم می‌دهیم.

۱۱.۴.۲ تعریف

برای هر مجموعه‌ی دلخواه $I \neq \varnothing$، عبارت صوری $(a_i)_{i\in I}$ را یک $I-$**تایی** می نامیم. همچنین،

$$(a_i)_{i\in I} = (a'_i)_{i\in I} \Leftrightarrow \forall i \in I, a_i = a'_i$$

حاصل‌ضرب (**دکارتی**) خانواده‌ی $\{A_i\}_{i\in I}$ عبارت است از :

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I, a_i \in A_i\}$$

البته اگر $I = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ یا $I = \mathbb{N}$، می نویسیم

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_۱ \times \cdots \times A_n$$

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_۱ \times A_۲ \times \cdots$$

همان‌طور که عبارت صوری (a,b) صرفاً **نمادی** برای نمایش **جفت مرتب** است، که یک تعریف دقیق آن را کوراتوفسکی ارائه داد، عبارت صوری $(a_i)_{i\in I}$ نیز صرفاً یک نمادگذاری برای معرفی واژه‌ی $I-$تایی است. در تعریف **۷.۲.۸** این مفهوم و حاصل‌ضرب دکارتی خانواده-ی $\{A_i\}_{i\in I}$ را مجدداً به کمک مفهوم **تابع** تعریف می‌کنیم.

حال عمل دیگری را معرفی می‌کنیم که در فصل تابع خواهیم دید که، به تعبیری، **دوگان** مفهوم حاصل‌ضرب است.

۱۲.۴.۲ تعریف

اجتماع مجزای مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$ مجموعه‌ای به نمایش‌های $A_۱ \uplus A_۲$، $A_۱ \sqcup A_۲$ یا $A_۱ \oplus A_۲$ و با تعریف زیر است.

$$A_۱ \sqcup A_۲ = (A_۱ \times \{۱\}) \cup (A_۲ \times \{۲\})$$

توجه می‌کنیم که هر عضو $A_i^* = A_i \times \{i\}$ به صورت (x,i) است، که در آن $x \in A_i$.
همچنین، حتی اگر مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ **مجزا نباشند**، دو مجموعه‌ی ساخته شده‌ی $A_۱^* = A_۱ \times \{۱\}$ و $A_۲^* = A_۲ \times \{۲\}$ یقیناً **مجزا هستند**. این مطلب واژه‌ی **اجتماع مجزا** را توجیه می‌کند. همان‌طور که گفتیم، خواهیم دید که اجتماع مجزا به تعبیری **دوگان** مفهوم حاصل‌ضرب است. در حال حاضر آن را می‌توانید با اجتماع مقایسه کنید.

۱۳.۴.۲ بحث در کلاس

۱- فرض کنید $A_1 = \{a,b,c\}$ و $A_2 = \{a,d\}$. مجموعه‌های $A_1 \uplus A_1$ و $A_1 \uplus A_2$ را مشخص و تعداد عضوهای آن‌ها را به ترتیب با تعداد عضوهای $A_1 \cup A_1$ و $A_1 \cup A_2$ مقایسه کنید و تفاوت‌های آن‌ها را بیابید.

۲- تعریف اجتماع مجزا را به خانواده‌ی دلخواه $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ تعمیم دهید.

تمرین ۴.۲

۱. آیا به سؤال ۲ بحث ۶.۴.۲ پاسخ دادید؟

۲. یکی دیگر از حکم‌های قضیه‌ی ۷.۴.۲ را اثبات کنید.

۳. یکی از حکم‌های بحث **۸.۴.۲** را اثبات کنید.

۴. تساوی های زیر را اثبات کنید.

$$(A_1 \cup A_2)\times(B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1)\cup(A_1 \times B_2)\cup(A_2 \times B_1)\cup(A_2 \times B_2)$$

$$(A_1 \cap A_2)\times(B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1)\cap(A_1 \times B_2)\cap(A_2 \times B_1)\cap(A_2 \times B_2)$$

۵. نشان دهید که

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j &= \bigcup \{A_i \times B_j \mid i\in I, j\in J\}\\ &= \bigcup \{A_i \times B_j \mid (i,j)\in I\times J\}\end{aligned}$$

۶. حالت اشتراک تمرین **۵** را بنویسید.

۷. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را اثبات کنید.

(الف) $A\cup(B\times C) = (A\cup B)\times(A\cup C)$.

(ب) $A\cap(B\times C) = (A\cap B)\times(A\cap C)$.

۸. درستی یا نادرستی حکم‌های زیر را اثبات کنید.

(الف) $\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{i\in I} B_j \supseteq \bigcup_{i\in I}(A_i \times B_i)$.

(ب) $\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{i\in I} B_j = \bigcup_{i\in I}(A_i \times B_i)$.

(پ) $\bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A_i \times B_i)$.

۹. حکم‌های درست تمرین **۸** را برای حالت $I=\{۱,۲\}$ بنویسید.

۱۰. درستی یا نادرستی عبارت $\mathcal{P}(A\times B) = \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$ را نشان دهید.

۱۱. اگر خانواده‌ی $\mathscr{A}$ که در بند **۲** بحث **۱۳.۴.۲** به صورت اندیسدار داده نشده باشد، اجتماع مجزا را **چطور** تعریف می‌کنید؟

فصل ۳

رابطه و ترتیب

بسیاری از مفاهیم مهم در **علوم ریاضی و کاربردهای** آن‌ها به کمک زیـرمجموعـه‌هـایی **خاص** از حاصل‌ضرب دکارتی معرفی می‌شوند. در این فصل مطالعه‌ی این زیرمجموعه‌ها را آغاز و در فصل‌های بعدی پی می‌گیریم. توجه می‌کنیم که بـه مـرور مطالـب کتـاب **جدیـدتـر** و **جدی‌تر** می‌شوند. از این رو **لازم است دقت و وقت بیشتری صرف کنید.**

۱.۳ رابطه

گرچه قصد ما مطالعه‌ی **تنها برخی** از زیرمجموعه‌های خاص حاصل‌ضرب دو مجموعه است، ولی ابتدا حالت کاملاً کلی آن را معرفی می‌کنیم و با برخی از مفاهیم مربوط به آن آشنا می‌شویم.

۱.۱.۳ تعریف

هر زیرمجموعه‌ی دلخواه چون R از $A\times B$ را **رابطه‌ای (دوتایی)**، یا به طور ساده **رابطه**‌ای، از A به B می‌نامیم.

این تعریف نشان می‌دهد که رابطه‌های **بسیاری** از مجموعه‌ای چون A به B وجود دارند. برای مثال، اگر A دارای ۵ عضو و B دارای ۷ عضو باشد، آنگاه تعداد رابطه‌های از A به B، یعنی تعداد زیرمجموعه‌های $A\times B$ برابر با $۲^{۳۵}$ است (**چرا؟**)، و بینهایت رابطه از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ وجود دارد! چند مثال آشنا را یادآوری می‌کنیم.

۱- رابطه‌ی **تساوی** یا **همانی** از مجموعه‌ی دلخواه A به خودش، یعنی،

$$\{(x,y)\in A\times A\,|\,x=y\}=\{(x,x)\,|\,x\in A\}$$

۲- رابطه‌ی **کوچکتراز یا مساوی با** از $\mathbb{Z}$ به خودش، یعنی،

$$\{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,|\,m\le n\}$$

۳- رابطه‌ی **بزرگتر از یا مساوی با** از $\mathbb{Z}$ به خودش، یعنی،

$$\{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,|\,m\ge n\}$$

۴- رابطه‌ی **همنهشتی به پیمانه‌ی ۵** از $\mathbb{Z}$ به خودش، یعنی،

$$\{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,|\,m\equiv_5 n\}=\{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,|\,5|m-n\}$$

۵- رابطه‌ی **همنهشتی** از مجموعه‌ی مثلث‌ها به خودش.

۶- یکی دو تا مثال آشنای دیگر شما بیاورید.

قبل از ادامه‌ی بحث، نمادگذاری مفید زیر را معرفی می‌کنیم.

۲.۱.۳ نمادگذاری

با الگو قراردادن مثال‌های بالا، معمولاً به جای $(a,b)\in R$ می‌نویسیم aRb و می‌خوانیم **a با b در رابطه‌ی R است**، و اگر $(a,b)\notin R$، می‌نویسیم $a\not R b$. همچنین اگر $R\subseteq A\times A$، می‌گوییم که R رابطه‌ای **روی** یا **در** A است.

نکته‌ی دیگری که لازم است بگوییم این است که دو رابطه‌ی R و S را تنها وقتی با هم مقایسه می‌کنیم که هر دو زیرمجموعه‌ی یک $A\times B$ باشند.

۳.۱.۳ بحث در کلاس

فرض کنید $A=\{۲,۳,۵\}$، $B=\{۳,۶\}$ و $R=\{(a,b)\in A\times B \mid a|b\}$ که در آن $a|b$ یعنی b مضرب طبیعی a است.

(الف) یکی از عضوهای R جفت $(۲,۶)$ است، زیرا $۲|۶$. همه‌ی عضوهای R را مشخص کنید.

(ب) رابطه‌ی دیگری از A به B بنویسید.

(پ) آیا $R_۱=\{(۲,۳),(۲,۶)\}$، $R_۲=\emptyset$ و $R_۳=A\times B$ نیز رابطه‌هایی از A به B هستند؟

دو رابطه‌ی خاص زیر بسیار به کار می‌روند:

۴.۱.۳ تعریف

(الف) رابطه‌ی

$$\Delta_A=\{(a,a)|a\in A\}$$

را رابطه‌ی **همانی**، **تساوی**، یا **قطری** در A می‌نامیم ، زیرا

$$x=y \Leftrightarrow (x,y)\in\Delta_A$$

(ب) $\nabla_A=A\times A$ (نماد ∇ را **نابلا** بخوانید.)

انواع رابطه

همان‌طور که متوجه شدیم، تعریف رابطه از A به B بسیار **کلی** است و هر زیرمجموعه‌ای از $A\times B$ را دربر می‌گیرد. برخی از رابطه‌ها دارای **ویژگی**‌هایی هستند که آن‌ها را در این یا آن مبحث از ریاضیات و کاربردها مفیدتر می‌سازد. در این بخش و بخش‌های دیگر **چند نمونه**ی ویژه را که در درس‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، معرفی می‌کنیم. از بین ویژگی‌های بسیاری که در ارتباط با مفهوم رابطه در A مطرح می‌شوند، به موارد زیر اشاره می‌کنیم، که ترکیبی از آن‌ها رابطه‌هایی **خاص** را در A معرفی می‌کنند.

۵.۱.۳ تعریف

رابطه‌ی R در A:

(الف) انعکاسی یا **بازتابی** است اگر

$$\forall x\in A, xRx$$

(ب) تقارنی یا **متقارن** است اگر برای $x, y\in A$

$$xRy\Rightarrow yRx$$

(پ) پادتقارنی یا **پادمتقارن** است اگر برای $x, y\in A$،

$$(xRy)\&(yRx)\Rightarrow x=y$$

(ت) متعدی یا **ترایا** است اگر برای $x, y, z\in A$،

$$(xRy)\&(yRz)\Rightarrow xRz$$

(ث) خطی یا **زنجیری** است اگر برای هر $x, y,\in A$،

$$(xRy)\ \vee\ (yRx)$$

مثال‌های بسیاری از رابطه‌ی روی A می‌توانید ارائه دهید که دارای برخی از ویژگی‌های بالا باشند و برخی ویژگی‌ها را نداشته باشند. به مرور با تعدادی از آن‌ها آشنا می‌شویم.

۶.۱.۳ بحث در کلاس

فرض کنید $A=\{a,b,c\}$.

۱- کوچک‌ترین (با کم‌ترین عضو) رابطه‌ی انعکاسی روی A را بنویسید.

۲- فرض کنید $S=\{(a,a),(a,b),(b,c)\}$. **کم‌ترین** تعداد عضو را به S بیفزایید که رابطه‌ای **تقارنی** چون R روی A به دست آید.

۳- در سؤال **۲** به‌جای تقارنی، **متعدی** بنویسید و به آن پاسخ دهید.

همان‌طور که گفتیم، با در نظر گرفتن ترکیبی از ویژگی‌های بالا، رابطه‌هایی خاص معرفی می‌شوند. در این کتاب به ویژه به سه تا از این رابطه‌های **خاص** و **مهم** می‌پردازیم که حتماً لازم است که همه‌ی **دانشجویان رشته‌های علوم ریاضی** (آمار، ریاضی، علوم کامپیوتر، و . . .) با آن‌ها آشنا شوند.

تمرین ۱.۳

۱. تحقیق کنید که رابطه‌ی بخش‌پذیری در اعداد صحیح دارای کدام ویژگی مذکور در تعریف **۵.۱.۳** است؟

۲. تحقیق کنید که رابطه‌های زیر در اعداد حقیقی دارای کدام ویژگی مذکور در تعریف **۵.۱.۳** است؟

(الف) $xRy \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Z}$.

(ب) $xR'y \Leftrightarrow x+y\in\mathbb{Z}$.

۳. تحقیق کنید که رابطه‌ی زیر در $\mathcal{P}(A)\setminus\{\varnothing\}$ دارای کدام ویژگی مذکور در تعریف **۵.۱.۳** است؟

۴. فرض کنید R رابطه‌ای انعکاسی در مجموعه‌ی A است. نشان دهید که R متقارن و متعدی است اگر و تنها اگر

$$(aRb)\ \wedge\ (aRc)\Rightarrow bRc$$

۵. یادآوری می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n، رابطه‌ی همنهشتی $\equiv_n$ به پیمانه‌ی n در $\mathbb{Z}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$x \equiv_n y$ اگر و تنها اگر $x-y$ مضرب n باشد. یعنی، $n \mid x-y$. گاهی به‌جای $x \equiv_n y$ می‌نویسیم $x \equiv y (\mod n)$ یا $x \equiv y (n$ به پیمانه‌ی$)$.

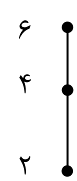
تحقیق کنید که این رابطه دارای کدام ویژگی مذکور در تعریف **۵.۱.۳** است؟

۶. یادآوری می‌کنیم که به سؤال‌هایی که در بحث در کلاس‌ها مطرح می‌شوند (به ویژه **۶.۱.۳**) **حتماً پاسخ دهید.**

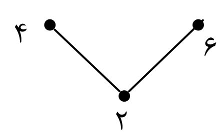
۲.۳ رابطه‌ی ترتیبی

با **ترتیب** اعداد آشنا هستیم. در زندگی روزمره نیز اغلب پدیده‌های علمی و غیر علمی را با هم مقایسه می‌کنیم. دراین بخش مفهوم ترتیب اعداد را به مجموعه‌های دیگر **تعمیم** می‌دهیم و این مفهوم را به صورت مجرد مطالعه می‌کنیم. بسیاری از مطالب این بخش ممکن است برایتان تازگی داشته باشند، **بیشتر دقت کنید.**

همان طور که گفتیم، با ترتیب اعداد از همان کودکی آشنا شده‌ایم و می‌دانیم که مثلاً ۴≥۲ و ۶≥۲. این مفهوم آنقدر عمیق در ذهنمان قرار گرفته است که به فکرمان خطور نمی‌کندکه اعداد ۲، ۴، ۶ را بتوانیم جز به صورت صعودی



بچینیم! در حالی‌که ممکن است لازم باشد آن‌ها را، برای مثال، به این دلیل کـه ۴|۲، ۶|۲ولـی ۶∤۴ و۴∤۶ به صورت زیر بچینیم:



در واقع، مفهوم ترتیب عددی آنقدر عمیق در ذهنمان قرار گرفته است که اگر با بازی فوتبال آشنا نباشیم یا (مانند ابراهیمی) کم آشنا باشیم ، ممکن است افراد تیم را با توجه به اندازه‌ی (عددی) سن، اندازه‌ی (عددی) قد، یا اندازه‌ی (عددی) وزن آن‌ها در زمین بچینیم! در حالی که اغلب لازم است اشیاء را نه لزوماً برحسب ویژگی **عددی** که به هر دلیل دیگری آن‌ها را به اصطلاح **مرتب** کنیم. در این بخش قصد داریم مفهوم ترتیب معمولی اعداد را به مجموعه‌های دلخواه تعمیم دهیم و آن را به صورت **مجرد** مطالعه کنیم. همان‌طور که گفتیم، بسیاری از مطالب این بخش ممکن است برایتان تازگی داشته باشد: **بیشتر دقت کنید.**

با کمی دقت به رابطه‌ی $\leq$ در اعداد، مشاهده می‌کنیم که دارای ویژگی‌های: **انعکاسی** $(x \leq x)$، **پاد-تقارنی** $(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$ و **تعدی** $(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ است. از این رو، تعمیم و مجرد سازی آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

۱.۲.۳ تعریف

رابطه‌ی R در مجموعه‌ی P، یعنی $R \subseteq P \times P$، را **رابطه‌ی ترتیبی جزئی** (که ما آن را به اختصار، **رابطه‌ی ترتیبی**) می‌گوییم اگر **انعکاسی**، **پاد تقارنی**، و **متعدی** باشد.

۲.۲.۳ بحث در کلاس

حال درک خود را از تعریف بالا **تقویت کنید.**

۱- توجه می‌کنیم که رابطه‌ی **کوچکتری** معمولی اعداد، یعنی $<$ ، ترتیبی نیست! **کدام** ویژگی از سه ویژگی انعکاسی، پاد تقارنی، و متعدی را ندارد؟ **چطور** استدلال می‌کنید که پاد تقارنی است؟ (نکته‌ای فنی (از اصول منطق) در آن است! از استاد درس کمک بگیرید).

۲- به آسانی می‌توانید نشان دهید که رابطه‌ی **بخشپذیری**

$$mRn \Leftrightarrow m|n$$

در $\mathbb{N}$ ترتیبی است. در $\mathbb{Z}$ **چطور؟**

۳- فرض کنید $P=\{$شیراز ,اصفهان ,گرگان$\}$. رابطه‌ی زیر در P ترتیبی است:

$R=\{$(گرگان,اصفهان), (شیراز, شیراز), (اصفهان,اصفهان), (گرگان,گرگان)$\}$

که در نمادگذاری **۲.۱.۳** داریم:

گرگان R گرگان، اصفهان R اصفهان، شیراز R شیراز، گرگان R اصفهان

شما در P یک رابطه‌ی ترتیبی دیگر بنویسید.

۳.۲.۳ نمادگذاری

همان‌طورکه با الگو قراردادن رابطه‌ی ترتیبی معمولی اعداد، یعنی $\le$، واژه‌ی **رابطه‌ی ترتیبی** را برای هر رابطه‌ای در مجموعه‌ی دلخواه P که دارای ویژگی‌های **انعکاسی**، **پاد تقارنی**، و **متعدی** باشد به کار بردیم، ریاضی‌دانان معمولاً رابطه‌های ترتیبی دلخواه روی P را نیز با نماد آشنای $\le$ (یا از قبیل $\preceq$) به جای R نمایش می‌دهند، حتی اگر P مجموعه‌ای از اعداد و $\le$ رابطه‌ی ترتیبی معمولی اعداد نباشد. حتی، با توجه به نمادگذاری **۲.۱.۳**، که قرار شد به جای $(x,y)\in\le$ بنویسیم $x\le y$، برای خواندن عبارت $x\le y$ از همان واژه‌های عددی استفاده می‌کنیم و می‌خوانیم x **کوچکتر از یا مساوی با y است!!** برای مثال، با توجه به بند **۳** بحث در کلاس بالا، می‌نویسیم **گرگان** $\le$ **اصفهان** و می‌خوانیم **اصفهان کوچکتر از یا مساوی با گرگان است!!** این قراردادها ممکن است در اوایل کار قدری اشتباه برانگیز باشند، ولی به مرور به آن‌ها عادت می‌کنید.

نکته‌ی دیگری که لازم است مطرح کنیم این است که رابطه‌ی ترتیبی اعداد دارای ویژگی خطی یا زنجیری مذکور در بند **(ث)** تعریف **۵.۱.۳** است، زیرا برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم $x\le y$ یا $y\le x$. ولی بسیاری از رابطه‌های ترتیبی (برای مثال، بخشپذیری در اعداد طبیعی یا زیرمجموعه بودن) در این شرط صدق نمی‌کنند. تعریف زیر را ببینید.

۴.۲.۳ تعریف

فرض کنیم $\leq$ رابطه‌ای ترتیبی دلخواه روی P است و $x, y \in P$. اگر دست‌کم یکی از دو حالت $y \leq x$ یا $x \leq y$ رخ دهد، می‌گوییم که x و y (نسبت به $\leq$) **قابل مقایسه‌اند**، اگر هیچ یک از این دو حالت رخ ندهد، گاهی می‌نویسیم $x \| y$.

برای مثال، اگر رابطه‌ی **بخش‌پذیری** را در $\mathbb{N}$ در نظر بگیریم، آنگاه ۲ و ۶ و همچنین ۱۲ و ۴ قابل مقایسه‌اند (**چرا؟**) در حالی که . . . و . . . قابل مقایسه نیستند! همچنین توجه می‌کنیم که اگر رابطه‌ی **ترتیبی معمولی** $\leq$ را روی $\mathbb{N}$ در نظر بگیریم، آنگاه هر دو عدد طبیعی دلخواه m و n قابل مقایسه هستند!

۵.۲.۳ تعریف

اگر $\leq$ رابطه‌ای ترتیبی در P باشد، گاهی می‌گوییم که P به رابطه‌ی ترتیبی $\leq$ **مجهز** شده است، یا جفت $(P, \leq)$ **مجموعه‌ای مرتب** است.

در این صورت P را **مجموعه‌ی زمینه‌ی** آن می‌نامیم. اگر $\leq$ **خطی** نیز باشد، می‌گوییم که $(P, \leq)$ **زنجیر** است.

برای مثال $(\mathbb{N}, \leq)$ زنجیر است در حالی که مجموعه‌ی مرتب $(\mathbb{N}, |)$ چنین نیست (در اینجا از نماد متداول بخش‌پذیری، یعنی $|$، به جای $\leq$ استفاده کرده‌ایم تا اشتباه برانگیز نباشد.)

بدیهی است که یک مجموعه چون P ممکن است تحت رابطه‌های ترتیبی **متعددی** **مجموعه‌ای مرتب** باشد (این طور نیست؟) اگر امکان اشتباه نباشد، برای مثال در بحثی صرفاً یک رابطه‌ی ترتیبی $\leq$ روی P مد نظر باشد، به جای اینکه بگوییم **جفت** $(P, \leq)$

مجموعه‌ای مرتب است، رابطه‌ی ترتیبی $\leq$ را به طور صریح ذکر نمی‌کنیم و صرفاً می-گوییم که P **مجموعه‌ای مرتب است!**

۶.۲.۳ بحث در کلاس

۱- یک رابطه‌ی ترتیبی خطی علاوه بر $\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c)\}$ و یک رابطه‌ی غیر خطی روی $P=\{a,b,c\}$ مثال بزنید.

۲- آیا رابطه‌ی ترتیبی شمولی $\subseteq$ در مجموعه‌ی توانی $\mathcal{P}(\{\mathrm{a},\mathrm{b}\})$ خطی است؟ در $P=\{\phi,\{a\},\{a,b\}\}$ **چطور؟**

۳- زیرمجموعه‌ای نامتناهی از مجموعه‌ی توانی $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ مثال بزنید که تحت رابطه‌ی شمولی $\subseteq$ زنجیر باشد.

در زیر چند واژه‌ی دیگر مربوط به مجموعه‌ی مرتب $(P,\leq)$ را که مورد استفاده قرار خواهند گرفت، معرفی می‌کنیم. ابتدا، با الگو قراردادن رابطه‌ی ترتیبی معمولی اعداد، نمادگذاری متداول $x<y$ را می‌توان برای تاکید بر این که $x\leq y$ **ولی** $x\neq y$ به‌کار برد.

۷.۲.۳ تعریف

می‌گوییم که y **پوشش** یا **تالی** x است، یا x **مقدم بر** y است و می‌نویسیم $x-\!\!\prec y$ اگر $x<y$ ولی هیچ عضوی چون $z\in P$ به طور سره بین x و y وجود نداشته باشد؛ یعنی، عضو z با ویژگی $x<z<y$ وجود نداشته باشد.

توجه کنید که وقتی $x-\!\!\prec y$، آنگاه از $x\leq y\leq z$ نتیجه می‌گیریم که $y=z$ یا $y=x$.

همان‌طور که گفتیم و دیدیم، تعریف برخی از واژه‌ها سریع درک نمی‌شوند. تبحر خود را در زیر افزایش دهید.

۸.۲.۳ بحث در کلاس

۱- اگر $\leq$ رابطه‌ی ترتیبی معمولی روی $\mathbb{N}$ باشد، روشن است که، برای مثال، ۵ تالی ۴ است ولی ۸ تالی ۴ نیست (**چرا؟**) و البته عدد ۱ تالی هیچ عدد طبیعی نیست.

۲- حال رابطه‌ی بخشپذیری را روی $\mathbb{N}$ در نظر بگیرید. در این صورت، ۵ تنها یک مقدم دارد، آن کدام است؟ در واقع، نسبت به بخش‌پذیری، عدد ۱ تنها مقدم هر عدد اول است. عدد ۱۲ دارای دو مقدم است، آن‌ها را بیابید. همچنین، سه تالی برای ۱۲ بنویسید. عدد ۱۲ چند تالی دارد؟

۳- زنجیری مثال بزنید که هر عضو آن دارای پوشش باشد.

۴- زنجیری مثال بزنید که هر عضو آن هم دارای پوشش و هم دارای مقدم باشد.

۵- زنجیری مثال بزنید که هیچ عضو آن تالی نداشته باشد.

در بند **۱** بالا دیدیم که یک عضو ممکن است بیش از یک پوشش یا بیش از یک مقدم داشته باشد. قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که این پدیده در زنجیرها رخ نمی‌دهد.

۹.۲.۳ قضیه

اگر $(P,\leq)$ زنجیر باشد، آنگاه پوشش (و مقدم) هر عضو (البته در صورت وجود) منحصر به فرد (یعنی یکتا) است.

اثبات

روش ساده‌ی اثبات این حکم را به کرات به کار خواهید برد.

فرض می‌کنیم که عضو $a \in P$ دارای دو پوشش چون $b, c \in P$ باشد. یعنی $a -\!\!\prec b$ و $a -\!\!\prec c$. چون P زنجیر است، داریم $b \leq c$ یا $c \leq b$. اگر $b \leq c$، خواهیم داشت $a < b \leq c$ و در نتیجه $b = c$ (جمله بعد از تعریف **۷.۲.۳** را ببینید). به همین صورت،

از $c \le b$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $b=c$. پس پوشش هر عضو (البته در صورت وجود)یکتا است. **جالب بود، نبود؟!** به عنوان تمرین، یکتایی مقدم هر عضو را در زنجیرها (البته در صورت وجود) ثابت کنید. ■

۱۰.۲.۳ نمودار ترتیبی

گاهی عضوهای مجموعه‌ی مرتب P را می‌توانیم با انجام مراحل زیر به صورت تصویری در صفحه نشان دهیم (بچینیم) که بسیار مفید واقع می‌شود. (اگر مراحل زیر کاملاً گویا نبود، در عمل متوجه آن‌ها خواهید شد.)

۱- هر عضو $x \in P$ را با (یا بدون) دایره‌ای کوچک (تو خالی یا تو پر) نشان می‌دهیم.

۲- اگر y پوشش x باشد، یعنی $x -\!\!\prec y$، و تنها در این صورت، پاره خطی از دایره‌ی x به دایره‌ی y رسم می‌کنیم. (دایره‌ی x را پائین‌تر از دایره‌ی y رسم می‌کنیم.)

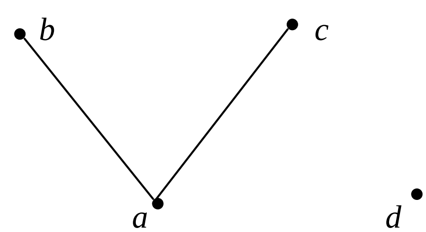
۳- هر عضو باید دست کم بالاتر از یک عضو در سطح زیرین خود باشد، یا سطح زیرین برای آن وجود نداشته باشد.

۱۱.۲.۳ بحث در کلاس

فرض کنید $P = \{a,b,c,d\}$. نمودار ترتیبی رابطه‌ی

$$R_1 = \{(a,a)(b,b),(c,c)(d,d)(a,b),(a,c)\}$$

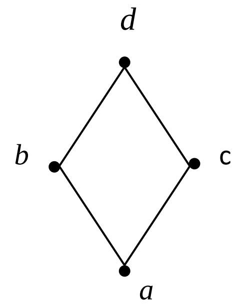
به صورت زیر است:



۱- نمودار ترتیبی رابطه‌ی زیر را رسم کنید.

$$R_2 = \{(a.a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c),(a,c),(a,d)\}$$

۲- مجموعه‌ی زوج های مرتب مربوط به نمودار ترتیبی زیر را بنویسید. (انعکاسی بودن را فراموش نکنید.)



۳- فرض کنید $X = \{a,b\}$. نمودار ترتیبی $(\mathcal{P}(\mathrm{X}),\subseteq)$ را رسم کنید.

تمرین ۲.۳

۱. چند رابطه‌ی ترتیبی روی مجموعه‌ی $P = \{a,b,c\}$ بنویسید، و نمودارهای ترتیبی آن‌ها را رسم کنید. کدام‌ها خطی هستند؟

۲. **آیا** به سؤال‌های بحث‌های **۲.۲.۳(۱)** و **۶.۲.۳(۳)** پاسخ دادید؟

۳. **آیا** به سؤال‌های بحث **۸.۲.۳** پاسخ دادید؟ بند **۴** آن را دوباره ببینید!

۴. مجموعه‌ای مرتب بسازید به طوری که هر عضو آن تالی داشته باشد ولی تعدادی نامتناهی از عضوهای آن مقدم نداشته باشد.

۵. فرض کنید $(P,\leq_P)$ و $(Q,\leq_Q)$ دو مجموعه‌ی مرتب **مجزا** باشند، یعنی، $P \cap Q = \varnothing$. نشان دهید که رابطه‌ی زیر روی مجموعه‌ی $R = P \cup Q$ ترتیبی است:

$$x \leq y \Leftrightarrow (x, y \in P \quad \& \quad x \leq_P y) \vee (x, y \in Q \quad \& \quad x \leq_Q y)$$

توجه می‌کنیم که هیچ عضو P با هیچ عضو Q در رابطه نیست! این مجموعه‌ی مرتب $(R = P \cup Q, \leq)$ را **اجتماع ترتیبی** P و Q می‌نامیم.

۶. فرض کنید $(P,\leq_P)$ و $(Q,\leq_Q)$ دو مجموعه‌ی مرتب **مجـــزا** باشـند. نشـان دهیـد کـه رابطه‌ی زیر روی مجموعه‌ی $R=P\cup Q$ ترتیبی است:

$$x\leq y \Leftrightarrow (x,y\in P \Rightarrow x\leq_P y)\vee(x,y\in Q \Rightarrow x\leq_Q y)\vee(x\in P, y\in Q)$$

توجه می‌کنیم که در اینجا، **هر** عضو P کوچک‌تر از یا مساوی با **هــر** عضـو Q اسـت. ایـن مجموعـه‌ی مرتـب $(R=P\cup Q,\leq)$ را **مجمـــوع ترتیبـــی** P و Q مـی‌نـامیم و بـا $P\oplus Q$ نشان می‌دهیم.

۷. با رسم نمودار ترتیبی، مثال‌هایی برای $P\cup Q$ و $P\oplus Q$ ارائه دهید.

۸. فرض کنید $(P_1,\leq_1)$، . . . ، $(P_n,\leq_n)$ مجموعه‌هایی مرتب باشند. نشان دهید که رابطه‌ی زیر روی $P=P_1\times\cdots\times P_n$ ترتیبی است:

$$(x_1,\cdots,x_n)\leq(y_1,\cdots,y_n)\Leftrightarrow(\forall i)\quad x_i\leq_i y_i$$

این رابطه‌ی ترتیبی را **مؤلفه‌ای** می‌نامیم.

۹. فرض کنید P و Q زنجیر باشند. ثابت کنید که $R=P\times Q$ با ترتیـب مؤلفـه‌ای زنجیـر است اگر و تنها اگر **حداکثر یکی** از P یا Q بیش از یک عضو داشته باشد.

۱۰. فرض کنید $(P,\leq_P)$ و $(Q,\leq_Q)$ مجموعه‌هایی مرتب باشند. نشان دهید که رابطه‌ی زیر روی $R=P\times Q$ ترتیبی است:

$$(x,x')\leq(y,y')\Leftrightarrow(x<_P y)\vee(x=y\,\&\,x'\leq_Q y')$$

این ترتیب را ترتیب **قاموسی** یا **لغتنامه‌ای** می‌نامیم **(چرا؟)** .

۱۱. فرض کنید P و Q زنجیر باشند. ثابت کنید که $R=P\times Q$ با ترتیـب قاموسـی زنجیـر است.

۱۲. فرض کنید که $\le$ رابطه‌ای ترتیبی (جزئی) روی P است. نشان دهید که رابطه‌ی به نمایش $\ge$ و با تعریف $(x \ge y \Leftrightarrow y \le x)$ نیز ترتیبی است. مجموعه‌ی مرتب $(P,\ge)$ را **دوگان** $(P,\le)$ می‌نامیم و آن را با P^{op} نمایش می‌دهیم. نمودار ترتیبی P^{op} چه تفاوتی با نمودار P دارد؟ مثالی ارائه دهید.

۳.۳ عضوهای ویژه در مجموعه‌های مرتب

برخی از عضوها در مجموعه‌های مرتب به دلایلی، خاص هستند. برای مثال

۱.۳.۳ تعریف

فرض کنید $(P,\le)$ مجموعه‌ای مرتب (جزئی) است. در این صورت،

(الف) عضو $a \in P$ را **بزرگ‌ترین** عضو P (نسبت به $\le$) می‌گوییم اگر از هر عضو دیگر P بزرگ‌تر باشد؛ یعنی،

$$(\forall x \in P) \quad x \le a$$

(ب) عضو $b \in P$ را **کوچک‌ترین** عضو P (نسبت به $\le$) می‌گوییم اگر از هر عضو دیگر P کوچک‌تر باشد؛ یعنی،

$$(\forall x \in P) \quad b \le x$$

(پ) اگر P دارای بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو باشد، آن را **کراندار** می‌نامیم.

درک تعریف بالا نسبت به تعریف بعدی آسان است، زیرا واژه‌ها همان معنی لغوی خود را دارند. این نکته نیز لازم به ذکر است که بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عضو در مجموعه‌ای مرتب ممکن است وجود نداشته باشد، ولی در صورت وجود، هر یک از آن‌ها **منحصر به فرد** است.

اگر نتوانستید این واقعیت را به روش اثبات قضیه‌ی **۹.۲.۳** اثبات کنید، اثبات جالب آن را در

قضیه‌ی ۳.۳.۳ ببینید. با توجه به یکتایی مذکور، معمولاً بزرگ‌ترین عضو $(P,\leq)$ را با ۱ یا T و کوچک‌ترین عضو آن را با ∘ یا $\perp$ نمایش می‌دهیم (البته در صورت وجود).

۲.۳.۳ بحث در کلاس

۱- کوچک‌ترین عضو در $(\mathbb{N},\leq)$ و در $(\mathbb{N},|)$ کدام‌اند؟ آیا بزرگ‌ترین عضو دارند؟

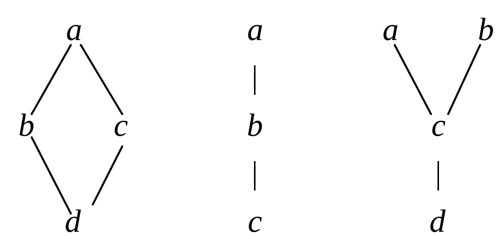
۲- کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو در $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ کدام‌اند؟

۳- بزرگ‌ترین و (کوچک‌ترین) عضو مجموعه‌های مرتب زیر را (در صورت وجود) مشخص کنید:

$$((5,7],\leq),\ ([5,7),\leq),\ (\{12,4,3,2\},|),\ (\mathbb{N}\cup\{\infty\},\leq)$$

که در آن $a|b$ یعنی b مضرب طبیعی a است.

۴- در نمودارهای ترتیبی زیر، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو را (در صورت وجود) مشخص کنید.



(الف) (ب) (پ)

۳.۳.۳ قضیه

بزرگ‌ترین (و کوچک‌ترین) عضو $(P,\leq)$، البته در صورت وجود، منحصر به فرد (یکتا) هستند.

اثبات

البته واژه‌ها به‌خودی خود یکتایی را القا می‌کنند، ولی قرار شد هیچ حکمی را با اصرار یا سوگند خوردن بر کسی تحمیل نکنیم!

برای اثبات یکتایی بزرگ‌ترین عضو، مشابه اثبات قضیه **۹.۲.۳**، فرض می‌کنیم که هر دو عضو $a,b \in P$ بزرگ‌ترین عضو باشند. حال چون. . . ، پس برای هر عضو P، از جمله b، داریم $b \leq a$. از طرفی به گونه‌ی مشابه، . . . ، پس $a \leq b$. حال از $b \leq a$ و $a \leq b$ و پادتقارنی بودن رابطه‌های ترتیبی، نتیجه می‌گیریم که . . . و حکم اثبات می‌شود! **جالب بود؟!**

حال یکتایی کوچک‌ترین عضو را اثبات کنید. ■

درک تعریف زیر نیاز به **دقت بیشتری** دارد.

۴.۳.۳ تعریف

فرض کنیم $(P,\leq)$ مجموعه‌ای مرتب است. در این صورت،

(الف) عضو $a \in P$ را یک **عضو ماکسیمال** (یا **بیشین**) می‌گوییم اگر از هیچ عضو دیگر P کوچک‌تر نباشد؛ یعنی، $x \in P$ وجود نداشته باشد به طوری که $a < x$. به زبان گزاره‌ها،

$$a \leq x \Rightarrow a = x$$

(ب) عضو $b \in P$ را یک **عضو مینیمال** (**کمین**) می‌گوییم اگر هیچ عضو دیگر P از آن کوچک‌تر نباشد؛ یعنی، $x \in P$ وجود نداشته باشد به طوری که $x < a$. به زبان گزاره‌ها،

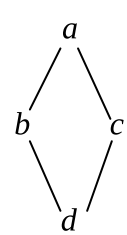
$$x \leq a \Rightarrow x = a$$

معمولاً نخستین باری که تعریف عضوهای **ماکسیمال** و **مینیمال** را می‌بینیم دچار اشتباه می‌شویم و تصور می‌کنیم که همان مفاهیم بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین هستند. دو موضوع باعث پدید آمدن این اشتباه می‌شود. یکی این که واژه‌های **بیشین** و **کمین** چندان تفاوتی با واژه‌های **بزرگ‌ترین** و **کوچک‌ترین** ندارند، و از این رو تا مدتی واژه‌های لاتین **ماکسیمال** و **مینیمال** را به کار می‌بریم. دوم اینکه هرگاه صحبت از ترتیب و رابطه‌ی

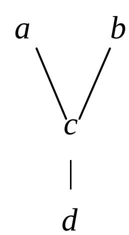
ترتیبی می‌شود، در ذهن ما بلافاصله مجموعه‌های اعداد و رابطه‌ی معمولی $\leq$ مجسم مـی‌شـود، که ویژگی زنجیر را داراست و در نتیجه هر عضوی که عضوی از آن بزرگ‌تر وجود نداشته باشـد، خود از همه بزرگ‌تر است. قبلا نیز در مورد خاص بودن $\leq$ در اعداد **هشدار** دادیم. بحث زیـر مفاهیم ماکسیمال و مینیمال را روشن‌تر می‌کند.

۵.۳.۳ بحث در کلاس

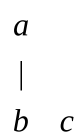
درک این مفاهیم با نمودارها آسان‌تر است. نمودارهای ترتیبی زیر را برای $P = \{a,b,c,d\}$ در نظر بگیرید.



(الف)

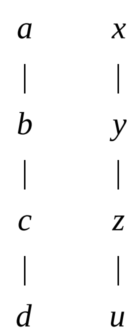


(ب)

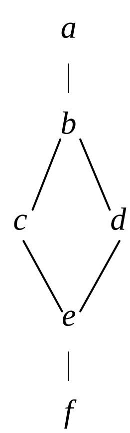


(پ)

(ت)



(ث)



(ج)

عضوهای کوچک‌ترین، مینیمال، بزرگ‌ترین و ماکسیمال را در **(الف)**، **(ت)**، و **(ج)** با دلیل مشخص کنید.

نمودار **(ب)** بزرگ‌ترین عضو ندارد ولی دارای دو عضو ماکسیمال است. آن‌ها را با دلیل مشخص کنید.

نمودار **(پ)** دارای بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عضو نیست (**چرا؟**) ولی یک عضو آن هم ماکسیمال است و هم مینیمال. آن را با دلیل مشخص کنید.

نمودار **(ث)** دارای دو عضو ماکسیمال و دو عضو مینیمال است. آن‌ها را با دلیل مشخص کنید. آیا در این نمودار بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عضو وجود دارد؟

متوجه شدیم که اگر عضوی ماکسیمال باشد، لزوماً بزرگ‌ترین عضو نیست، و اگر عضوی مینیمال باشد، لزوماً کوچک‌ترین عضو نیست. **عکس این احکام چطور؟**

۶.۳.۳ قضیه

(الف) *بزرگ‌ترین عضو $(P,\leq)$، در صورت وجود، یقیناً تنها عضو ماکسیمال آن است.*

(ب) *کوچک‌ترین عضو $(P,\leq)$، در صورت وجود، یقیناً تنها عضو مینیمال آن است.*

اثبات

(الف) فرض کنیم a بزرگ‌ترین عضو $(P,\leq)$ باشد. برای اینکه نشان دهیم a عضو ماکسیمال نیز است، نشان می‌دهیم که گزاره‌ی $(a\leq x\Rightarrow a=x)$ برای هر $x\in P$ درست است. پس فرض می‌کنیم $a\leq x$ درست است. چون . . . ، باید $x\leq a$. حال از $a\leq x$ و $x\leq a$ و . . . بودن رابطه‌های ترتیبی، نتیجه می‌گیریم که $a=x$. حکم **(ب)** را شما بعد از کلاس اثبات کنید. ■

۷.۳.۳ تعریف

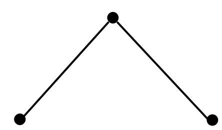
مجموعه‌ی مرتب $(P,\leq)$ را **خوش ترتیب** می‌گوییم اگر هر زیر مجموعه‌ی ناتهی Q از P خود دارای کوچک‌ترین عضو باشد. یعنی

$$\exists q \in Q, \forall x \in Q, q \leq x$$

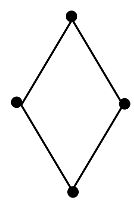
۸.۳.۳ بحث در کلاس

۱- روشن است که مجموعه‌ی مرتبی که ناتهی باشد و دارای کوچکترین عضو نباشد، یقیناً **خوش ترتیب** نیست. **چرا؟**

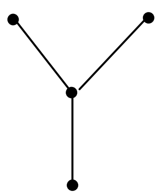
۲- نمودارهای زیر معرف مجموعه‌های مرتب خوش‌ترتیب نیستند. **چرا؟**



(الف)



(ب)



(پ)

۳- مجموعه‌ی مرتب $([0,1],\leq)$ خوش ترتیب نیست. **چرا؟**

۴- نشان دهید که $(\{۲,۴,۶\};|)$، که در آن $a|b$ یعنی b مضرب طبیعی a است، خوش-ترتیب نیست ولی $(\{۲,۴,۸\};|)$ خوش‌ترتیب است.

۵- آیا مجموعه‌ی مرتب $(\mathbb{N},\leq)$ خوش‌ترتیب است؟ توجه می‌کنیم که اگر $Q \subseteq \mathbb{N}$ متناهی (و ناتهی باشد) آنگاه Q دارای کوچک‌ترین عضو است. زیرا اگر $a_1 \in Q$ کوچک‌ترین نباشد، آنگاه $a_2 \in Q$ وجود خواهد داشت که $a_2 < a_1$ و اگر a_2 کوچک‌ترین نباشد، آنگاه

$a_3 \in Q$ وجود خواهد داشت که $a_3 < a_2$. اگر این روند بدون وقفه ادامه یابد، زنجیر نامتناهی

$$\ldots < a_n < a_{n-1} < a_{n-2} < \ldots < a_2 < a_1$$

را در Q به‌دست می‌آوریم که متناقض متناهی بودن Q است! **اگر Q نامتناهی باشد، چطور؟**

با استفاده از قضیه‌ی زیر به‌راحتی می‌توانستید به سؤال‌های بندهای **۲** و **۴** بالا پاسخ دهید، ولی مخصوصاً آن را قبلاً مطرح نکردیم تا سلول‌های خاکستری شما فعال‌تر شوند!

۹.۳.۳ قضیه

هر مجموعه‌ی خوش‌ترتیب $(P,\leq)$، زنجیر است (البته عکس آن درست نیست).

اثبات

بسیار ساده است. برای هر دو عضو $x, y \in P$، زیر مجموعه‌ی $Q = \{x, y\}$ از P را در نظر بگیرید و اثبات را کامل کنید. ■

این بخش را با معرفی مفاهیم **مهم** زیر، که در بسیاری از درس‌های علوم ریاضی به کار می‌روند، به پایان می‌بریم.

۱۰.۳.۳ تعریف

فرض کنیم $(P,\leq)$ مجموعه‌ای مرتب است و $Q \leq P$. در این صورت،

(الف) می‌گوییم که $u \in P$ (نه لزوماً $u \in Q$) یک **کران بالا** برای Q است اگر

$$(\forall x \in Q) x \leq u$$

(ب) می‌گوییم که $a \in P$ (نه لزوماً $a \in Q$) **سوپریمم** Q است اگر **کوچک‌ترین کران بالای** Q باشد؛ یعنی،

(یک) $a \in P$ یک کران بالای Q باشد، و

(دو) برای هر کران بالای Q چون $u \in P$، داشته باشیم $a \le u$.

با تجربه‌هایی که تاکنون به دست آوردید، حال **راحت‌تر** می‌توانید مفاهیم مجرد را درک کنید.

۱۱.۳.۳ بحث در کلاس

روشن است که Q ممکن است **هیچ**، **تنها یک**، یا **بیش از یک** کران بالا در P داشته باشد (در هر مورد مثالی بیاورید)، ولی یقیناً نمی‌تواند بیش از یک سوپریمم داشته باشد (البته اگر داشته باشد!). این مطلب را به روش اثبات قضیه‌ی **۳.۳.۳** اثبات کنید. از این رو، نمادگذاری زیر را معرفی می‌کنیم.

۱۲.۳.۳ نمادگذاری

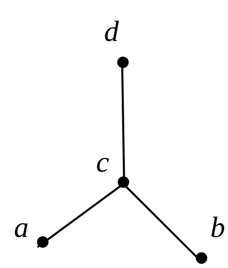
اگر سوپریمم Q در P وجود داشته باشد، می‌نویسیم

$$a = \sup_P Q = \mathrm{lub}_P Q = \vee_P Q$$

بحث زیر نشان می‌دهد که نوشتن **اندیس** P در نمادگذاری بالا گاهی مهم است. زیرا، سوپریمم Q در P_1 ممکن است با سوپریمم Q در P_2 متفاوت باشد. البته اگر در بحثی فقط سوپریمم در یک مجموعه‌ی مرتب P مورد نظر باشد، اندیس P را می‌توان حذف کرد. همچنین، مي نويسيم $\vee\{x, y\} = x \vee y$.

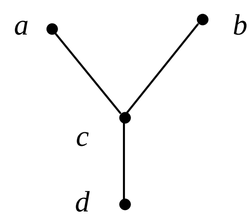
۱۳.۳.۳ بحث در کلاس

۱– نمودار ترتیبی زیر را در نظر بگیرید.



مجموعه‌ی کران‌های بالای $Q=\{a,b\}$ را در $P=\{a,b,c,d\}$ بنویسید و سپس $\sup_P Q$ را بیابید. حال مجموعه‌های کران‌های بالای Q را در $P'=\{a,b,d\}$ بنویسید و سپس $\sup_{P'} Q$ را بیابید.

۲- توجه کنید که $\sup_P Q$ ممکن است وجود نداشته باشد. برای مثال، در نمودار ترتیبی زیر، سوپریمم $\{a,b\}$ در $P=\{a,b,c,d\}$ وجود ندارد (**چرا؟**)



۳- توجه کنید که $\sup_P Q$ ممکن است در خود Q باشد. برای مثال در بند **۱**، سوپریمم $\{a,b\}$ را در $\{a,b,c,d\}$ بیابید.

۴- روشن است که اگر Q دارای بزرگ‌ترین عضو باشد، سوپریمم Q همان بزرگ‌ترین عضو آن است. ولی **نکته‌ی جالب** در این است که **حتی اگر** Q بزرگ‌ترین عضو **نداشته** باشد، Q می تواند در P سوپریمم **داشته** باشد. مثال بیاورید.

۵- با استفاده از مثال‌های بالا، مفهوم سوپریمم را با مفهوم عضو ماکسیمال مقایسه کنید.

۶- رابطه‌ی ترتیبی بخشپذیری را در $\mathbb{N}$ درنظر بگیرید و $\bigvee_{\mathbb{N}}\{۴,۶\}$ را بیابید.

آشنا است، نیست؟!

اگر چه مفهوم سوپریمم ابتدا در مجموعه‌ی اعداد حقیقی با ترتیب معمولی مطرح شد، ولی ما مخصوصاً ابتدا مثال‌های کلی دیگر را مطرح کردیم تا نظر شما را به کلی‌تر بودن این مفهوم جلب کنیم. مثال‌های بسیاری از این مفهوم را در دروس ریاضی عمومی دیده اید. مثال‌های زیر را نیز ببینید.

۱۴.۳.۳ بحث در کلاس

مجموعه‌ی مرتب معمولی اعداد حقیقی $(\mathbb{R},\leq)$ را در نظر بگیرید.

۱- ابتدا مجموعه‌های کران‌های بالای بازه‌های $(۰\,,۱)$ و $[۰\,,۱]$ را بنویسید و سپس $\sup_{\mathrm{R}}(۰\,,۱)$ و $\sup_{\mathrm{R}}[۰\,,۱]$ را بیابید.

۲- مجموعه‌ی کران‌های بالای $\mathbb{N}$ در $\mathbb{R}$ کدام است؟ آیا $\sup_{\mathbb{R}}\mathbb{N}$ وجود دارد؟

حدس می‌زنیم که بتوانید دوگان مفاهیم بالا، یعنی **کران پایین**، **اینفیمم** (**بزرگترین کران پایین**)، را به نمایش $\inf_{\mathrm{P}} \mathrm{Q} = \mathrm{glb}_{\mathrm{P}} \mathrm{Q} = \wedge_{\mathrm{p}} \mathrm{Q}$ (البته در صورت وجود)، خودتان تعریف کنید. مثال‌هایی از آن‌ها ارائه کنید. به عنوان **تکلیف شب** این کار را انجام دهید و نوشته‌های خود را به استاد حل تمرین درس تحویل دهید. در این مورد نیز می نویسیم و $\wedge\{x,y\} = x \wedge y$.

۱۵.۳.۳ بحث در کلاس

تلاش کنید به این سؤال سهل و ممتنع پاسخ دهید که: اگر $Q=\varnothing$ تهی باشد، آنگاه $\vee_P\varnothing$ و $\wedge_P\varnothing$ (در صورت وجود) چگونه عضوهایی از P هستند؟ البته، ابتدا باید مجموعه‌ی کران‌های بالا و مجموعه‌ی کران‌های پایین مجموعه‌ی تهی $\varnothing$ را مشخص کنید. مفهوم زیر را در فصل ۴ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱۶.۳.۳ تعریف

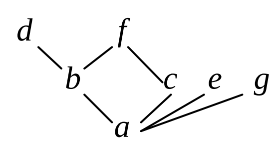
۱- مجموعه‌ی مرتب $(L;\leq)$ را **مشبکه** می‌نامیم اگر برای هر $x,y\in L$، $\sup\{x,y\}=x\vee y$ و $\inf\{x,y\}=x\wedge y$ در L وجود داشته باشند.

۲- مجموعه‌ی مرتب $(P,\leq)$ را که هر زیرمجموعه‌ی آن (تهی یا ناتهی) دارای **سوپریمم** و **اینفیمم** باشد، **کامل** می‌نامیم. توجه می کنیم که، $\vee_P\varnothing = ۰ = \perp$ و $\wedge_P\varnothing = ۱$.

تمرین ۳.۳

۱. زنجیری کراندار و نامتناهی مثال بزنید به طوری که هر عضو آن به جز کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو دارای مقدم باشد.

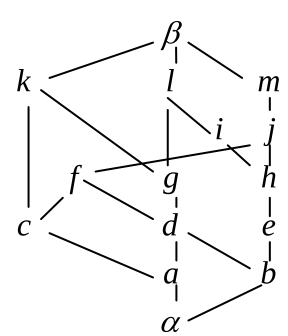
۲. نمودار ترتیبی زیر را در نظر بگیرید و سوپریمم و اینفیمم هر یک از مجموعه‌های $\{c\}$، $\{d,f\}$، $\{b,c\}$، $\{b,c,f\}$، $\{a,e\}$ را، در صورت وجود، مشخص کنید.



۳. نشان دهید که در هر **زنجیر**، هر دو عضو دارای سوپریمم و اینفیمم است.

۴. نمودار ترتیبی زیر را در نظر بگیرید. عضوهای زیر را، در صورت وجود، مشخص کنید.

$$j\wedge k,\quad j\wedge(l\wedge k),\quad (h\wedge l)\wedge k,\quad \vee\{c,d,e\},\quad c\vee(d\vee e),$$
$$d\vee e,\quad c\vee e,\quad (l\wedge e)\wedge k,\quad l\wedge e$$



۵. بند **(ب)** قضیه‌ی **۶.۳.۳** را اثبات کنید.

۶. بحث در کلاس **۸.۳.۳** را یک بار دیگر مطالعه کنید.

۷. آیا به سؤال بحث **۱۱.۳.۳** پاسخ دادید؟ سؤال **۲** بحث **۱۴.۳.۳** چطور؟

۸. حتماً به سؤال‌های پاراگراف زیر بحث **۱۴.۳.۳** پاسخ دادید!

۹. بحث **۱۵.۳.۳** جالب بود!

۱۰. حل کردن این تمرین هوشمندی و دقت بیشتری می‌طلبد! فرض کنید $(P,\le)$ مجموعه‌ای مرتب است. در این صورت،

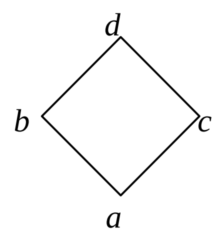
(الف) زیرمجموعه‌ی D از P را **ایدآل ترتیبی** (یا **زیرمجموعه‌ی پایینی**) می‌گوییم اگر برای هر $x\in D$ و هر $y\in P$،

$$y\le x \Rightarrow y\in D$$

(ب) زیرمجموعه‌ی U از P را **فیلتر ترتیبی** (یا **زیرمجموعه‌ی بالایی**) می‌گوییم اگر برای هر $x\in U$ و هر $y\in P$،

$$x\le y \Rightarrow y\in U$$

حال، مجموعه‌ی مرتب زیر را در نظر بگیرید:



(یک) از مجموعه‌های $\{a,b\}$، $\{c,d\}$، $\{b,c\}$، $\{a\}$، $\{d\}$، $\{a,b,c,d\}$، کدام ها ایدآل ترتیبی هستند؟ کدام ها فیلتر ترتیبی هستند؟ البته، برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

(دو) کمترین تعداد عضو به $\{c,d\}$ و $\{b,c\}$ بیفزایید و ایدآل‌های ترتیبی به دست آورید.

(سه) کمترین تعداد عضو به $\{a,b\}$ و $\{b,c\}$ بیفزایید و فیلتر ترتیبی به دست آورید.

۱۱. فرض کنید که $(P,\leq)$ مجموعه‌ای مرتب است و $Q\subseteq P$. نشان دهید که مجموعه‌ی

$$\downarrow Q=\{x\in P\,|\,\exists z\in Q, x\leq z\}$$

(یک) **ایدآل** ترتیبی **شامل** Q است، و

(دو) با این **دو** ویژگی بند (یک)، **کوچک‌ترین** است. یعنی اگر T نیز **ایدآل** ترتیبی **شامل** Q باشد، آنگاه $\downarrow Q\subseteq T$.

(سه) همچنین، نشان دهید که Q ایدآل ترتیبی است اگر و تنها اگر $Q=\downarrow Q$.

۱۲. دوگان تمرین **۱۱** به صورت زیر است. فرض کنید که $(P,\leq)$ مجموعه‌ای مرتب است و $Q\subseteq P$. نشان دهید که مجموعه‌ی $\uparrow Q=\{x\in P\,|\,\exists z\in Q, z\leq x\}$

(یک) **فیلتر** ترتیبی **شامل** Q است، و

(دو) با این **دو** ویژگی بند (یک)، **کوچک‌ترین** است. یعنی اگر T نیز **فیلتر** ترتیبی **شامل** Q باشد، آنگاه $\uparrow Q\subseteq T$.

(سه) همچنین، نشان دهید که Q فیلتر ترتیبی است اگر و تنها اگر $Q=\uparrow Q$.

۱۳. اگر $Q=\{x\}$ تک عضوی باشد، می نویسیم $\downarrow Q=\downarrow x$ و $\uparrow Q=\uparrow x$. در مجموعه‌ی مرتب تمرین **۱۰**، ایدآل ها و فیلتر های $\downarrow b$، $\downarrow d$، $\downarrow\{b,c\}$، $\uparrow b$، $\uparrow a$، $\uparrow\{b,c\}$ را مشخص کنید.

۱۴. فرض کنید $(P,\leq)$ مجموعه‌ای مرتب باشد و $x,y\in P$. نشان دهید که حکم‌های زیر معادل هستند.

(الف) $x\leq y$.

(ب) $\downarrow x \subseteq \downarrow y$.

(پ) برای هر ایدآل ترتیبی Q در P، اگر $y \in Q$ آنگاه $x \in P$.

۱۵. فرض کنیم $\mathrm{Id}P$ مجموعه‌ی ایدآل‌های ترتیبی مجموعه‌ی مرتب P باشد و $A, B \in \mathrm{Id}P$. نشان دهید که در مجموعه‌ی مرتب $(\mathrm{Id}P, \subseteq)$ داریم که ایدآل B پوشش ایدآل A است اگر و تنها اگر عضو مینیمالی چون b در $P \setminus A$ وجود داشته باشد به طوری که $B = A \cup \{b\}$.

فصل ۴

جبر بول و مدارها

در نیمه‌ی اول قرن نوزدهم میلادی، تلاش **جرج بول** برای مجردسازی و فرمول‌بندی **منطق گزاره‌ها** منجر به یافتن مفهومی شد که از آن پس **جبر بول** نامیده شد. این مفهوم چیست و چه ارتباطی با مجموعه‌ها، منطق، و مدارهای الکتریکی دارد؟

۱.۴ جبر بول

در این بخش بسیار کوتاه، جبر بول را معرفی می‌کنیم و ارتباط آن را با مجموعه‌ها و منطق می آوریم. در آغاز تعریف زیر را از فصل ۳ یادآوری می‌کنیم.

۱.۱.۴ تعریف

مجموعه‌ی مرتب $(L;\leq)$ را **مشبکه** می‌نامیم اگر برای هر $x,y\in L$، $\sup\{x,y\}$ و $\inf\{x,y\}$ در L وجود داشته باشند.

۲.۱.۴ بحث در کلاس

دو نمونه‌ی ۱ و ۲ زیر از نمونه‌های استانده‌ی مشبکه هستند.

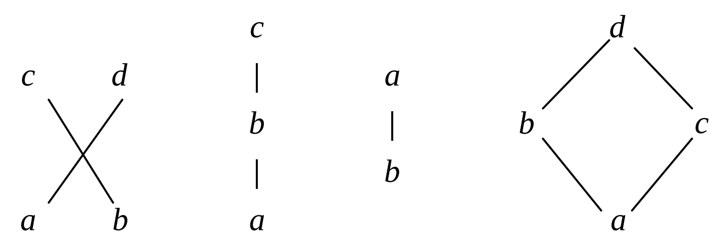
۱- مجموعه‌ی مرتب $(\mathcal{P}(X);\subseteq)$ را در نظر بگیرید. کدام قضیه و کدام بحث از بخش ۲.۲ گویای این مطالب هستند که برای هر $A, B \subseteq X$،

$$\inf\{A,B\} = A \cap B \quad \text{و} \quad \sup\{A,B\} = A \cup B$$

بنابراین، $(\mathcal{P}(X);\subseteq)$ مشبکه است، و در واقع مشبکه‌ای کامل است.

۲- نمونه‌ی استانده‌ی دیگر، مجموعه‌ی گزاره‌ها با رابطه‌ی ترتیبی $P \to Q$ برای $P \leq Q$ است. چندان مشکل نیست که نشان دهید $\sup\{P,Q\} = P \vee Q$ و $\inf\{P,Q\} = P \wedge Q$. از این رو، این مجموعه‌ی مرتب گزاره‌ها مشبکه است.

۳- از نمودارهای زیر، کدام‌ها معرف مشبکه هستند؟



(الف) (ب) (پ) (ت)

۴- از مجموعه‌های مرتب زیر، کدام‌ها معرف مشبکه هستند؟

(الف) مجموعه‌ی مرتب $(\mathbb{N};\leq)$.

(ب) مجموعه‌ی مرتب $(\mathbb{N};|)$، که در آن $m \mid n$ یعنی عدد m عدد n را در $\mathbb{N}$ بخش می‌کند.

(پ) مجموعه‌ی تابع‌های حقیقی مقدار همراه با رابطه‌ی ترتیبی

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) \leq g(x)$$

همان طور که در بحث ۲.۱.۴ گفتیم، استانده‌ترین مثال‌های مشبکه، یکی $(\mathcal{P}(X);\subseteq)$ و دیگری مجموعه‌ی گزاره‌ها با رابطه‌ی ترتیبی $P \to Q$ است. در این بخش، با یادآوری ویژگی‌های این دو نمونه‌ی استانده‌ی مشبکه از **فصل‌های ۱ و ۲**، به مرور به مشبکه‌ی مورد نظر جورج بول می‌رسیم.

با توجه به نمونه‌های استانده‌ی بالا، در هر مشبکه‌ی $(L;\leq)$ نمادگذاری‌های $\sup\{x,y\}=x\vee y$ و $\inf\{x,y\}=x\wedge y$ را در **۱۲.۳.۳** به کار بردیم. با این نمادگذاری‌ها، قضیه‌ی زیر همتای بندهایی از قضیه‌های **۱۳.۱.۱**، **۱۵.۱.۱**، **۳.۲.۲** و **۱۰.۲.۲** است.

۳.۱.۴ قضیه

فرض کنیم که $(L;\leq)$ **مشبکه** است. در این صورت،

(شرکت‌پذیری) $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$ و

$x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$.

(تعویض‌پذیری) $x\wedge y=y\wedge x$ و $x\vee y=y\vee x$.

(خودتوانی) $x\wedge x=x$ و $x\vee x=x$.

(جذب) $x=x\wedge(x\vee y)$ و $x=x\vee(x\wedge y)$.

نکته‌ی قابل توجه این است که، ویژگی‌های سوپریمم $\vee$ همتای ویژگی‌های اینفیمم $\wedge$ هستند. همچنین، **قوانین جذب** ارتباط بین این دو را بیان می‌کنند. قضیه‌ی زیر همتای قضیه‌های **۱۴.۱.۱** و **۵.۲.۲** است. برای اثبات آن، قوانین جذب را به کار ببرید.

۴.۱.۴ قضیه

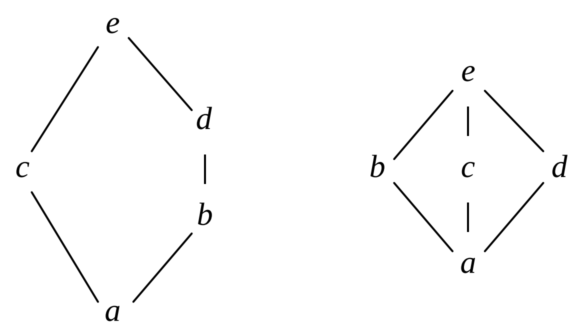
اگر $(L;\leq)$ مشبکه باشد، آنگاه

$$x\leq y \quad\Leftrightarrow\quad x\vee y=y\Leftrightarrow x\wedge y=x$$

۵.۱.۴ بحث در کلاس

۱– همان طور که قضیه‌های **۳.۱.۴** و **۴.۱.۴** نشان می دهند، هر مشبکه به خودی خود دارای ویژگی‌های بیان شده در این قضیه‌ها هستند. ولی، همتاهای گزاره‌های همیشه درست ۱ و همیشه نادرست ۰ و همتاهای مجموعه‌های تهی $\varnothing$ و مرجع M به خودی خود در هر مشبکه **وجود ندارند!!** البته، روشن است که اگر مشبکه‌ای کراندار، یعنی دارای کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو، باشد آنگاه، برای هر x، $x\vee ۰=x$ ، $x\wedge ۰=۰$، $x\vee ۱=۱$ و $x\wedge ۱=x$.

۲- نمونه‌های زیر نشان می‌دهند که ویژگی‌های **توزیع پذیری** آمده در بند**۲** قضیه‌های **۱۵.۱.۱** و **۱۰.۲.۲** نیز به خودی خود در هر مشبکه‌ی دلخواه **بر قرار نیستند!**



(ب) **(الف)**

مشاهده می‌کنیم که، در **(الف)** داریم $b \vee (c \wedge d) = b \vee a = b$ و $(b \vee c) \wedge (b \vee d) = e \wedge e = e$. اگر همین دو عبارت را در **(ب)** نیز محاسبه کنید، دو عضو متفاوت b و d را به دست می‌آورید. با توجه به این بحث، تعریف زیر را می‌آوریم.

۶.۱.۴ تعریف

مشبکه‌ی $(L; \vee, \wedge)$ را **توزیع‌پذیر** می‌گوییم اگر برای هر $x, y, z \in L$، دو شرط زیر برقرار باشند:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

۷.۱.۴ بحث در کلاس

۱- خوب است بدانیم که، یکی از معروف‌ترین و پرفایده‌ترین دسته از مشبکه‌ها که در پیشرفت این نظریه از هر دو جنبه‌ی نظری و کاربردی مفید هستند، مشبکه‌های توزیع‌پذیر هستند. این مشبکه‌ها از نظر تاریخی نیز قبل از مشبکه‌های کلی و پس از مفهوم **جبر بول** مطرح شدند.

۲- می‌توان نشان داد که اگی یکی از شرط‌های توزیع‌پذیری داده شده در تعریف **۶.۱.۴** برقرار باشد، دیگری نیز به خودی خود برقرار خواهد بود.

۳- بدون بیان جزییات، می توان نشان داد که اگر در مشبکه‌ای پنج عضو با سوپریمم و اینفیمم به یکی از صورت‌های نمونه‌ی **۲** در بحث **۵.۱.۴** بالا وجود داشته باشند، به یقین آن مشبکه **توزیع پذیر نیست!!**

۴- با توجه به بند **۲** قضیه‌های **۱۵.۱.۱** و **۱۰.۲.۲**، مشبکه‌های $(\mathcal{P}(X);\subseteq)$ و گزاره‌ها، که در بحث **۲.۱.۴** آوردیم، دو مثال استانده‌ی مشبکه‌ی **توزیع‌پذیر** هستند.

۵- آخرین ویژگی‌های مشبکه‌ی $(\mathcal{P}(X);\subseteq)$ و مشبکه‌ی گزاره ها، که مورد نظر **جورج بول** بودند، وجود متمم مجموعه‌ها و نقیض گزاره‌ها هستند. تعریف مجرد این مفهوم‌ها به صورت زیر هستند.

۸.۱.۴ تعریف

مشبکه‌ی $(B;\leq)$ را **جبر بول** می‌نامیم اگر:

۱ - مشبکه‌ی $(B;\leq)$ **کراندار** باشد. یعنی، دارای کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ۰ و ۱، باشد.

۲ - مشبکه‌ی $(B;\leq)$ **توزیع‌پذیر** باشد.

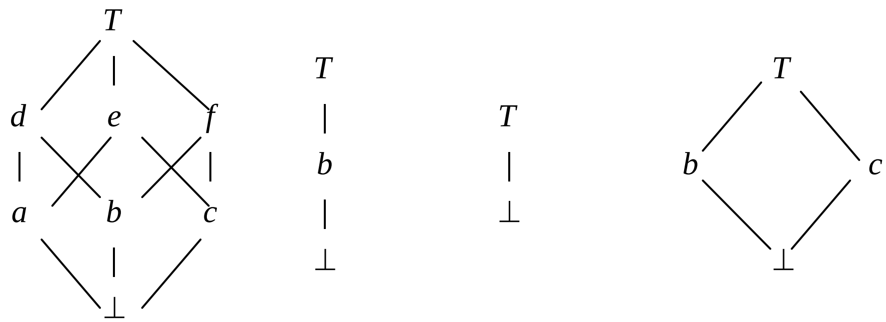
۳- برای هر $x\in B$، عضوی (الزاماً یکتا) به نمایش x' و به نام **متمم** x با ویژگی‌های زیر وجود داشته باشد

$$x\wedge x'=0 \quad , \quad x\vee x'=1$$

۹.۱.۴ بحث در کلاس

۱- از نمونه‌های اصلی و اولیه‌ی **جبر بول**، یکی مجموعه‌ی گزاره‌ها است که متمم گزاره ی P، یعنی P'، همان نقیض آن است، و دیگری $(\mathcal{P}(X);\subseteq)$ است که در آن متمم هر مجموعه‌ی $A\subseteq X$ است $A'=X\setminus A$.

۲- از مشبکه های توزیع پذیر و کراندار زیرکدام‌ها **جبر بول** هستند؟



(ت) (پ) (ب) (الف)

در زیر برخی از ویژگی های متمم را در جبرهای بول می‌آوریم. این ویژگی‌ها مجرد شده‌ی ویژگی‌های گزاره‌ها و مجموعه‌ها هستند.

۱′ = ۰.

۱۰.۱.۴ قضیه

گزاره‌های زیر در هر جبر بول برقرار هستند.

۱- ۱ = ′۰ و ۰ = ′۱.

۲- $x'' = (x')' = x$.

۳- $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

۴- $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

۵- $x \le y \Leftrightarrow y' \le x'$.

اثبات

حکم‌های ۳ و ۴ همان **قوانین دمورگان** هستند که در مورد گزاره‌ها و مجموعه‌ها نیز دیدیم. رابطه‌ی ۳ را به عنوان نمونه به اختصار اثبات می‌کنیم (جزییات استفاده از ویژگی‌ها و قضیه‌های مربوط به مشبکه‌ها و جبرهای بول را بنویسید).

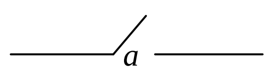
$$(x' \wedge y') \wedge (x \vee y) = [(x' \wedge y') \wedge x] \vee [(x' \wedge y') \wedge y]$$
$$= 0 \vee 0 = 0 \qquad \&$$
$$(x' \wedge y') \vee (x \vee y) = [(x' \wedge y') \vee x] \vee [(x' \wedge y') \vee y]$$
$$= [(x' \vee x) \wedge (y' \vee x)] \vee [(x' \vee y) \wedge (y' \vee y)]$$
$$= (y' \vee x) \vee (x' \vee y) = 1$$

۲.۴ مدارهای الکتریکی

از جمله مواردی که جبر بول کاربرد دارد، مدارهای الکتریکی (در مهندسی برق)، کنترل (در مهندسی مخابرات)، طراحی سیستم‌ها (در مهندسی کامپیوتر)، پل‌ها و درخت‌ها (در علوم کامپیوتر) است. در زیر مختصری در باره‌ی مدارها صحبت می‌کنیم.

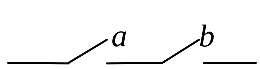
۱.۲.۴ مدارهای الکتریکی

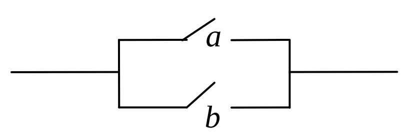
در دستگاه های الکتریکی، جریان برق توسط مدار های الکتریکی منتقل می شود. ساده ترین مدار، شامل یک کلید روشن- خاموش است.



روشن است که، در حالتی که کلید بسته باشد، جریان برق عبور می‌کند و در حالتی که کلید باز است، برق عبور نمی‌کند. این دو حالت را، به ترتیب، حالت ۱ و حالت ۰ می‌نامیم.

مدارهایی که از دو کلید تشکیل شده اند را می‌توان به دو صورت **سری** یا **موازی** بست:





(سری) (موازی)

حالت موازی همتای عبارت بولی $a \vee b$ و حالت سری همتای $a \wedge b$ است. زیرا اگر دست‌کم یکی از کلیدها بسته باشد، از مدار موازی جریان برق عبور می‌کند، و در حالت سری باید هر دو کلید بسته باشد. این مطالب را می توان در جدول زیر جمعبندی کرد:

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۰	۱	۰	۱
۰	۰	۰	۰

به بیان دیگر، جدول بالا توصیف منطقی جبر بول دو عضوی $\{۰, ۱\}$ است. چگونگی طراحی مدارها باید به گونه‌ای باشد که در عین حال که هدف مورد نظر را برآورده می‌کند، از کم‌ترین کلیدها استفاده شود. این مهم با استفاده از ویژگی‌های جبر بول انجام می‌شود! در بحث زیر شرکت کنید.

۲.۲.۴ بحث در کلاس

۱- سالنی دارای ۳ ورودی مجزا است. می‌خواهیم در کنار هر ورودی یک کلید برق قرار دهیم به گونه‌ای که چراغ اصلی سالن با هر یک از این ۳ کلید x، y، z روشن و خاموش شود. به علاوه، می‌خواهیم با هر تغییر وضعیت هر کلید وضعیت روشن یا خاموش چراغ اصلی تغییر کند. در این صورت، مدار مورد نظر S باید از جدول زیر پیروی کند:

x	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰
y	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰
z	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰

$$S \quad ۱ \quad ۰ \quad ۰ \quad ۰ \quad ۱ \quad ۱ \quad ۱ \quad ۰$$

در نتیجه:

$$S=(x\wedge y\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z)$$

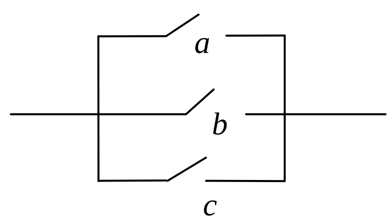
۲- مدار عبارت بولی

$$T=(a'\wedge c)\vee(a'\wedge b)\vee(a\wedge b\wedge c)\vee(b\wedge c)$$

را رسم کنید. ابتدا آن با استفاده از ویژگی‌های جبر بول ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} T &= [a'\wedge(b\vee c)]\vee(b\wedge c)=[a'\vee(b\wedge c)]\vee[(b\vee c)\vee(b\wedge c)] \\ &= a'\vee(b\wedge c)\vee(b\vee c)=a'\vee b\vee c \end{aligned}$$

پس مدار الکتریکی T باید به صورت زیر باشد:



فصل ۵

افراز و هم‌ارزی

همان‌طور که در فصل قبل دیدیم، مفهوم رابطه‌ی ترتیبی در واقع تعمیم و مجردسازی رابطه‌ی معمولی $\leq$ در اعداد است. در این فصل نوع دیگری از رابطه را مطرح می‌کنیم که تعمیم و **مجردسازی رابطه‌ی تساوی** است.

رابطه‌ی تساوی در واقع **یکی بودن**، **عین هم بودن**، **همان بودن** را تعبیر می‌کند. ولی بسیاری مواقع لازم است اشیای غیر یکسان را نیز به‌خاطر شباهت در برخی از ویژگی‌ها **یکسان در نظر بگیریم** و با این کار عضوهای یک مجموعه را **دسته بندی** کنیم. به عنوان نمونه، میوه فروش با وجودی که هر سیب با سیب دیگر متفاوت است، آن‌ها را یکسان در

نظر می‌گیرد و در یک جعبه قرار می‌دهد، گلابی‌ها را در جعبه‌ای دیگر، و ... حتی گاهی انواع سیب‌ها را برحسب رنگ یا محل پرورش آن‌ها **یکسان در نظر** می‌گیرد و آن‌ها را در جعبه های مجزا از هم دسته بندی می‌کند. شما نیز کتاب‌هایتان را در یک دسته قرار می‌دهید، لباس-هایتان را در دسته‌ای دیگر، ... و حتی کتاب‌هایتان را بر حسب موضوع ، لباس‌هایتان را بر حسب رنگ یا جنس، . . . ، یکسان در نظر می‌گیرید و دسته بندی می‌کنید.

ریاضی‌دانان نیز گاهی همه‌ی اعداد زوج یا همه‌ی اعداد مضرب پنج را یکسان در نظر می‌گیرند، یا مثلث‌ها را همنوع در نظر می‌گیرند.

رابطه‌ی هم‌ارزی همان یکسان در نظر گرفتن است!

همان‌طور که متوجه شدیم، **یکسان در نظر گرفتن** ارتباط نزدیکی با **دسته‌بندی** دارد. از این رو، قبل از ارائه‌ی **تعریف دقیق** و **ریاضی‌گونه‌ی** مفهوم رابطه‌ی هم‌ارزی، مفهوم ریاضی

دسته‌بندی کردن اعضای یک مجموعه را معرفی می‌کنیم.

۱.۵ افراز و رابطه‌ی هم‌ارزی

همان‌طور که گفتیم، عضوهای مجموعه‌ای مانند X را به گونه‌هایی متنوع می‌توان به **خانه**هایی **دسته‌بندی** کرد. دسته بندی‌ای را که هر خانه‌ی آن ناتهی و هر عضو X دقیقاً در یک خانه قرار گیرد، **افراز** می‌نامیم. با نمادهای ریاضی، تعریف زیر را داریم.

۱.۱.۵ تعریف

مجموعه‌ی $\wp$ متشکل از زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی X را یک **افراز** X می‌گوییم اگر دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱- هر عضو $\wp$ **ناتهی** باشد. یعنی،

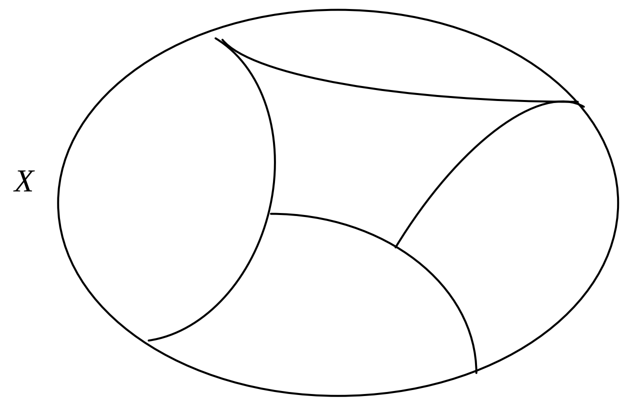
$$\forall C \in \wp \ , \quad C \neq \varnothing$$

۲- عضوهای $\wp$ **دو به دو مجزا** باشند. یعنی،

$$\forall C, D \in \wp,\ \ C \neq D \Rightarrow C \cap D = \varnothing$$

۳- $\bigcup \wp = X$. یعنی،

$$\forall x \in X,\ \ \exists C \in \wp,\ \ x \in C$$



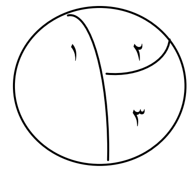
افرازی از X

توجه می‌کنیم که اگر هر عضو $\wp$ را **خانه** بنامیم، آنگاه **(پ)** همراه با **(ب)** بیان می‌کند که **هر عضو X دقیقاً در یک خانه** است. **نکته**ی دیگری که لازم است مورد توجه قرار گیرد، این است که دو واژه‌ی **مجزا** و **متمایز** متفاوت هستند و گاهی مبتدیان این دو را یکسان می‌انگارند. در واقع مجزا یعنی $C \cap D = \varnothing$، در حالی که متمایز یعنی $C \neq D$. مثالی از دو مجموعه‌ی متمایز بیاورید که مجزا نباشند.

۲.۱.۵ بحث در کلاس

۱- مجموعه‌ی $X = \{۱, ۲\}$ را تنها به دو صورت متفاوت می‌توان افراز کرد. آن‌ها را مشخص کنید.

۲- مجموعه‌ی سه عضوی $X = \{۱, ۲, ۳\}$ را به پنج صورت می‌توان افراز کرد. برای مثال،

$\{\{۱\},\{۲\},\{۳\}\} =$ 

یک افراز X است. چهار افراز دیگر X را بنویسید و با نمودار نشان دهید.

۳- تعداد افرازهای متفاوت یک مجموعه‌ی n عضوی X را عدد n-ام **بِل** (Bell) می‌نامند و با B_n نمایش می‌دهند. با دانستن تعداد افرازهای مجموعه‌های ۱،۲، . . .،n عضوی می‌توان تعداد افرازهای مجموعه‌ی $n+۱$ عضوی را به صورت زیر پیدا کرد:

$$B_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

$$= 1 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \ldots + \binom{n}{n} B_n$$

که در آن $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k!)}$.

برای مثال، چون $B_۱ = ۱$، $B_۲ = ۲$، پس $B_۳ = ۵$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$B_۳ = ۱ + \binom{۲}{۱} B_۱ + \binom{۲}{۲} B_۲$$

$$= ۱ + ۲ + ۲ = ۵$$

حال، تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی ۴ عضوی را بیابید، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید که تعداد افرازهای هر مجموعه‌ی n عضوی را بیابد!

در اینجا رابطه‌ی هم‌ارزی را به طور رسمی معرفی و سپس ارتباط دقیق آن را با افراز بیان می‌کنیم. با نگاهی دقیق‌تر به ویژگی‌های رابطه‌ی تساوی، تعریف مجرد زیر را می‌آوریم که **تعمیمی** از رابطه‌ی تساوی است.

۳.۱.۵ تعریف

رابطه‌ی E روی مجموعه‌ی A را **رابطه‌ی هم‌ارزی** می‌گوییم اگر **انعکاسی** (aEa)، **تقارنی** $(aEb \Rightarrow bEa)$، و **متعدی** $(aEb \,\&\, bEc \Rightarrow aEc)$ باشد.

مشاهده می‌کنیم که به‌جای ویژگی **پادتقارنی** $(x \le y \,\&\, y \le x \Rightarrow x = y)$ که برای رابطه‌ی ترتیبی قایل شدیم، ویژگی **تقارنی** را برای رابطه‌ی هم‌ارزی در نظر گرفتیم. حال با شرکت در بحث زیر، دریافت خود را از تعریف این مفهوم مجرد تقویت کنید.

۴.۱.۵ بحث در کلاس

۱- فرض کنید $A = \{۱, ۲\}$. روشن است که یکی از رابطه‌های هم‌ارزی روی A، رابطه‌ی تساوی $\Delta_A = \{(۱, ۱), (۲, ۲)\}$ است، که در آن ویژگی‌های تقارنی و تعدی به اصطلاح **به انتفای مقدم** برقرارند. تنها یک رابطه‌ی هم‌ارزی دیگر روی A وجود دارد. آن را مشخص کنید.

۲- نشان دهید که برای هر مجموعه‌ی دلخواه A رابطه‌های Δ_A و ∇_A رابطه‌هایی هم‌ارزی هستند. آیا رابطه‌ی $\varnothing \subseteq A \times A$ نیز هم‌ارزی است؟

۳- فرض کنید $A \ne \varnothing$ و $\mathcal{E}$ مجموعه‌ی همه‌ی رابطه‌های هم‌ارزی روی A باشد. روشن است که $(\mathcal{E}, \subseteq)$ مجموعه‌ای مرتب است. **کوچک‌ترین** و **بزرگ‌ترین** عضو آن را مشخص کنید.

۴- آیا رابطه‌ی بخش‌پذیری روی $\mathbb{N}$ رابطه‌ای هم‌ارزی است؟ **مراقب ویژگی تقارنی باشید.**

۵- نشان دهید که رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی n، با نماد $\equiv_n$، در $\mathbb{Z}$ رابطه‌ای هم‌ارزی است. این رابطه‌ی هم‌ارزی، به ویژه در نظریه‌ی اعداد، بسیار مفید است.

۵.۱.۵ نمادگذاری

همان‌طور که در مورد رابطه‌ی ترتیبی بیان شد، اگر نماد مشخصی، از قبیل $=$ یا $\equiv_n$ ، برای نمایش رابطه‌ی هم‌ارزی وجود نداشته باشد، معمولاً نماد $\sim$ (**تیلدا**) را به جای حرفی لاتین چون E به‌کار می‌بریم.

۶.۱.۵ بحث در کلاس

۱- **آیا** رابطه‌ی همنهشتی (تساوی) مثلث‌ها رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعه‌ی مثلث‌ها است؟ رابطه‌ی تشابه مثلث‌ها **چطور**؟

۲- آیا رابطه‌ی موازی بودن روی مجموعه‌ی خط‌ها هم‌ارزی است؟ عمود بودن **چطور**؟

۳- فرض کنید $\wp$ افرازی از مجموعه‌ی A باشد. آیا عبارت **هم‌خانه بودن** در $\wp$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است؟

به آسانی می‌توانیم **احساس کنیم** که هر رابطه‌ی هم‌ارزی روی A، مجموعه‌ی A را به خانه‌های مجزا افراز می‌کند. ولی بحث را به‌صورت **دقیق‌تر** زیر با معرفی نمادهایی که به کرات استفاده می‌شوند، پی می‌گیریم.

۷.۱.۵ تعریف

اگر $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعه‌ی A باشد و $x \in A$ ، آنگاه مجموعه‌ی $\{y \in A \mid x \sim y\}$

متشکل از همه‌ی اعضای A را که با x در رابطه‌ی $\sim$ هستند، **رده**، دسته، کلاس، یا **خانه‌ی** x نسبت به $\sim$ می‌نامیم و آن را با نمادهایی چون $[x]_\sim$ یا $\bar{x}_\sim$ نشان می‌دهیم.

مجموعه‌ی همه‌ی رده‌های $\sim$ را با $A/\sim$ یا $\bar{A}_\sim$ نشان می‌دهیم و آن را **مجموعه‌ی خارج قسمت** A تحت $\sim$ می نامیم. پس

$$A/\sim = \{[x]_\sim \mid x \in A\}$$

از آنجا که رده‌ی x تحت رابطه‌های هم‌ارزی متفاوت، ممکن است متفاوت باشد، اندیس ~ را به کار بردیم. البته اگر در بحثی تنها یک رابطه‌ی هم‌ارزی ~ مطرح باشد، می‌توان اندیس ~ را حذف کرد و مثلاً به‌جای $[x]_\sim$ نماد $[x]$ را به کار برد.

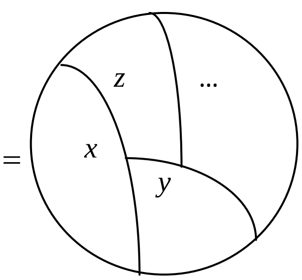
۸.۱.۵ بحث در کلاس

۱- دلیلی بیاورید که نشان دهد برای هر $x \in A$، $x \in [x]$.

۲- ثابت کنید که اگر $[x] = [y]$ آنگاه $x \sim y$.

۳- روشن است که اگر ~ رابطه‌ی تساوی = روی A باشد، آنگاه هر رده‌ی آن مجموعه‌ای تک عضوی است و در نتیجه

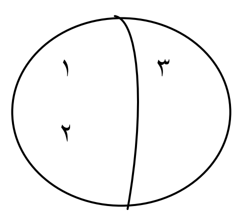
$$(A/=) = \{\{a\} | a \in A\} =$$



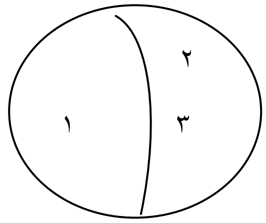
حال مجموعه‌ی خارج قسمتی A/∇_A را مشخص کنید.

۴- اگر رابطه‌ی هم‌ارزی $E = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۲),(۲,۱)\}$ را روی $A = \{۱,۲,۳\}$ در نظر بگیریم، آنگاه

$$A/E = \{\{۱,۲\},\{۳\}\} =$$



رابطه‌ای هم‌ارزی‌ای بنویسید که A را به صورت زیر افراز کند.



۵- رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی۲، با نماد $\equiv_2$، را روی $\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید. در این صورت

$$[0]=\{m\in\mathbb{Z} \mid 0\equiv_2 m\}$$
$$=\{m\in\mathbb{Z} \mid 2 \mid m\}$$
$$=\{m\in\mathbb{Z} \mid m=2k, k\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{2k \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

$$[1]=\{m\in\mathbb{Z} \mid 1\equiv_2 m\}$$
$$=\{m\in\mathbb{Z} \mid 2 \mid m-1\}$$
$$=\{m\in\mathbb{Z} \mid m-1=2k, k\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{2k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\}$$
$$[2]=\{m\in\mathbb{Z} \mid 2\equiv_2 m\}$$

$$= \{m \in \mathbb{Z} \mid ۲ \mid m - ۲\}$$

$$= \{m \in \mathbb{Z} \mid m - ۲ = ۲l, l \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{m \in \mathbb{Z} \mid m = ۲(l + ۱), l \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{۲k \mid k \in \mathbb{Z}\} = [۰]$$

اگر این روند را با ۴،۳، . . . و ۱-،۲-، . . . ادامه دهیم، خواهیم دید که $\mathbb{Z}/\equiv_۲$ تنها دو عضو دارد: $[۰]$ و $[۱]$. حدس بزنید که $\mathbb{Z}/\equiv_n$ دارای چند رده است و ردهٔ $[۰]$ را نسبت به $\equiv_n$ بیابید.

بند **۵** بالا را به کمک لم زیر راحت‌تر می‌توان انجام داد. اثبات این لم بسیار آسان است، ولی جزئیات آن‌را برای آموزش می‌آوریم.

۹.۱.۵ لم

فرض کنیم $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است. در این صورت برای هر $x, y \in A$، داریم

$$[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$$

اثبات

برای اثبات این حکم باید از ویژگی‌های انعکاسی، تقارنی، و تعدی استفاده کنیم (**نه با سوگند خوردن!**). این حکم گزاره‌ای دو طرفه است:

۱- $[x] = [y] \Rightarrow x \sim y$

۲- $x \sim y \Rightarrow [x] = [y]$

که باید هر دو را اثبات کنیم.

۱– اثبات ساده‌ی این حکم را احتمالاً توانستید در بند **۲** بحث بالا ارائه دهید! اگر نتوانستید، شاید باید بیشتر تلاش کنید تا از داده‌ها به خوبی بهره بگیرید (**زندگی نیز چنین است**). فرض کنیم $[x]=[y]$. بنابر انعکاسی بودن رابطه‌های هم‌ارزی، داریم $x\sim x$ و در نتیجه $x\in[x]$ و بنابراین $x\in[y]$، یعنی $x\sim y$.

۲– اثبات این حکم قدری فنی‌تراست! فرض کنیم $x\sim y$. می‌خواهیم نشان دهیم که دو مجموعه‌ی $[x]$و$[y]$ برابرند، یعنی $[x]\subseteq[y]$ و $[y]\subseteq[x]$. برای اثبات $[x]\subseteq[y]$، فرض می‌کنیم که $z\in[x]$. پس $z\sim x$. حال از $z\sim x$ و فرض $x\sim y$ و ویژگی تعدی رابطه‌های هم‌ارزی، نتیجه می‌گیریم که $z\sim y$ و در نتیجه، $z\in[y]$. برای اثبات $[y]\subseteq[x]$، فرض می‌کنیم $z\in[y]$. پس $z\sim y$. حال، از $z\sim y$ و فرض $x\sim y$ **چطور** نتیجه می‌گیرید که $z\sim x$ و در نتیجه $z\in[x]$؟ ■

قبل از تعریف **۷.۱.۵**، احساس کردیم که هر رابطه‌ی هم‌ارزی روی A، مجموعه‌ی A را افراز می‌کند و مثال‌ها نیز این احساس را تقویت کردند. قضیه‌ی زیر درستی این احساس را **اثبات می‌کند**.

> **۱۰.۱.۵ قضیه**
>
> *فرض کنیم $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی Aاست. در این صورت مجموعه‌ی $A/\sim$ افراز Aاست.*

اثبات

باید درستی سه شرط تعریف **۱.۱.۵** را نشان دهیم.

(الف) برای هر $x\in A$، $[x]\neq\emptyset$: قبلاً ثابت کرده‌ایم (**کجا؟**)

(پ) $\bigcup(A/\sim)=A$: یعنی هر $x\in A$ در یک خانه است. عضو x در کدام خانه است؟

(ب) مجموعه‌های متعلق به $A/\sim$ دو به دو مجزا هستند: اثبات این قسمت قدری فنی‌تر است. همان‌طور که در بند **(ب)** تعریف **۱.۱.۵** آمد، باید ثابت کنیم که اگر $[x]\neq[y]$، آنگاه $[x]\cap[y]=\varnothing$. از نامساوی بودن $[x]$ و $[y]$ چه نتیجه می‌گیرید؟ **درست است:** دست‌کم یکی از دو حا لت زیر باید رخ دهد:

۱- عضوی چون z در $[x]$ هست که در $[y]$ نیست. یعنی، $x\sim z$ ولی $y\nsim z$.

۲. عضوی چون z' در $[y]$ هست که در $[x]$ نیست. یعنی، $y\sim z'$ ولی $x\nsim z'$.

برای اثبات تهی بودن $[x]\cap[y]$، فرض **خلف** $t\in[x]\cap[y]$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که هیچ یک از دو حالت **۱** و **۲** بالا رخ نمی‌دهد. لذا به **تناقض** می‌رسیم.

فرض خلف ایجاب می کند که $x\sim t$ و $y\sim t$ (**چرا؟**) حال اگر حالت **۱** بالا رخ دهد، از $x\sim t$ و $x\sim z$ نتیجه می‌گیریم که $z\sim t$(**چطور؟**) و سپس از $z\sim t$ و $y\sim t$ نتیجه می‌گیریم که $y\sim z$(**چرا؟**) که متناقض با $y\nsim z$ است و در نتیجه حالت **۱** رخ نمی‌دهد. دقیقاً به همین روش حالت **۲** را نقض می‌کنیم، و اثبات کامل می‌شود. ■

ممکن است بتوان اثبات را خلاصه‌تر نوشت، ولی **آیا** هیچ قسمتی از آن را می‌توان حذف کرد؟!

این قضیه نشان می‌دهد که هر رابطه‌ی هم‌ارزی روی A، افرازی از A به دست می‌دهد. آیا عکس آن نیز درست است؟ یعنی **آیا** هر افراز A رابطه‌ای هم‌ارزی روی A به دست مـی‌دهـد؟ **قضیه‌ی زیر را ببینید!**

۱۱.۱.۵ قضیه

اگر $\wp$ افرازی از A باشد، آنگاه رابطه‌ی $\approx$ با تعریف زیر رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است.

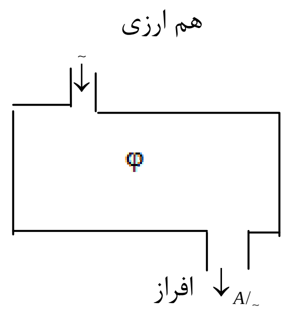
$$x\approx y \Leftrightarrow \exists C\in\wp,\quad x,y\in C$$

اثبات

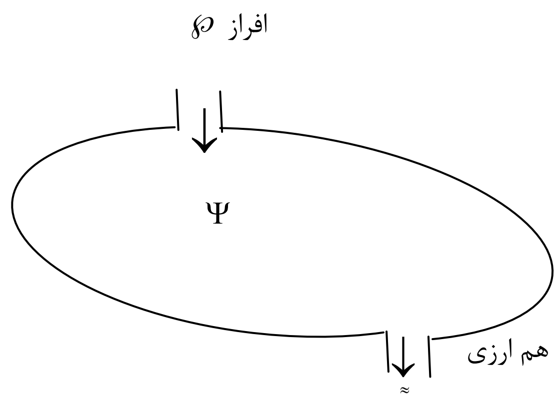
این قضیه دقیقاً همان بند **۳** بحث در کلاس **۶.۱.۵** است که اثباتی بدیهی داشت. مجدداً ثابت کنید که رابطه‌ی $\approx$ **انعکاسی**، **تقارنی**، و **متعدی** است.

۱۲.۱.۵ جمع‌بندی

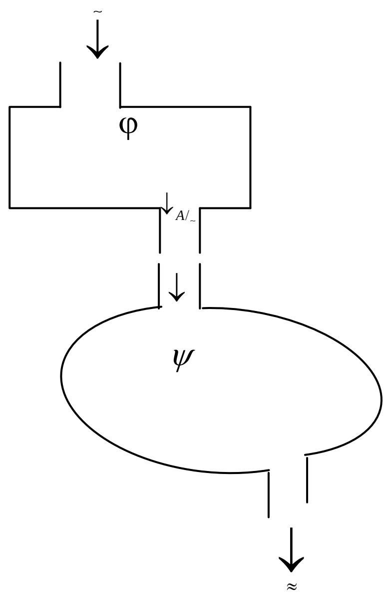
در قضیه‌ی **۱۰.۱.۵** دیدیم که دستگاهی وجود دارد که از هر رابطه‌ی هم‌ارزی یک افراز می‌سازد:

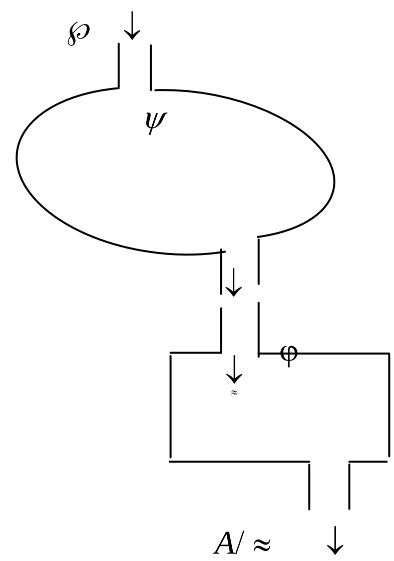


و قضیه‌ی **۱۱.۱.۵** دستگاهی را مطرح می‌کند که از هر افراز، رابطه‌ای هم‌ارزی می‌سازد:



این دو دستگاه را به دو صورت زیر می‌توانیم به یکدیگر متصل کنیم:





دو سؤال زیر مطرح می‌شوند:

(الف) آیا $\approx$ همان $\sim$ است؟

(ب) آیا $A/\approx$ همان $\wp$ است؟

قضیه‌ی بسیار جالب زیر نشان می‌دهد که **پاسخ** به هر دو سؤال **مثبت** است !

۱۳.۱.۵ قضیه

۱– *اگر $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی دلخواه روی A و $\approx$ رابطه‌ی هم‌ارزی حاصل از افراز $A/\sim$ باشد (قضیه‌ی* ***۱۰.۱.۵****)، آنگاه $\sim=\approx$.*

۲– *اگر $\wp$ افرازی دلخواه از A و $\approx$ رابطه‌ی هم‌ارزی حاصل از $\wp$ باشد (قضیه‌ی* ***۱۱.۱.۵****)، آنگاه $\wp=(A/\approx)$.*

اثبات

۱- برای اثبات $\sim = \approx$، باید نشان دهیم که $(x \approx y \Leftrightarrow x \sim y)$. حال دلیل هر مرحله از اثبات زیر را بنویسید.

$$\begin{aligned} x \approx y &\Leftrightarrow \exists C \in A/\sim, \quad x, y \in C \\ &\Leftrightarrow \exists a \in A, C = [a]_{\sim} \quad x, y \in [a]_{\sim} \\ &\Leftrightarrow x \sim y \end{aligned}$$

۲- باید نشان دهیم که

$$(C \in \wp \Rightarrow C \in A/\sim) \quad \& \quad ([a] \in A/\sim \Rightarrow [a] \in \wp)$$

نقطه چین‌ها و علامت سؤال‌ها را کامل کنید.

(الف) فرض کنیم $C \in \wp$. چون . . . ، $x \in C$، وجود دارد. ادعا می‌کنیم که $C = [x]_{\approx}$. حال

$$\begin{aligned} y \in [x]_{\approx} &\Rightarrow x \approx y \\ &\Rightarrow \exists B \in \wp, \quad x, y \in B \qquad (\text{بنابر تعریف...}) \\ &\Rightarrow y \in B = C \qquad (\text{بنابر تعریف...}) \end{aligned}$$

پس $[x]_{\approx} \subseteq C$. از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} y \in C \quad &\Rightarrow x, y \in C \qquad (???) \\ &\Rightarrow x \approx y \qquad (???) \\ &\Rightarrow y \in [x]_{\approx} \end{aligned}$$

پس $C \subseteq [x]_{\approx}$. در نتیجه، $\wp \subseteq (A/\approx)$.

برعکس، فرض کنیم $[x]_{\approx} \in (A/\approx)$. چون . . . ، $C \in \wp$ وجود دارد به طوری که $x \in C$. ادعا می کنیم که $[x]_{\approx} = C$. داریم

$$
\begin{aligned}
y \in [x]_{\approx} &\Rightarrow x \approx y \\
&\Rightarrow \exists B, \quad x, y \in B && (???) \\
&\Rightarrow C = B && (???) \\
&\Rightarrow y \in C
\end{aligned}
$$

پس $[x]_{\approx} \subseteq C$. از طرف دیگر،

$$
\begin{aligned}
y \in C &\Rightarrow x, y \in C && (???) \\
&\Rightarrow x \approx y && (???) \\
&\Rightarrow y \in [x]_{\approx}
\end{aligned}
$$

پس $C \subseteq [x]_{\approx}$. در نتیجه، $(A/\approx) \subseteq \wp$ و بنابر این، $(A/\approx) = \wp$. ■

تمرین ۱.۵

۱. نشان دهید که هر مجموعه‌ی چهار عضوی دقیقاً به ۱۵ صورت افراز می‌شود.

۲. فرض کنید $A = \{a, b, c\}$.

(الف) تعدادی رابطه روی A بنویسید.

(ب) تعدادی رابطه‌ی هم ارزی روی A بنویسید.

(پ) تعدادی رابطه روی A بنویسید به طوری که انعکاسی باشند ولی متقارن و متعدی نباشند.

(ت) تعدادی رابطه روی A بنویسید به طوری که متقارن باشند ولی انعکاسی و متعدی نباشند.

(ث) تعدادی رابطه روی A بنویسید به طوری که متعدی باشند ولی انعکاسی و متقارن نباشند.

(ج) تعدادی رابطه روی A بنویسید به طوری که نه متعدی، نه انعکاسی، نه متقارن، و نه پاد متقارن باشند.

۳. برای هر عدد حقیقی x، فرض کنیم $[\![x]\!]$ نشان دهنده‌ی **جزء صحیح** x، یعنی، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از یا مساوی با x است. نشان دهید که رابطه‌ی زیر روی $\mathbb{R}$ هم‌ارزی است و رده های این هم ارزی را مشخص کنید:

$$x \sim y \Leftrightarrow [\![x]\!] = [\![y]\!]$$

۴. نشان دهید که رابطه‌ی زیر روی $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ هم‌ارزی است (**عمل تفریق را به کار نبرید**):

$$(m,n) \sim (r,s) \Leftrightarrow m+s = n+r$$

۵. نشان دهید که رابطه‌ی زیر روی $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{\circ\})$ هم‌ارزی است (**عمل تقسیم را به کار نبرید**):

۶. فرض کنید $\sim$ رابطه‌ای هم ارزی روی مجموعه‌ی ناتهی A است. نشان دهید که زیر مجموعه‌ی ناتهی C از A یک رده‌ی هم‌ارزی $\sim$ است اگر و تنها اگر

$$(\exists y \in C) \quad (z \in C \Leftrightarrow y \sim z)$$

۷. نشان دهید که اشتراک هر خانواده از رابطه‌های هم‌ارزی روی مجموعه‌ی A رابطه‌ای هم-ارزی روی A است.

۸. درستی حکم **۱** قضیه‌ی **۱۳.۱.۵** را برای رابطه‌ی هم‌ارزی زیر روی مجموعه‌ی $X = \{a,b,c,d\}$ تحقیق کنید:

$$\sim = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}$$

۹. فرض کنید $X = \{a,b,c,d,e\}$ و $\wp = \{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$. درستی حکم **۲** قضیه‌ی **۱۳.۱.۵** را برای این مثال تحقیق کنید.

فصل ۶

تابع

آخرین حالت خاص مفهوم رابطه که در این کتاب مطرح می‌کنیم، **تابع** نام دارد. تابع یکی از **اساسی‌ترین** و مهم‌ترین مفاهیم و ابزارها در سراسر ریاضـیات و کاربردهـای آن است. اغراق آمیز نیست اگر بگـوییم کـه تقریبـاً هـر مطلبـی کـه در **علــوم ریاضــی** و کاربردهای آن‌ها خواهیم دید به گونه‌ای با این مفهوم سر و کار دارد.

به بیان ساده، **تابع** دستگاهی است کـه بـه هـر ورودی، یـک و دقیقـاً یـک خروجـی منسوب می‌کند. با این مفهوم حتی بیش از دو مفهوم رابطه‌های ترتیبـی و هـم‌ارزی آشـنا هستید. به ویژه توابع بسیاری دیده‌اید که ورودی و خروجی آن‌هـا اعـداد حقیقـی هسـتند. پس مطابق معمول این کتاب (درس **مبانی علوم ریاضی**)، به مناسـبت یـادآوری ایـن مفهوم ، دانسته هایمان را عمیق‌تر و

مجرد اندیشیدن را تقویت کنیم! **مجرد اندیشیدن را تقویت کنیم!**

۱.۶ تابع

در این بخش ابتدا تعریف رسمی تابع را یادآوری و سپس برخی از مفاهیم مرتبط با آن را مطرح می‌کنیم.

۱.۱.۶ تعریف

رابطه‌ی F از A به B، یعنی $F \subseteq A \times B$، را **تابع** می‌نامیم اگر هر عضو A مؤلفه‌ی اول دقیقاً یک عضو F باشد. یعنی،

(۱) $(\forall x \in A)(\exists y \in B),\ \ (x,y) \in F$

(۲) $(x,y_1),(x,y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2$

معمولاً، نه لزوماً، حروف کوچک را برای نمادگذاری توابع به کار می‌بریم و اگر رابطه‌ی $f \subseteq A \times B$ تابع باشد، و تنها در این صورت، می‌نویسیم

$$f : A \to B \quad \text{یا} \quad A \xrightarrow{f} B$$

۲.۱.۶ بحث در کلاس

اگر سؤالی از **قبل** درباره‌ی این تعریف دارید، با همکلاسی‌هایتان به بحث بگذارید. برای مثال گاهی می‌پرسید که

۱- **آیا** می‌توان شرط **۱** یا **۲** را **قایل نشد؟** مثل این است که بپرسیم، آیا می‌توان پشتی برای صندلی قایل نشد؟ البته که می‌شود! برخی آن‌را همان صندلی و برخی دیگر **چهار پایه** می‌نامند **نه صندلی!**

۲- **آیا** می‌توان **شرط سومی** به تعریف تابع افزود؟ مثل این است که بپرسیم، آیا می توان دسته برای صندلی قایل شد؟ البته که می‌شود! معمولاً آن را **صندلی دسته‌دار** می‌نامند! (**این حالت را بسیار خواهیم دید.**)

۳- فرض کنید $A = \{a,b\}$ و $B = \{۱,۲,۳\}$.

(الف) رابطه‌ی $\{(a\ ,۱),(b\ ,۱)\}$ تابعی (با هر دو شرط **۱** و **۲**) از A به B است. یک مثال دیگر شما بنویسید.

(ب) رابطه‌ی $\{(a\ ,۲)\}$ کدام شرط **۱** یا **۲** تابع را ندارد؟

(پ) رابطه‌ی $\{(a\ ,۱),(b\ ,۲)\ ,(b\ ,۳)\}$ در کدام شرط صدق نمی‌کند؟

(ت) رابطه‌ای از A به B بنویسیدکه در شرط **۱** صدق کند ولی دارای ویژگی **۲** نباشد. رابطه‌ای نیز از A به B بنویسید که در شرط **۱** صدق نکند ولی ویژگی **۲** را داشته باشد.

۳.۱.۶ تذکر

رابطه‌ای را از A به B که در شرط **۱** تابع صدق نکند ولی دارای ویژگی **۲** تابع باشد، **تابع جزئی** می‌نامند و آن‌را با نمادگذاری $f : A -\circ\rightarrow B$ نشان می‌دهند. اگر رابطه‌ای از A به B در شرط **۱** صدق کند ولی در شرط **۲** صدق نکند، مثلاً هر سه زوج $(a\ ,۱)$، $(a\ ,۲)$، $(a\ ,۳)$ متعلق به آن باشند، آن را **تابع چند مقداری** می‌نامند. این نوع توابع با پسوندهای **جزئی** یا **چند مقداری** در علوم ریاضی، به ویژه در علوم نظری کامپیوتر، بسیار مطرح می‌شوند.

توجه کنید که اکثر ریاضی‌دانان، از جمله ما در این کتاب، هر دو شرط **۱** و **۲** را برای تابع قایل می‌شویم و اگر غیر از این باشد، آن را مانند بالا با **پسوند** مشخص می‌کنیم. گونه‌های دیگر **تابع با پسوند** را به مرور خواهیم دید.

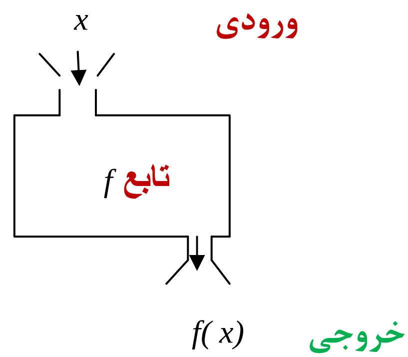
حال چند نماد و واژه را یادآوری می‌کنیم.

۴.۱.۶ تعریف و نماد گذاری

فرض کنیم $f : A\rightarrow B$ تابع باشد.

۱- برای هر $x\in A$، عضو منحصر به فرد $y\in B$ را که $(x,y)\in f$، **نگاره‌ی** x (یا **خروجی** حاصل از ورودی x) تحت f، و x را **پیش‌نگاره‌ی** y می نامیم. معمولاً y را با $f(x)$ (یا گاهی xf) نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$x\mapsto y \qquad , \quad x\mapsto f(x) \quad , \quad y=f(x)$$



۲- مجموعه‌ی A را **دامنه** یا **ورودی** و B را **همدامنه‌ی** f می‌نامیم و، به ترتیب، با $Domf$ و $Codf$ نشان می‌دهیم.

۳- مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم اعضای f را **نگاره** (**برد**، **تصویر** یا **خروجی**) f می‌نامیم و با نمادهایی چون $f\left(A\right)$، $Rng\ f$، $\mathrm{Im}\ f$ نشان می‌دهیم.

۵.۱.۶ بحث در کلاس

۱- عبارت‌های زیر را کامل کنید:

$$\mathrm{Im}\ f = \left\{ y \in B \middle| \quad \cdots \quad \right\}$$
$$= \left\{ f\left(x\right) \middle| \ \cdots \ \right\}$$

۲- با استفاده از نمادگذاری $y = f\left(x\right)$، شرایط ۱ و ۲ تعریف تابع را بازنویسی کنید:

(۱) $\left(\forall x \in A\right)\ldots$

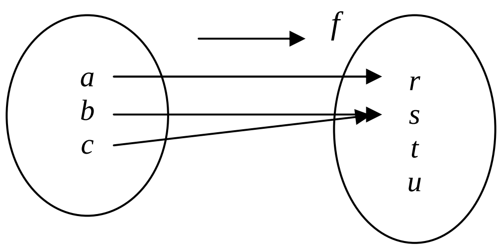
(۲) $x_1 = x_2 \Rightarrow$

۶.۱.۶ خوش‌تعریفی

از این پس، در این درس و دروس دیگر، بسیاری مواقع لازم است که تابعی چون f از یک مجموعه چون A به مجموعه‌ای چون B تعریف کنیم. توابع را به روش‌های

گوناگون می‌توان معرفی، مشخص، یا توصیف کرد. معمولاً توابع را با **فرمول**، **ضابطه**، **دستورالعمل**، **جدول**، یا **نمودار ون** معرفی می‌کنیم. برای مثال، جدول و نمودار ون زیر معرف تابعی از $\{a,b,c\}$ به $\{r,s,t,u\}$ است که در آن $f(a)=r$ ، $f(b)=s=f(c)$.

x	a	b	c
$f(x)$	r	s	s



وقتی که تابعی به روشی معرفی شود که درستی شرایط **۱** و **۲** دقیقاً و به طور صریح روشن نباشد، باید **درستی** آن‌ها را **اثبات کنیم**. در این صورت می‌گوییم که

خوش‌تعریفی تابع را بررسی کرده‌ایم.

۷.۱.۶ تساوی توابع

تعریف تساوی دو تابع به همان صورت داده شده برای رابطه‌ها است. با نمادگذاری **۴.۱.۶** می‌گوییم که توابع $f:A\to B$ و $g:C\to D$ مساوی هستند **اگر** $A=C$، $B=D$ و

$$(\forall x\in A)\qquad f(x)=g(x)$$

۸.۱.۶ بحث در کلاس فرض کنیم $f,g:A\to B$ تابع باشند. روشن است که اگر $f=g$ ، آنگاه $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} g$. آیا عکس این گزاره درست است؟

۱- آیا با تعریف بالا، توابع (**حقیقی مقدار**) زیر مساوی هستند؟

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ & \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 & \qquad x \mapsto x^2 \end{array}$$

که در آن $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۰\}$.

۲–اگر A دارای n عضو و B دارای m عضو باشد، چند **رابطه** از A به B وجود دارد؟ ثابت کنید که **تعداد** $m^n = m.m.....m$ (n مرتبه) **تابع** از A به B وجود دارد؟

۳– نشان دهید که برای هر مجموعه چون B (تهی یا ناتهی) دقیقاً یک تابع از $A = \varnothing$ به B وجود دارد (آن را **تابع تهی**، $\varnothing$، می‌نامیم). اگر $A \neq \varnothing$ و $B = \varnothing$، **چطور؟** اگر $B = \{e\}$ تک عضوی و A دلخواه باشد، **چطور؟**

مفاهیم زیر را نیز به کار خواهید برد.

۹.۱.۶ تعریف

۱– فرض کنیم $f: A \to B$ تابع است و $X \subseteq Y$. در این صورت **تابع تحدید** f بر X، به نمایش $f|_X : X \to B$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\forall x \in X) \quad f|_X(x) = f(x)$$

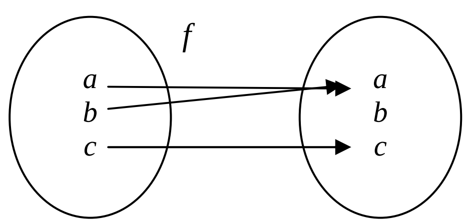
۲– فرض کنیم $f: A \to A$ (یعنی روی A) تابع باشد و $X \subseteq A$. می‌گوییم که X تحت f **ناوردا** یا **بسته** است اگر

$$(\forall x \in X) \quad f(x) \in X$$

در این صورت $f|_X : X \to X$ تابع است.

۱۰.۱.۶ بحث در کلاس

تابع زیر را در نظر بگیرید.



آیا $X=\{a,b\}$ تحت f بسته است؟ مجموعه‌های $\{c\}$ و $\{a\}$ **چطور؟**

در ادامه چند تابع خاص (**با پسوند**) را معرفی می‌کنیم که بسیار استفاده می‌شوند.

۱۱.۱.۶ تعریف

تابع $f:A\to A$ را **تابع همانی** روی A می‌گوییم اگر

$$(\forall x\in A)\quad f(x)=x$$

این تابع را معمولاً با id_A نشان می‌دهیم. همچنین، تحدید آن را بر $X\subseteq A$، **تابع شمول** X در A می‌نامیم و می‌نویسیم $i_X:X\to A$.

۱۲.۱.۶ تعریف

هر تابع دلخواه $f:\mathbb{N}\to A$ را **دنباله‌ای نامتناهی** در A می‌نامیم.

همچنین، هر تابع $\{۱,۲,\ldots,n\}\to A$ را **دنباله‌ای متناهی** در A می نامیم.

توجه می‌کنیم که دنباله‌ی f با خانواده‌ی

$$f(۱), f(۲), f(۳), \ldots$$

از عضوهای A کاملاً مشخص می‌شود. گاهی، برای سادگی، به جای $f(n)$ می‌نویسیم f_n (یا مثلاً a_n) و دنباله‌ی f را با $(f_n)_{n\in N}$ یا $(a_n)_{n\in N}$ نشان می‌دهیم. (تعریف **۱۰.۴.۲** را نیز ببینید.)

۱۳.۱.۶ بحث در کلاس

۱- جدول زیر را، به سلیقه‌ی خودتان، به دنباله‌ای متناهی روی $\{۰,۱\}$ کامل کنید.

n	۱	۲	۳	۴
f_n	۱	۰	۰	؟

۲- فرض کنید دنباله‌ی $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ با دستور زیر تعریف شود:

$$f_۱ = ۱ = f_۲ \quad (\forall n \geq ۳) \quad f_n = f_{n-۱} + f_{n-۲}$$

در این صورت، برای مثال، $f_۳ = f_۲ + f_۱ = ۱ + ۱ = ۲$. شش جمله‌ی اول این دنباله را بنویسید. این دنباله را **دنباله‌ی فیبوناچی** می‌نامند. (در اینترنت مطالب بیشتری در باره‌ی این تابع ببینید.)

حال می‌خواهیم تابع خاص دیگری را معرفی کنیم. با همه‌ی سادگی این تابع، اغراق نیست اگر بگوییم که یکی از مفاهیم زیربنایی **مهم** در ریاضیات و کاربردهای آن، به ویژه در علوم کامپیوتر و آمار، است. ابتدا توجه می‌کنیم که هر تابع

$f:A\to\{۰,۱\}$ زیرمجموعه‌ی

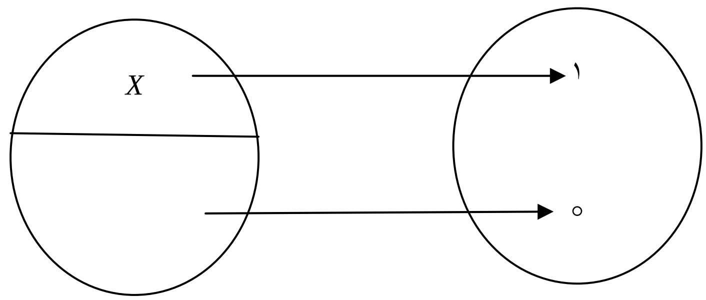
$$X = f^{-1}(۱) = \{x \in A \mid f(x) = ۱\}$$

را از A جدا و مشخص می‌کند. بر عکس، اگر $X \subseteq A$، آنگاه **تعلق** یا **عدم تعلق** x در X را می‌توان به زبان تابعی چون $A\to\{۰,۱\}$ به صورت زیر بیان کرد.

۱۴.۱.۶ تعریف

فرض کنیم $X \subseteq A$. تابع $\chi_X : A\to\{۰,۱\}$ (χ را **خی** یا **کای** بخوانید) با تعریف زیر را **تابع مشخصه‌ی** X در A می‌نامیم:

$$\chi_X(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x\in X, \\ ۰ & \text{اگر } x\notin X. \end{cases}$$



۱۵.۱.۶ تذکر

نکتهای را صرفاً تذکر می‌دهیم و از آن می‌گذریم. در توصیف مفهوم مجموعه گفتیم که اعضای آن باید **مشخص** باشند. از این رو، اگر A مجموعه‌ی دانشجویان کلاس **مبانی علوم ریاضی** باشد، عبارت **همه‌ی دانشجویان دختر این کلاس** زیرمجموعه‌ای چون X را در A مشخص می‌کند، و لذا می‌توانیم تابع $\chi_X : A \to \{۰, ۱\}$ را به‌صورت زیر به آن نسبت دهیم:

$$\chi_X(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x \text{ دختر باشد} \\ ۰, & \text{اگر } x \text{ دختر نباشد} \end{cases}$$

ولی عبارتی چون **همه‌ی دانشجویان خوب این کلاس**، **زیرمجموعه**ای از این کلاس را مشخص نمی‌کند. زیرا خوب بودن مشخص نشده است. ولی اگر خوبی را درجه بندی کنیم و مثلاً این یا آن دانشجو با **درجه‌ی۱**، آن چند نفر با **درجه‌ی۹/.** ، برخی با **درجه‌ی۴/.** و . . . ، خوب باشند، آنگاه به جای نسبت دادن تابعی از A به مجموعه‌ی دوعضوی $\{۰, ۱\}$، می‌توانیم تابعی چون $\mu : A \to [۰, ۱]$ از A به بازه‌ی $[۰, ۱]$ تعریف کنیم که گویای این مطالب باشد. این توابع معرف مفهومی به نام **زیرمجموعه‌ی فازی** هستند، که مورد بحث ما نیست.

این بخش را با معرفی یک نوع تابع خاص دیگر به پایان می‌بریم.

۱۶.۱.۶ تعریف

هر تابع به صورت زیر را **تابعی با n متغیر** (یا **n ورودی**) می‌نامیم.

$$f : A_1 \times \ldots \times A_n \to B$$

مثال‌های بسیاری از این نوع توابع را دیده‌اید. برای مثال،

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \sin x + 2xy$$

تابعی با دو متغیر است.

۱۷.۱.۶ تعریف

هر تابع با دو متغیر چون

$$f : A^2 = A \times A \to A$$

را یک **عمل دوتایی روی** (یا **در**) A می‌نامیم. همچنین، هر تابع

$$f : A^n \to A$$

را یک **عمل n تایی روی** (یا **در**) A می‌نامیم.

۱۸.۱.۶ تذکر

۱- اگر $\lambda : A \times A \to A$ عملی دوتایی روی A باشد، معمولاً (با الگو قرار دادن چهار عمل اصلی اعداد) به جای $\lambda((x, y))$ نماد ساده‌ای چون $x * y$ را به کار می‌بریم.

۲- با توجه به تعریف **۱۷.۱.۶**، هر عمل **صفرتایی** به صورت $\lambda : A^\circ \to A$ است، که در آن $A^\circ = \{\varnothing\}$ مجموعه‌ای تک عضوی است (بند **۴** بحث در کلاس **۸.۱.۶** را ببینید). روشن است که λ با عضوی چون $\lambda(\varnothing) = a$ کاملاً مشخص می شود. بر عکس، هر عضو دلخواه $x \in A$ عملی صفرتایی چون $\lambda : A^\circ \to A$ را با تعریف $\lambda(\varnothing) = x$ مشخص می‌کند.

تمرین ۱.۶

۱. آیا سؤال های **۳** و **۴** بحث در کلاس **۸.۱.۶** را پاسخ دادید؟

۲. تعداد عمل‌های صفر، یک، و دوتایی روی مجموعه‌های زیر را تعین کنید: $\varnothing$، $\{a\}$، $\{a,b\}$، $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

۳. با استفاده از نماد گذاری بند **۱** تذکر **۱۸.۱.۶**، خوش‌تعریفی عمل‌دوتایی را به عنوان تابع معنی کنید. در واقع، نقطه چین‌ها را کامل کنید:

(۱) بسته بودن: $\forall x, y \in A, \quad x * y \in \cdots$

(۲) $(x = x' \,\&\, y = y') \;\Rightarrow\; x * y = \cdots$

۴. **آیا** عمل تقسیم روی $\mathbb{Z}$ عملی دوتایی (خوش‌تعریف) است؟ روی $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ چطور؟

۵. چند عمل یک تایی $\lambda : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ و دوتایی $\lambda : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ آشنا روی $\mathcal{P}(A)$ تعریف کنید.

۶. ثابت کنید که عمل‌های جمع و ضرب اعداد کسری روی $\mathbb{Q}$ خوش تعریف هستند. (قدری فنی است! نیاز به کمک استاد درس دارید.)

۷. در دنباله‌ی فیبوناتچی، مقدار $f_۶$ را بیابید.

۸. تابع جزئی $f : \mathbb{R} - 0 \to \mathbb{R}$ با تعریف $f(x) = ۱/x$ را به تابع گسترش دهید.

نگاره‌های مستقیم و معکوس

در اینجا مفاهیم **نگاره** و **پیش‌نگاره‌ی** توابع را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. اگر چه این مفاهیم ساده هستند، مبتدیان در عمل قدری با **مشکل** رو به رو می‌شوند!

۱.۲.۶ تعریف

فرض کنیم $f : A \to B$ تابع است. در این صورت،

۱- برای هر $X \subseteq A$ ، مجموعه‌ی

$$\overrightarrow{f}(X) = \{y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$$
$$= \{f(x) \mid x \in X\}$$

را **نگاره** (یا **خروجی**) **مستقیم** X تحت f می‌نامیم.

۲- برای هر $Y \subseteq B$، مجموعه‌ی

$$\overleftarrow{f}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$

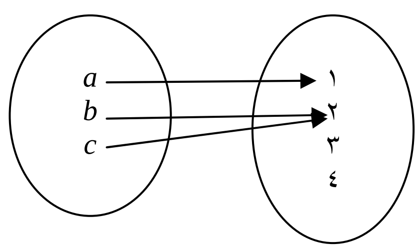
را **نگاره‌ی معکوس** (یا **پیش نگاره‌ی**) Y تحت f می‌نامیم.

۲.۲.۶ بحث در کلاس

اغلب با نگاره‌ی مستقیم کمتر مشکل دارید. **به نگاره‌ی معکوس بیشتر توجه کنید.**

۱- تابع زیر را در نظر بگیرید.

$f:$



روشن است که، برای مثال، $\overrightarrow{f}(\{a\}) = \{f(a)\} = \{۱\}$ و

$$\overrightarrow{f}(\{a,b\}) = \{f(a), f(b)\} = \{۱,۲\}$$

حال $\overrightarrow{f}(\{b\})$ ، $\overrightarrow{f}(\{a,c\})$ ، و $\overrightarrow{f}(\{a,b,c\})$ را بیابید.

۲- **تابع** f بالا را در نظر بگیرید. روشن است که $\overleftarrow{f}(\{۱\}) = \{a\} = \overleftarrow{f}(\{۱,۳\})$ و $\overleftarrow{f}(\{۲\}) = \{b,c\}$. حال مجموعه‌های $\overleftarrow{f}(\{۳\})$، $\overleftarrow{f}(\{۳,۴\})$ ، $\overleftarrow{f}(\{۲,۳\})$ و

$\overleftarrow{f}(\{۱,۲,۳,۴\})$ را بیابید.

۳- تا اینجا که مشکلی نداشتید، داشتید؟ حال نشان دهید که

$\overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(\{۲,۳\}))\neq\{۲,۳\}$ و $\overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(\{a,b\}))\neq\{a,b\}$.

۳.۲.۶ نمادگذاری

۱- معمولاً $\overrightarrow{f}(X)$ را با $f(X)$ و $\overleftarrow{f}(Y)$ را با $f^{-1}(Y)$ نشان می‌دهند که بهتر است تا مدتی این کار را نکنیم و نماد f^{-1} را برای **وارون** تابع که بعداً معرفی خواهد شد، قایل شویم.

۲- معمولاً برای صرفه‌جویی در نمادگذاری و برای سادگی، اگر $Y=\{y\}$ تک‌عضوی باشد، به جای $\overleftarrow{f}(\{y\})$ می‌نویسیم $\overleftarrow{f}(y)$ که ممکن است اشتباه برانگیز باشد. توجه کنید که $\overleftarrow{f}(\{y\})$ یا $\overleftarrow{f}(y)$ زیرمجموعه‌ی A است نه عضوی از آن. البته ممکن است زیرمجموعه‌ای تک عضوی باشد. مثال‌های بالا را ببینید.

با این مفاهیم در مثال‌های مشخص مشکل چندانی ندارید. برای مثال، بندهای **۱** و **۲** و حتی بند **۳** مثال بالا را به‌راحتی حل کردید. ممکن است در موارد مجرد قدری مشکل داشته باشید که با تمرین به مرور برطرف می‌شود. **به بحث مجرد زیر توجه کنید.**

۴.۲.۶ بحث در کلاس

فرض کنید $f:A\to B$ تابع است و $X\subseteq A$، $Y\subseteq B$. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تحقیق کنید.

۱- $f(a)\in\overrightarrow{f}(X)\Rightarrow[(\exists x\in X),\ f(a)=f(x)]$.

۲- (**لزوماً درست نیست**) $f(a)\in\overrightarrow{f}(X)\Rightarrow a\in X$.

۳- $\overleftarrow{f}(\{y\})=\overleftarrow{f}(y)=\{x\in A\mid f(x)=y\}$.

۴- $a\in\overleftarrow{f}(Y)\Rightarrow[\exists y\in Y,\ \ a=\overleftarrow{f}(y)]$.

۵- $a\in\overleftarrow{f}(Y)\Rightarrow[\exists y\in Y,\ \ a\in\overleftarrow{f}(y)]$.

۶- $a \in \overleftarrow{f}(Y) \Leftrightarrow f(a) \in Y$.

۷- $A = \bigcup_{b \in \operatorname{Im} f} \overleftarrow{f}(b)$.

۸- نشان دهید که مجموعه‌ی $\left\{ \overleftarrow{f}(b) \middle| \ b \in \operatorname{Im} f \right\}$ افراز مجموعه‌ی A است.

۵.۲.۶ تذکر

فرض کنید $f : A \to B$ تابع است. از آنجا که $\overrightarrow{f}$ بر زیرمجموعه‌های A اثر می‌کند و زیرمجموعه‌هایی از B به دست می‌دهد، و $\overleftarrow{f}$ بر زیرمجموعه‌های B اثر می‌کند و زیرمجموعه‌هایی از A به دست می‌دهد، پس در واقع صحبت از توابع زیر است:

$$\mathcal{P}(A) \xrightarrow{\overrightarrow{f}} \mathcal{P}(B) \qquad , \qquad \mathcal{P}(B) \xrightarrow{\overleftarrow{f}} \mathcal{P}(A)$$
$$X \mapsto \overrightarrow{f}(X) \qquad\qquad\qquad Y \mapsto \overleftarrow{f}(Y)$$

این توابع **مهم** **نگاره‌ی مستقیم** و **نگاره‌ی معکوس** ویژگی‌هایی دارند که برخی از آن‌ها را که بیشتر به کار می‌آیند در قضیه‌های زیر می‌آوریم.

۶.۲.۶ قضیه

فرض کنید $f : A \to B$ تابع است. و $C, D \subseteq A$. در این صورت،

۱- *تابع $\overrightarrow{f}$ رابطه‌ی $\subseteq$ را* ***حفظ می‌کند****. یعنی،*

$$C \subseteq D \Rightarrow \overrightarrow{f}(C) \subseteq \overrightarrow{f}(D)$$

۲- *تابع $\overrightarrow{f}$ رابطه‌ی $\cup$ را* ***حفظ می‌کند****. یعنی،*

$$\overrightarrow{f}(C \cup D) = \overrightarrow{f}(C) \cup \overrightarrow{f}(D)$$

۳- *تابع $\overrightarrow{f}$ رابطه‌ی $\cap$ را لزوماً* ***حفظ نمی‌کند****، ولی داریم*

$$\overrightarrow{f}(C \cap D) \subseteq \overrightarrow{f}(C) \cap \overrightarrow{f}(D)$$

۴- *تابع $\overrightarrow{f}$ تفاضل را لزوماً* ***حفظ نمی‌کند****، ولی داریم*

$$\vec{f}(C\setminus D)\supseteq\vec{f}(C)\setminus\vec{f}(D)$$

اثبات این احکام را می‌توانید به‌راحتی اثبات کنید. به‌عنوان نمونه، ۳ را اثبات می‌کنیم و شما نیز حتماً یکی دیگر، برای مثال ۴ را اثبات کنید.

برای اثبات شمول ۳، فرض می‌کنیم $y\in\vec{f}(C\cap D)$. پس عضوی چون $x\in C\cap D$ وجود دارد به طوری که $y=f(x)$. چون $x\in C\cap D$، داریم $x\in C$ و $x\in D$. پس $y=f(x)\in\vec{f}(C)$ و $y=f(x)\in\vec{f}(D)$، یعنی $y=f(x)\in\vec{f}(C)\cap f(D)$. بنابراین ۳ اثبات شد. البته می‌توانستیم از ۱ نیز استفاده کنیم و اثباتی **فنی**‌تر (!) به صورت زیر ارائه دهیم:

$$\begin{aligned}C\cap D\subseteq C,D&\Rightarrow\vec{f}(C\cap D)\subseteq\vec{f}(C),\vec{f}(D)\\&\Rightarrow\vec{f}(C\cap D)\subseteq\vec{f}(C)\cap\vec{f}(D)\end{aligned}$$

برای اینکه نشان دهیم تساوی لزوماً در ۳ برقرار نیست، کافی است مثالی از A، B، تابع $f:A\to B$، و $C,D\subseteq A$ بیاوریم به طوری که

$$\vec{f}(C)\cap\vec{f}(D)\not\subseteq\vec{f}(C\cap D)$$

ارائه‌ی مثال را به عهده‌ی شما می‌گذاریم. توجه می‌کنیم که، برای اینکه بتوانیم چنین مثالی بیاوریم، ابتدا سعی می‌کنیم نشان دهیم که

$$\vec{f}(C)\cap\vec{f}(D)\subseteq\vec{f}(C\cap D)$$

تا ببینیم در کجا **دچار مشکل می‌شویم**.

$$\begin{aligned}&y\in\vec{f}(C)\cap\vec{f}(D)\Rightarrow y\in\vec{f}(C)\,\&\,y\in\vec{f}(D)\\&\Rightarrow\big(\exists c\in C, y=f(c)\big)\,\&\,(\exists d\in D, y=f(d)\\&\Rightarrow ???\end{aligned}$$

همین جا دچار مشکل می‌شویم! **اگر** $c=d$، آنگاه عضو $x=c=d\in C\cap D$ مشکل را به صورت زیر حل می‌کرد

$$y=f(x)\in f(C\cap D)$$

ولی **لزومی ندارد** که $c=d$. ■

قضیه‌ی زیر ویژگی‌های **تابع نگاره‌ی معکوس** را بیان می‌کند. همان طور که گفتیم، معمولاً مبتدیان در کارکردن با نگاره‌ی معکوس قدری **مشکل دارند**، و آن‌ها که تلاش نمی‌کنند مشکل‌شان را حل کنند، آن‌را تا **سال‌ها** بعد با خود حمل می‌کنند! پس سعی کنید آن را در همین درس، و **همین امروز**، حل کنید. مشکل اصلی از اینجا ناشی می‌شود که در **نگاره‌ی مستقیم**، هر عضو **شکل مشخصی** دارد، یعنی هر عضو $\overrightarrow{f}(X)$ به صورت $f(x)$ است (که در آن $x\in X$). ولی در نگاره‌ی معکوس **چنین نیست** و هر عضو $x\in\overleftarrow{f}(Y)$ با **ویژگی** $f(x)\in Y$ مشخص می‌شود، ولی مبتدیان گاهی می‌نویسند $x=\overleftarrow{f}(y)$ که **نادرست** است. توجه کنید که $\overleftarrow{f}(y)$ **مجموعه** است و نمی‌تواند با **عضو** x برابر باشد. بند **۲** بحث در کلاس **۲.۲.۶** و بحث در کلاس ۴.۲.۶ را یک بار دیگر با دقت مطالعه کنید. در اثبات قضیه‌ی زیر **شرکت کنید!**

۷.۲.۶ قضیه

فرض کنیم $f:A\to B$ تابع است و $C,D\subseteq B$. در این صورت،

۱- *تابع $\overleftarrow{f}$ رابطه‌ی $\subseteq$ را* ***حفظ می‌کند***. *یعنی،*

$$C\subseteq D\Rightarrow \overleftarrow{f}(C)\subseteq\overleftarrow{f}(D)$$

۲- *تابع $\overleftarrow{f}$ اجتماع را* ***حفظ می‌کند***. *یعنی،*

$$\overleftarrow{f}(C\cup D)=\overleftarrow{f}(C)\cup\overleftarrow{f}(D)$$

۳- (بر خلاف $\overrightarrow{f}$) *تابع $\overleftarrow{f}$ اشتراک را نیز* ***حفظ می‌کند***. *یعنی،*

$$\overleftarrow{f}\left(C\cap D\right)=\overleftarrow{f}\left(C\right)\cap\overleftarrow{f}\left(D\right)$$

۴- (برخلاف $\overrightarrow{f}$) تابع $\overleftarrow{f}$ *تفاضل را نیز* **حفظ می‌کند**. یعنی،

$$\overleftarrow{f}\left(C\setminus D\right)=\overleftarrow{f}\left(C\right)\setminus\overleftarrow{f}\left(D\right)$$

اثبات

برای درک بهتر اثبات‌ها، دلیل هر مرحله را با **صدای بلند** (!) بیان کنید.

۱-

$$\begin{aligned} x\in\overleftarrow{f}\left(C\right) &\Rightarrow f\left(x\right)\in C && (???)\\ &\Rightarrow f\left(x\right)\in D && (???)\\ &\Rightarrow x\in\overleftarrow{f}\left(D\right) && (???) \end{aligned}$$

راحت بود؟! بند **۲** را شما بعد از کلاس اثبات کنید .

۳- ابتدا ثابت می‌کنیم که مجموعه‌ی سمت چپ **۳** زیرمجموعه‌ی سمت راست آن اسـت.
دلیل هر مرحله را با **صدای بلند** (!) بیان کنید.

$$\begin{aligned} x\in\overleftarrow{f}\left(C\cap D\right) &\Rightarrow f\left(x\right)\in C\cap D\\ &\Rightarrow f\left(x\right)\in C \quad \& \quad f\left(x\right)\in D\\ &\Rightarrow x\in\overleftarrow{f}\left(C\right) \quad \& \quad x\in\overleftarrow{f}\left(D\right)\\ &\Rightarrow x\in\overleftarrow{f}\left(C\right)\cap\overleftarrow{f}\left(D\right) \end{aligned}$$

البته می‌توانستیم از **۱** نیز استفاده کنیم و اثباتی **فنی**‌تر (!) ارائه دهیم. **در آن صورت لذت انجام دادن آن را از شما می‌گرفتیم!!**

حال نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی سمت راست **۳** زیرمجموعه‌ی سمت چپ آن است.

$$
\begin{aligned}
x \in \overleftarrow{f}(C) \cap \overleftarrow{f}(D) &\Rightarrow x \in \overleftarrow{f}(C) \ \ \& \ \ x \in \overleftarrow{f}(D) \\
&\Rightarrow f(x) \in C \ \ \& \ \ f(x) \in D \\
&\Rightarrow f(x) \in C \cap D \\
&\Rightarrow x \in \overleftarrow{f}(C \cap D)
\end{aligned}
$$

مشکلی که در بند **۳** قضیه‌ی مربوط به $\overrightarrow{f}$ داشتیم **پیش نیامد!** ■

۸.۲.۶ بحث در کلاس

فرض کنید $f : A \to B$ تابع است و $X \subseteq A$، $Y \subseteq B$. احکام زیر را اثبات کنید (بند **۳** بحث در کلاس **۲.۲.۶** را ببینید).

۱- $\overrightarrow{f}\left(\overleftarrow{f}(Y)\right) \subseteq Y$ و تساوی لزوماً برقرار نیست.

۲- $X \subseteq \overleftarrow{f}\left(\overrightarrow{f}(X)\right)$ و تساوی لزوماً برقرار نیست.

یک ویژگی بسیار مهم دیگر تابع‌های **نگاره‌ی مستقیم** و **نگاره‌ی معکوس** را در بخش بعدی می‌آوریم.

تمرین ۲.۶

۱. نادرست بودن بند **۲** بحث در کلاس **۴.۲.۶** را با مثال نشان دهید.

۲. نادرستی بند **۴** و درستی بندهای **۵** و **۶** را در بحث در کلاس **۴.۲.۶** توضیح دهید.

۳. **آیا** سؤال‌های **مهم** **۷** و **۸** بحث در کلاس **۴.۲.۶** را حل کردید؟

۴. فرض کنید $X \subseteq A$ و $f : A \to B$ تابع و $g = f|_X$ تحدید f بر X باشد. نشان دهید که برای هر $Y \subseteq B$، $\overleftarrow{g}(Y) = X \cap \overleftarrow{f}(Y)$.

۵. فرض کنید $f:A\to B$ تابع است و $Y\subseteq B$. ثابت کنید که

$$\overleftarrow{f}(B\setminus Y)=A\setminus\overleftarrow{f}(Y)$$

۶. فرض کنید $f:A\to B$ تابع است و $X\subseteq A$، $Y\subseteq B$. ثابت کنید که

(الف) $f(X\cap\overleftarrow{f}(Y))=f(X)\cap Y$.

(ب) $f(\overleftarrow{f}(Y))=f(A)\cap Y$.

۷. فرض کنید $f:S\to T$ تابع است و $A,B\subseteq S$، $D,E\subseteq T$. درستی یا نادرستی حکم‌های زیر را نشان دهید:

(الف) اگر $A\subset B$ زیر مجموعه‌ی سره باشد، آنگاه $f(A)\subset f(B)$ زیرمجموعه‌ی سره است.

(ب) اگر $D\subset E$ آنگاه $\overleftarrow{f}(D)\subset\overleftarrow{f}(E)$.

(پ) اگر $D\cap E=\varnothing$ آنگاه $\overleftarrow{f}(D)\cap\overleftarrow{f}(B)=\varnothing$.

۸. آیا سؤال‌های بحث **۸.۲.۶** را به طور کامل پاسخ دادید؟

۹. (**مهم است**) فرض کنید که $f:X\to Y$ تابع و $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X و $\{B_\beta\}_{\beta\in J}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های Y باشد. نشان دهید که

(الف) $f(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$.

(ب) $f(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\subseteq\bigcap_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$.

(پ) $\overleftarrow{f}(\bigcup_{\beta\in J}B_\alpha)=\bigcup_{\beta\in J}\overleftarrow{f}(B_\alpha)$.

(ت) $\overleftarrow{f}(\bigcap_{\beta\in J}B_\beta)=\bigcap_{\beta\in J}\overleftarrow{f}(B_\beta)$.

۱۰. فرض کنید $f:A\to B$ و $g:C\to D$ تابع هستند. درستی یا نادرستی حکم-های زیر را اثبات کنید.

(الف) رابطه‌ی $f\cup g$ تابعی از $A\cup C$ به $B\cup D$ است.

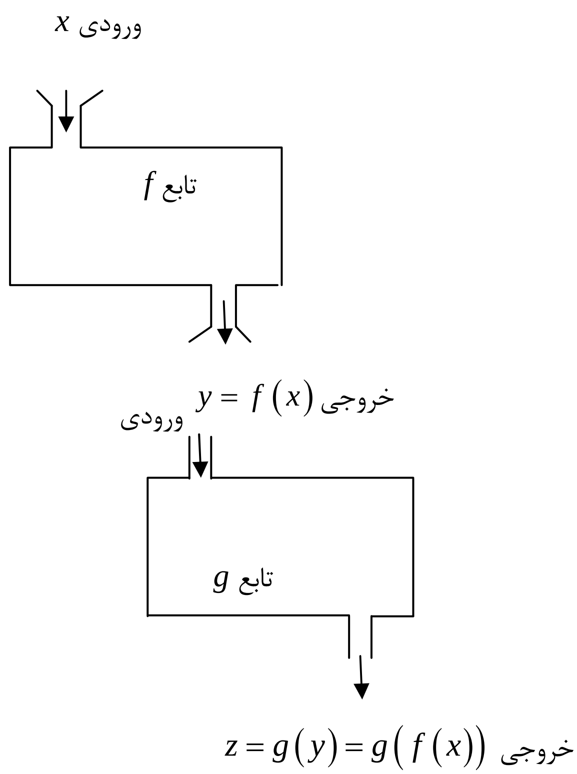
(ب) رابطه‌ی $f\cap g$ تابعی از $A\cap C$ به $B\cap D$ است.

۱۱. (**مهم است**) فرض کنید که $f:A\to B$ تابع است. نشان دهید که رابطه‌ی K_f با تعریف زیر رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است و افراز A/K_f را مشخص کنید :

$$xK_f y\Leftrightarrow f(x)=f(y)$$

۳.۶ ترکیب توابع

بسیاری مواقع لازم است که تابع g روی خروجی های تابع f اثر کند:



این مفهوم با واژه و نمادگذاری خاص خود به صورت زیر تعریف می‌شود.

۱.۳.۶ تعریف

فرض کنیم $f:A\to B$ و $g:B\to C$ تابع هستند. **ترکیب** f با g تابعی چون $h:A\to C$ است به طوری که

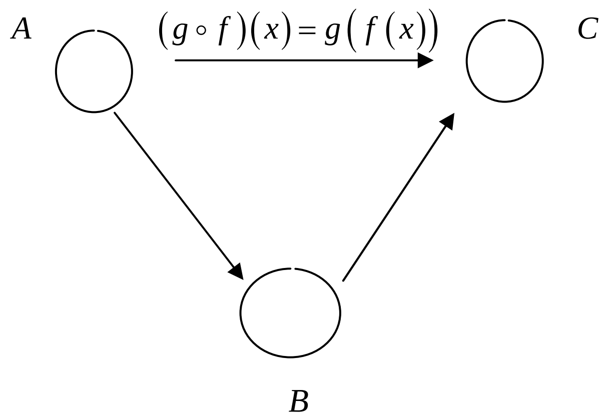
$$(\forall x\in A)\quad h(x)=g\left(f(x)\right)$$

معمولاً h را با نماد $g\circ f$ نشان می‌دهیم.

با توجه به این تعریف، تابع f را وقتی می‌توانیم با g ترکیب کنیم که $Codf = Domg$. البته ممکن است نظر شما، مانند نظر برخی دیگر، این باشد که شمول $\operatorname{Im} f \subseteq Domg$ کافی است. نظر نادرستی نیست، ولی به دلایل فنی دیگری که به مرور مطرح می‌شوند، مورد نظر ما نیست. ترکیب توابع را می‌توان با نموداری به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

چنین نموداری را نمودار **تعویض‌پذیر** یا **جا به جایی** می‌نامیم، به این معنی که مسیر از A به C با تابع مرکب $g \circ f$ همان مسیر دو مرحله‌ای از A به B با تابع f و سپس از B به C با تابع g است. به نمودار زیر توجه کنید:



در بقیه‌ی این بخش به برخی از ویژگی‌ها و کاربردهای عمل ترکیب توابع می‌پردازیم که هر یک از آن‌ها در **علوم ریاضی** و کاربردهای آن‌ها به کار می‌روند. اثبات اغلب آن‌ها آسان و **سرراست** هستند، که **به کمک یکدیگر** انجام می‌دهیم. ابتدا در بحث زیر شرکت کنید.

۲.۳.۶ بحث در کلاس

۱- فرض کنید که $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با دستور دو ضابطه‌ای زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} x-۳, & \text{اگر } x<۰ \\ ۲x, & \text{اگر } x\geq ۰ \end{cases}$$

روشن است که

$$(f\circ f)(۵)=f\big(f(۵)\big)=f\left(۵^{۲}\right)=f(۲۵)=۲۵^{۲}=۶۲۵$$

$$(g\circ g)(-۲)=g\big(g(-۲)\big)=g(-۲-۳)=g(-۵)=-۸$$

$$(f\circ g)(۲)=f\big(g(۲)\big)=f(۲\times ۲)=f(۴)=۴^{۲}=۱۶$$

$$(g\circ f)(۲)-g\big(f(۲)\big)-g\left(۲^{۲}\right)-g(۴)-۲\times۴-۸$$

توابع مرکب $f\circ f$ ، $g\circ g$ ، $g\circ f$ ، $f\circ g$ را مشخص کنید. **آیا** $f\circ g=g\circ f$ ؟

۲- فرض کنید $f:A\to B$ ، در این صورت $f\circ id_A=f$ ، زیرا برای هر $a\in A$، داریم

$$\left(f\circ id_A\right)(a)=f\left(id_A(a)\right)=f(a)$$

نشان دهید که $id_B\circ f=f$.

۳- نمودار تعویض‌پذیری $f\circ id_A=f$ به صورت زیر است:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "id_A"'] & & B \\ & A \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

نمودار تعویض‌پذیری $id_B\circ f=f$ را رسم کنید.

۴- فرض کنید که $A \xrightarrow{f} B$، $B \xrightarrow{g} C$، $C \xrightarrow{h} D$ تابع باشند. **نشان دهید** که عمل ترکیب توابع **شرکت‌پذیر** است . یعنی،

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

۳.۳.۶ تعریف

همراه با هر حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ دو تابع طبیعی p و q به صورت زیر وجود دارند

$$\begin{array}{ccccc} B & \xleftarrow{q} & A \times B & \xrightarrow{p} & A \\ b & \leftarrow\!\shortmid & (a,b) & \mapsto & a \end{array}$$

که آن‌ها را، با توجیه واضح، **توابع تصویر** بر A و بر B می‌نامیم.

حاصل‌ضرب دکارتی همراه با این توابع تصویر دارای ویژگی **مهم** زیر هستند، که آن را **ویژگی جهانی ضرب** می‌نامیم.

۴.۳.۶ قضیه (ویژگی جهانی ضرب)

برای هر دو تابع دلخواه $B \xleftarrow{g} X \xrightarrow{f} A$، تابع منحصر به فرد $h : X \to A \times B$ وجود دارد به‌طوری که هر دو مثلث زیر تعویض‌پذیر هستند. یعنی، $p \circ h = f$ ، $q \circ h = g$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, dashed, "h"] & \\ B & & A \\ & A \times B \arrow[ul, "q"] \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

اثبات

از این پس، در سراسر دروس **علوم ریاضی** و کاربردهای آن‌ها، لازم می‌شود توابعی با **ویژگی**هایی خاص تعریف کنیم، که این قضیه نمونه‌ای از آن است. اثبات را با توضیح بیشتری می‌آوریم که **روش مهم آن را بیاموزید**. در ضمن در نمودارها، تابع‌های با پیکان‌های خط پر، تابع‌هایی **داده شده** هستند و توابع با پیکان‌های نقطه چین را **باید بیابیم**.

تابع مورد درخواست $h: X \to A \times B$ را **چطور** تعریف کنیم؟ باید به هر $x \in X$ یک جفت مرتب چون $h(x) = (?,?)$ نظیر کنیم که مؤلفه‌ی اول آن در . . . و مؤلفه‌ی دوم آن در . . . باشد. داده‌هایمان چه هستند؟ **درست است**، دو تابع $f: X \to A$ و $g: X \to B$ داده شده‌اند. پس متناظر با هر $x \in X$، عضوهای $f(x) \in A$ و $g(x) \in B$ را داده‌ایم. از این رو طبیعی است که $h(x)$ را جفت مرتب $(f(x), g(x))$ درنظر بگیریم:

$$X \xrightarrow{h} A \times B$$
$$x \mapsto (f(x), g(x))$$

حال باید بررسی کنیم که تابع ساخته شده‌ی f دارای ویژگی‌های مورد نظر قضـیه اسـت.

اثبات سرراست است. برای هر $x \in X$، داریم.

$$(p \circ h)(x) = p(h(x)) \qquad \text{(تعریف ترکیب توابع)}$$
$$= p(f(x), g(x)) \qquad \text{(تعریف } h(x)\text{)}$$
$$= f(x) \qquad \text{(تعریف } p\text{)}$$

پس $p \circ h = f$. به‌همین صورت، **نشان دهید** که $q \circ h = g$.

تاکنون وجود تابع f با ویژگی‌های خواسته شده اثبات شد. حـال، **قبـل از اینکـه فراموش کنیم**، **باید یکتایی** چنین تابعی را اثبات کنیم. مطابق آنچه کـه قـبلاً نیـز گفتیم، فرض می‌کنیم که هر دو تابع $h, h': X \to A \times B$ دارای ویژگی‌های مـذکور در قضیه باشند. یعنـی، ($p \circ h = f$ ، $q \circ h = g$) و ($p \circ h' = f$ ، $q \circ h' = g$). بایـد

نشان دهیم که $h = h'$، یعنی برای هر $x \in X$، $g(x) = h(x)$. توجه می‌کنیم که $h(x)$ و $h'(x)$ در $A \times B$ هستند و دو عضو $A \times B$ وقتی با هم مساوی‌اند که مؤلفه‌های آن‌ها نظیر به نظر مساوی باشند.

روشن است که $p(h(x))$ مؤلفه‌ی اول $h(x)$ و $p(h'(x))$ مؤلفه‌ی اول $h'(x)$ است. ولی بنابر $p \circ h = f$، مؤلفه‌ی اول $h(x)$ برابر با $f(x)$ است و بنابر $p \circ h' = f$، مؤلفه‌ی اول $h(x)$ نیز برابر با همان $f(x)$ است. با استدلالی مشابه، نشان دهید که مؤلفه‌های دوم $h(x)$ و $h'(x)$ برابرند. به این صورت، قضیه به طور کامل اثبات می‌شود! ■

اثبات‌هایی این چنین را در سراسر **علوم ریاضی** خواهید دید. ساده و سرراست **هستند**، ولی

باید با تمرین کردن بیاموزید که به تنهایی قادر به ارائه‌ی چنین اثبات‌هایی بشوید. از ما گفتن!

۵.۳.۶ بحث در کلاس

نمودار زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "g"'] & A \times B \arrow[l, "p_B"'] \arrow[r, "p_A"] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\
D & C \times D \arrow[l, "p_D"'] \arrow[r, "p_C"] & C
\end{tikzcd}$$

که در آن p ها توابع تصویر هستند. با استفاده از صورت قضیه‌ی قبل، استدلال کنید که تابعی منحصر به فرد چون $h: A \times B \to C \times D$ وجود دارد که مربع‌های حاصل را جا به جایی می‌سازد. اگر موفق نشدید، نمودار بالا را به صورت مثلثی زیر رسم کنید، **حتماً موفق می شوید.**

$$\begin{tikzcd}
& A\times B \arrow[dl, "g\circ p_B"'] \arrow[dr, "f\circ p_A"] & \\
D & & C \\
& C\times D \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

حال با الگو قرار دادن تعریف h در اثبات قضیه‌ی قبل، می‌توانید تابع h در این نمودار را به صورت زیر تعریف کنید:

$$A\times B \xrightarrow{h} C\times D$$
$$(a,b)\to\big(f(a),g(b)\big)$$

با توجه به تعریف تابع h، معمولاً می‌نویسیم $h=(f,g)$، یا گاهی $h = f\times g$.

حال همتای این مطالب را برای **اجتماع مجزا** (که در تعریف **۱۲.۴.۲** دیدیم) به‌جای حاصل‌ضرب مورد بررسی قرار می‌دهیم . برای راحتی کار در نوشتن، فرض می‌کنیم $A\cup B$ اجتماع دو مجموعه‌ی **مجزا** است، یعنی $A\cap B=\varnothing$ (در غیر این صورت باید اجتماع مجزای $A\dot{\cup} B=(A\times\{۱\})\cup(B\times\{۲\})$ را در نظر بگیریم، که نوشته‌هایمان را قدری پیچیده می‌کند.)

۶.۳.۶ تعریف

همراه با هر اجتماع (مجزا) $A\cup B$ دو **تابع طبیعی شمولی** i_A، i_B به صورت زیر وجود دارند

$$B\xrightarrow{i_B} A\cup B \xleftarrow{i_A} A$$
$$b\mapsto b \qquad a\leftarrow\!\shortmid a$$

این **توابع شمولی طبیعی** دارای ویژگی **مهم** زیر هستند که آن‌را **ویژگی جهانی همضرب** می‌نامیم.

۷.۳.۶ قضیه (ویژگی جهانی همضرب)

برای هر دو تابع دلخواه $A \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} B$، تابع منحصر به فرد $h: A\cup B \to X$ وجود دارد به طوری که مثلث‌های زیر تعویض‌پذیرند. یعنی، $h\circ i_A = f$ ،$h\circ i_B = g$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i_B"] \arrow[dr, "g"'] & A\cup B \arrow[d, "h"] & A \arrow[l, "i_A"'] \arrow[dl, "f"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

اثبات

قبل از راهنمایی برای اثبات **وجود** و **یکتایی** h ، توجه کنید که تفاوت این نمودار با نمودار قضیه‌ی **۳.۳.۶** در این است که همه‌ی پیکان‌ها **برعکس** شده‌اند. یعنی این دو قضیه **دوگان** یکدیگرند.

تصور نمی‌کنیم که برای تعریف تابع $h: A\cup B \to X$، مورد نظر در قضیه، نیاز به کمک داشته باشید! چون $f: A\to X$ و $g: B\to X$ را **دارید**، به‌راحتی می‌توانید تابع h را از **اجتماع** (**مجزا**) $A\cup B$ به X به صورت دو ضابطه‌ای زیر تعریف کنید:

$$f(x)=\begin{cases} \dots, & x\in A \text{ اگر} \\ \dots, & x\in B \text{ اگر} \end{cases}$$

توجه کنید که چون $A\cap B=\varnothing$، پس h خوش‌تعریف است، در غیر این صورت ممکن بود برای x ای در $A\cap B$، $f(x)\neq g(x)$ و در نتیجه دو مقدار برای $h(x)$

به دست می‌آمد که **متناقض** با تعریف تابع است. بقیه‌ی کار اثبات قضیه را به عنوان تمرین در منزل انجام دهید. از این پس با **اثبات‌های پر پیچ و خم** این چنین در این درس و درس‌های دیگر ریاضی زیاد مواجه می‌شویم. این قضیه در درس‌های آنالیز ریاضی به **لم چسب** نیز معروف است (دلیل آن با توجه به تعریف h روشن است! نیست؟

■

بیاموزید و اندیشه ورزی کنید. **بیاموزید و اندیشه ورزی کنید.**

۸.۳.۶ بحث در کلاس

همتای بحث **۵.۳.۶** را برای اجتماع (مجزا) بنویسید و آن‌را به بحث بگذارید.

یک ویژگی بسیار مهم دیگر تابع های **نگاره‌ی مستقیم** و **نگاره‌ی معکوس**

$$\mathcal{P}(A)\xrightarrow{\overrightarrow{f}}\mathcal{P}(B) \qquad , \qquad \mathcal{P}(B)\xrightarrow{\overleftarrow{f}}\mathcal{P}(A)$$
$$X\mapsto \overrightarrow{f}(X) \qquad\qquad\qquad Y\mapsto \overleftarrow{f}(Y)$$

را که در بخش قبل قول دادیم، در قضیه‌ی زیر می‌آوریم و اثبات سرراست آن را به عهده‌ی **شما بهترین‌ها** می‌گذاریم.

۹.۳.۶ قضیه

فرض کنیم $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ *تابع باشند. در این صورت،*

۱- $\overrightarrow{g\circ f}=\overrightarrow{g}\circ\overrightarrow{f}$

۲- $\overleftarrow{g\circ f}=\overleftarrow{f}\circ\overleftarrow{g}$. *(به تغییر ترتیب توجه کنید.)*

به زبان نموداری، داریم:

$$
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "g\circ f"] \\
B \arrow[dr, "g"'] & \\
& C
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{P}(A) \arrow[dl, "\vec{f}"'] \arrow[dd, "\overrightarrow{g\circ f}"] \\
\mathcal{P}(B) \arrow[dr, "\vec{g}"'] & \\
& \mathcal{P}(C)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "g\circ f"] \\
B \arrow[dr, "g"'] & \\
& C
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{P}(A) \\
\mathcal{P}(B) \arrow[ur, "\overleftarrow{f}"] & \\
& \mathcal{P}(C) \arrow[ul, "\overleftarrow{g}"] \arrow[uu, "\overleftarrow{g\circ f}"']
\end{tikzcd}
$$

تمرین ۳.۶

۱. فرض کنید که دو تابع حقیقی $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌های $g(x)=\cot x$ و $f(x)=2x^3+1$ تعریف شده اند. تابع های مرکب $f\circ g$ و $g\circ f$ را مشخص کنید.

۲. دو تابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ با ضابطه‌های $f(x)=\ln x$ و $g(x)=e^x$ تعریف شده اند. تابع های مرکب $f\circ g$ و $g\circ f$ را مشخص کنید.

۳. آیا شرکت‌پذیری مورد سؤال بند ۴ بحث ۲.۳.۶ را اثبات کردید؟

۴. **آیا** توانستید به سؤال **مهم** ولی سادهی بحث **۵.۳.۶** پاسخ دهید؟ سؤال بحث **۸.۳.۶** را فراموش نکنید.

۵. فرض کنید تابع $f:A\to A$ چنان باشد که برای هر $a\in A$، $f(f(a))=a$. ثابت کنید که f به عنوان رابطهای روی A متقارن است.

۶. **(مهم)** برای هر عدد صحیح a، تابع $\mu_a:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را با $\mu_a(x)=xa$ تعریف کنید. نشان دهید که برای هر دو عدد صحیح a و b داریم $\mu_{ab}=\mu_a\circ\mu_b$.

۷. **(مهم)** برای هر عدد صحیح a، تابع $\lambda_a:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را با $\lambda_a(x)=x+a$ تعریف کنید. نشان دهید که برای هر دو عدد صحیح a و b داریم $\lambda_{a+b}=\lambda_a\circ\lambda_b$.

۸. قضیهی **۹.۳.۶** را اثبات کنید (تمرین خوبی است).

فصل ۷

توابع دوسویی

در این فصل سه نوع مهم تابع (با پسوند) **یک به یک**، **پوشا**، و **دوسویی**، را معرفی و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم. سپس، ابزاری برای تشخیص این انواع خاص تابع ارائه می‌دهیم. در پایان، سه نوع وارون تابع‌ها را معرفی می‌کنیم که ارتباط نزدیکی با این انواع خاص تابع دارند.

۱.۷ توابع یک به یک، پوشا

همان‌طور که در بحث ۲.۱.۶ دیدیم، اغلب لازم است تابع‌هایی را به کار ببریم که ویژگی‌هایی بیشتر از شرط‌های ۱ و ۲ تعریف تابع دارند. سه نوع مهم این تابع‌ها را ابتدا در زیر تعریف می‌کنیم و سپس آن‌ها را به تفصیل مورد مطالعه قرار می‌دهیم .

اگر بلافاصله متوجه‌ی تعریف‌ها نشدید، نگران نباشید، بحث‌های بعدی، آن‌ها را روشن‌تر می‌کنند.

۱.۱.۷ تعریف

فرض کنیم $f:A\to B$ تابع باشد. در این صورت می‌گوییم که

۱- تابع f **یک به یک** یا **تک گزین** است اگر

$$a\neq a'\Rightarrow f(a)\neq f(a')$$

یا معادل آن

$$f(a)=f(a')\Rightarrow a=a'$$

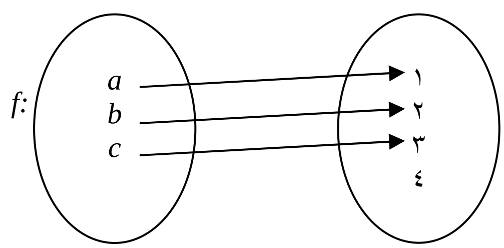
۲- تابع f **پوشا** است اگر هر عضو B **دست‌کم یک پیش‌نگاره** داشته باشد. یعنی، برای هر عضو $y\in B$ دست‌کم یک $x\in A$ وجود داشته باشد به طوری که $y=f(x)$. به عبارت دیگر، $\operatorname{Im} f=B$.

۳- تابع f **دو سویی** است اگر یک به یک و پوشا باشد .

گاهی برای تاکید، تابع یک به یک را با $f:A\rightarrowtail B$ و پوشا را با $f:A\twoheadrightarrow B$ نشان می‌دهیم. شما نیز می‌توانید چنین کنید.

۲.۱.۷ بحث در کلاس

۱- روشن است که تابع f زیر، یک به یک است ولی پوشا نیست.



۲- تابع دیگری از $A=\{a,b,c\}$ به $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ مثال بزنید که یک به یک باشد ولی پوشا نباشد.

۳- **آیا** می‌توان از $A=\{a,b,c\}$ به $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ تابعی پوشا مثال زد؟ از B به A **چطور**؟ آیا تابعی **دوسویی** از A به B یا از B به A وجود دارد؟

۴- چه تفاوتی بین بند ۲ تعریف تابع و شرط یک به یک بودن وجود دارد؟

۵- چه تفاوتی بین بند ۱ تعریف تابع و شرط پوشا بودن است؟

۶- اگر $f: A \rightarrowtail B$ یک به یک باشد، برای هر $b \in B$، مجموعه‌ی $f^{-1}(b)$ چند عضو می‌تواند داشته باشد؟ اگر f پوشا باشد **چطور**؟

۷- اگر **فقط نمودار** تابع حقیقی $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در صفحه‌ی دکارتی داده شده باشد، **چطور** می‌توان تشخیص داد که f یک به یک یا پوشا است ؟

۸- ثابت کنید که تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^3 + 5$ پوشا است. یک به یک **چطور**؟

حال که با مفاهیم تابع یک به یک، پوشا، و دوسویی آشنا شدید، نوع دیگری از سؤال‌ها را به بحث می‌گذاریم.

۳.۱.۷ بحث در کلاس

فرض کنید $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ مجموعه‌ای n عضوی است. نشان دهید که

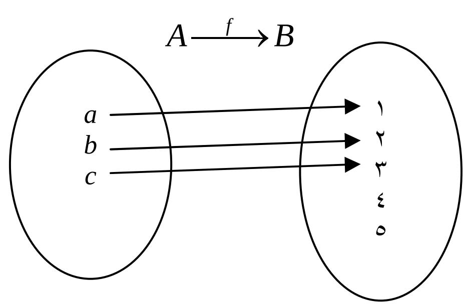
۱- هر تابع **یک به یک** روی A (از A به A) لزوماً **پوشا** نیز است.

۲- هر تابع پوشا روی A لزوماً یک به یک نیز است.

۳- تعداد توابع دوسویی روی A برابر با $n!$ است.

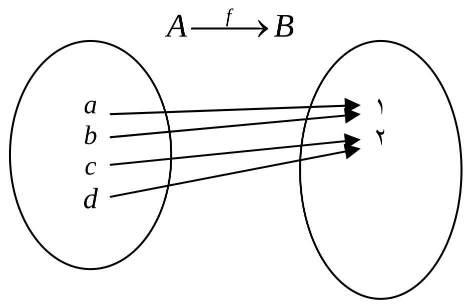
۴.۱.۷ بحث در کلاس

۱- تابع یک به یک زیر را در نظر بگیرید.



روشن است که اگر f را، برای مثال، از A به زیرمجموعه‌ی $\{۱,۲,۳\}$ از B تحدیـد کنـیم، تابعی دوسویی به دست می‌آید. حال فرض کنید تابع دلخواه $f : A \to B$ یـک بـه یـک باشد. چه حکمی مشابه بالا می‌توانید ارائه دهید؟

۲- تابع پوشای زیر را در نظر بگیرید.



روشن است که اگر f را، برای مثال، از زیرمجموعـه‌ی $A \supseteq \{a,c\}$ بـه B تحدیـد کنـیم، تابعی دوسویی به دست می‌آید. حال فرض کنید تابع دلخـواه $f : A \to B$ پوشـا باشـد. نشان دهید که تحدیـد f از زیـر مجموعـه‌ای چـون $C \subseteq A$ بـه B دوسـویی اسـت. (آن زیرمجموعه‌ها را مشخص کنید.)

حال برخی از ویژگی‌های مهم این سه نوع تابع را در ارتباط با ترکیب توابع می‌آوریم. گذشته از اهمیت این ویژگی‌ها، **اثبات‌ها نیز آموزنده‌اند**. **در اثبات‌ها شرکت کنید.**

۵.۱.۷ قضیه

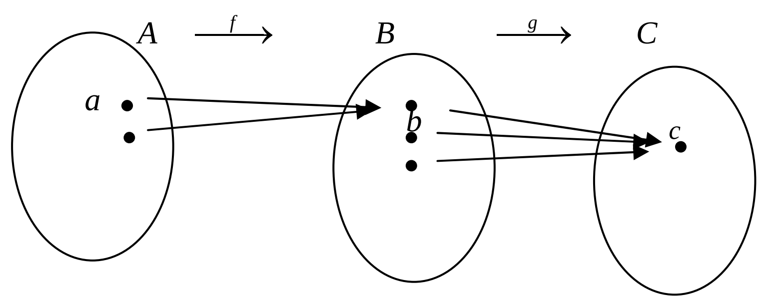
*ترکیب دو تابع **یک به یک** (**پوشا**، **دوسویی**)، **یک به یک** (**پوشا**، **دوسویی**) است.*

اثبات

فرض کنیم $f : A \to B$ و $g : B \to C$ یک به یک هستند. برای اثبات یک به یک بودن تابع $g \circ f$، باید از $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$ نتیجه بگیریم که $a = a'$. دلیل هر مرحله‌ی زیر را با **صدای بلند** (!) بیان کنید:

$$(g\circ f)(a)=(g\circ f)(a')\Rightarrow\quad g\big(f(a)\big)=g\big(f(a')\big)$$
$$\Rightarrow\quad f(a)=f(a')$$
$$\Rightarrow\quad a=a'$$

حال فرض کنیم که f و g پوشا باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که تابع $g\circ f:A\to C$ پوشا است. (معمولاً برای اثبات پوشا بودن توابع حقیقی که ضابطه‌ی آن‌ها مانند بند **۷** بحث **۲.۱.۷** به طور صریح داده شده‌اند مشکلی ندارید، ولی در اثبات پوشایی توابعی که با **ویژگی** مشخص شده‌اند، **قدری** مشکل دارید. **پس بیشتر توجه کنید**.) برای اثبات پوشا بودن تابع $g\circ f$ باید نشان دهیم که برای هر $c\in C$ دست کم یک $a\in A$ وجود دارد به طوری که $(g\circ f)(a)=c$. **حدس بزنید** که چطور وجود a را در A نشان می‌دهیم! نمودار ناقص زیر می‌تواند راهنما باشد.



چون g پوشا است، پس $b\in B$ **وجود دارد** به طوری که $g(b)=c$. (**هنوز** $a\in A$ **پیدا نشده** است!) حال چون f پوشا است، $a\in A$ **وجود دارد** به طوری که $f(a)=b$. حال داریم

$$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=c$$

و در نتیجه a پیش‌نگاره‌ای برای c تحت $g\circ f$ است، و قضیه اثبات شده است.

در پایان، روشن است که اگر f و g دوسویی باشند، $g\circ f$ یک به یک است، زیرا . . . ، و $g\circ f$ پوشا است، زیرا . . . ! حال اثبات قضیه‌ی را شما کامل کنید. ■

۶.۱.۷ قضیه

فرض کنیم $f : A \to B$ و $g : B \to C$ تابع باشند. در این صورت،

۱ – *اگر $g \circ f$ یک به یک باشد، آنگاه f یک به یک است.*

۲ – *اگر $g \circ f$ پوشا باشد، آنگاه g پوشا است.*

اثبات

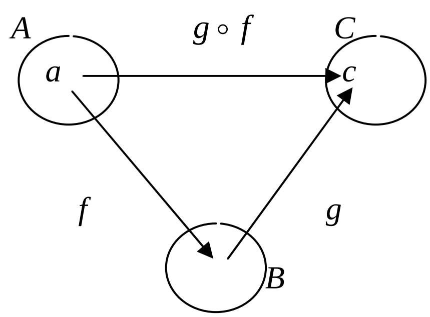
۱– فرض کنیم $g \circ f$ یک به یک است. مراحل زیر را، با دلیل و استدلال، کامل کنید که حکم **۱** را اثبات می‌کند:

(زیرا . . .) $f(a) = f(a') \Rightarrow \ldots$

(زیرا . . .) $\Rightarrow \ldots$

(زیرا . . .) $\Rightarrow$

۲– فرض کنید $g \circ f$ پوشا است. به کمک نمودار ناقص



ثابت کنید که g پوشا است. ■

دو قضیه‌ی زیر را به خوبی به‌خاطر بسپارید. این قضیه‌ها احکامی معادل با تعریف یک به یک و تعریف پوشا بودن توابع ارائه می‌دهند. این نوع قضیه‌ها در **علوم ریاضی** از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

۷.۱.۷ قضیه

تابع $f:A\to B$ است اگر وتنها اگر نسبت به ترکیب توابع، **یک به یک** *است اگر وتنها اگر نسبت به ترکیب توابع،* ***از سمت چپ*** *حذف شود. یعنی،*

$$\left(\forall C,\forall h,k:C\to A\right)\quad f\circ h=f\circ k\Rightarrow h=k \qquad (*)$$

اثبات

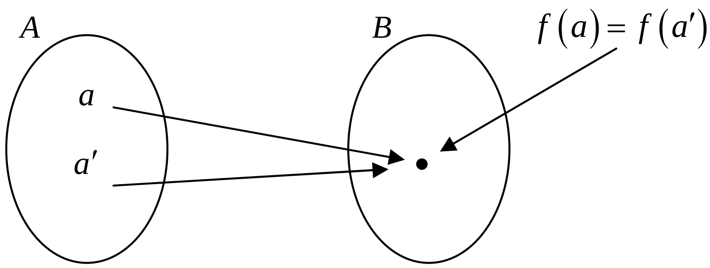
همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، این قضیه **دو طرفه** است. اثبات یک طرف آن سرراست است، ولی طرف دیگر قدری **فنی‌تر** است و توجه بیشتری را می‌طلبد. همان‌طور که بارها گفته‌ایم، قصد ما از اثبات کردن قضیه‌ها صرفاً این نیست که درستی حکم قضیه را نشان دهیم، بلکه بیشتر این است که **فنون** اثبات کردن را **بیاموزیم!**

(الف) ابتدا فرض می‌کنیم که f یک به یک است و درستی حکم اگر - نگاه (*) را اثبات می‌کنیم. به این منظور، فرض می‌کنیم که برای مجموعه‌ای چون C و توابعی چون $h,k:C\to A$، داریم $f\circ h=f\circ k$. حال باید از یک به یک بودن f استفاده کنیم و نشان دهیم که $h=k$. یعنی، برای هر $c\in C$، $h(c)=k(c)$. مراحل اثبات این مطلب را با دلیل کامل کنید:

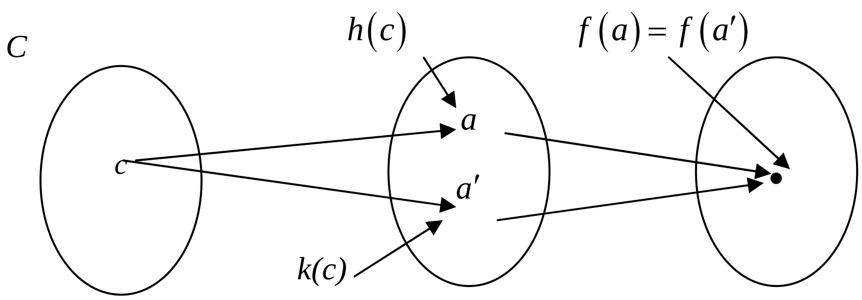
$$\begin{aligned} f\circ h=f\circ k &\Rightarrow (f\circ h)(c)=(f\circ k)(c)\\ &\Rightarrow\cdots\\ &\Rightarrow h(c)=k(c) \end{aligned}$$

(زیرا . . .)

(ب) برای اثبات عکس قضیه، درستی (*) را می‌پذیریم و نشان می‌دهیم که f یک به یک است. برای اثبات یک به یک بودن f، فرض می‌کنیم که $f(a)=f(a')$ و با استفاده از (*) نشان می‌دهیم که $a=a'$.



حال مسئله این است که چطور از (❋) استفاده کنیم. با کمی دقت بر **سورهای عمومی** (❋) متوجه می‌شویم که انتخاب مجموعه‌ی C و جفت تابع h، k **دست ما است**. پس، مجموعه‌ای چون C و دو تابع $h,k:C\to A$ را طوری **انتخاب** می‌کنیم که برای عضوی چون $c\in C$، $h(c)=a$ و $k(c)=a'$ و $f\circ h=f\circ k$. در این صورت (❋) بیان می‌کند که باید $h=k$ یعنی $h(c)=k(c)$ و در نتیجه $a=a'$.



کافی است C را تک عضوی انتخاب کنیم و $h,k:\{c\}\to A$ را به صورت، $h(c)=a$ و $k(c)=a'$ تعریف کنیم. حال به روشنی داریم $f\circ h=f\circ k$ (**درست است ؟**)

پس، بنابر (❋)، $h=k$ یعنی $a=h(c)=k(c)=a'$ و حکم اثبات شده است!

(**جالب و فنی بود، نبود ؟!**) ■

حال کمک کنید همتای این قضیه را برای توابع پوشا اثبات کنیم.

۸.۱.۷ قضیه

*تابع $f:A\to B$ **پوشا** است اگر و تنها اگر نسبت به ترکیب توابع، از **سمت راست حذف شود**.* یعنی،

$$(\forall D, \forall h,k:B\to D) \qquad h\circ f = k\circ f \Rightarrow h=k \qquad (*)$$

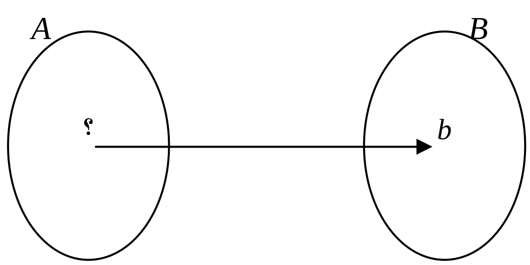
اثبات

این حکم نیز دو طرفه و اثبات یک طرف آن آسان‌تر است.

$(\Leftarrow)$ ابتدا فرض می‌کنیم که f **پوشا** است و درستی حکم اگر - آنگاه (*) را اثبات می‌کنیم. به این منظور، فرض می‌کنیم که برای مجموعه‌ی D و توابعی چون $h,k:B\to D$، داریم $h\circ f = k\circ f$. حال باید از پوشا بودن f استفاده کنیم و نشان دهیم که $h=k$. یعنی، برای هر $b\in B$، $h(b)=k(b)$. دلیل هر مرحله از اثبات زیر را بیان کنید:

$$\begin{aligned} b\in B \quad &\Rightarrow \exists a\in A, f(a)=b \\ &\Rightarrow h(b)=h\big(f(a)\big) \quad \& \quad k(b)=k\big(f(a)\big) \\ &\Rightarrow h(b)=(h\circ f)(a) \quad \& \quad k(b)=(k\circ f)(a) \\ &\Rightarrow h(b)\Rightarrow (h\circ f)(a)=(k\circ f)(a)=k(b) \end{aligned}$$

$(\Rightarrow)$ برای اثبات عکس قضیه، درستی (*) را می‌پذیریم و نشان می‌دهیم که $f:A\to B$ پوشا است. به این منظور، فرض می‌کنیم $b\in B$ و با استفاده از (*) وجود عضو $a\in A$ را با ویژگی $f(a)=b$ اثبات می‌کنیم.



این قسمت حتی **فنی**‌تر از همتای آن در قضیه‌ی قبل است. از آنجا که ما اثبات را قبلاً دیده‌ایم، آن‌را می‌آوریم تا شما نیز **فن** آن را **بیاموزید**. برهان خلف را به کار می‌بریم و فرض می‌کنیم که b **پیش‌نگاره‌ای** تحت f در A **ندارد**. یعنی هیچ عضو A تحت f به b نگاشته نشود. حال مجموعه‌ی D را برابر با مجموعه‌ی سه عضوی $\{۱,۲,۳\}$ در نظر می‌گیریم و توابع $h,k:B\to D$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$h(x)=\begin{cases}۱, & x=b \text{ اگر}\\ ۲, & x\neq b \text{ اگر}\end{cases} \qquad k(x)=\begin{cases}۳, & x=b \text{ اگر}\\ ۲, & x\neq b \text{ اگر}\end{cases}$$

با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که $h\circ f=k\circ f$ (**چطور؟**)، پس بنابر (※) باید $h=k$ و در نتیجه $h(b)=۱$ با $k(b)=۲$ برابر باشد، که **نیست**. این **تناقض** نشان می‌دهد که فرض خلف بالا نادرست است، یعنی b باید پیش‌نگاره‌ای تحت f در A داشته باشد و پوشا بودن f اثبات شده است! (**خیلی فنی بود، نبود؟** به هر حال، شما نیز اثبات را دیدید!) ■

حتماً این اثبات‌های فنی و اندکی مشکل، شما را خسته کرده است. البته **یقیناً لذت هم برده‌اید!** احکام دیگری معادل با یک به یک و پوشا بودن وجود دارند که بعداً خواهیم دید.

اندیشه ورزی را تمرین کنید. **اندیشه ورزی را تمرین کنید.**

تمرین ۱.۷

۱. تابع های $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌های $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=x+۲$ در نظر بگیرید. **آیا** f یا g یک به یک هستند؟

۲. فرض کنید $A=\{u,v,w\}$ و $B=\{a,b\}$.

(الف) همه‌ی تابع های از A به B را مشخص کنید.

(ب) کدام‌ها پوشا هستند؟

(پ) کدام‌ها یک به یک هستند؟

(ت) کدام‌ها دوسویی هستند؟

۳. آیا به سؤال های بحث **۳.۱.۷** پاسخ دادید؟

۴. آیا به سؤال های بحث **۴.۱.۷** پاسخ دادید؟ یکریختی $f(A)$ $f : A \xrightarrow{\cong} f(A)$ برای بند **۱** چطور است؟ چهار جواب برای سؤال بند **۲** وجود دارد. برای مثال، $C=\{a,c\}$ یا $C=\{a,d\}$. **دو پاسخ** دیگر کدام اند؟

۵. مثال‌هایی از تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ بیاورید که

(الف) یک به یک و پوشا باشد.

(ب) یک به یک باشد ولی پوشا نباشد.

(پ) یک به یک نباشد ولی پوشا باشد.

(ت) نه یک به یک و نه پوشا باشد.

۶. فرض کنید تابع $f:X\to Y$ **پوشا** باشد و $B,C\subseteq Y$. ثابت کنید که اگر $\overleftarrow{f}(B)=\overleftarrow{f}(C)$ آنگاه $B=C$. مثالی بیاورید که نشان دهد اگر f پوشا نباشد، این حکم نادرست است.

۷. قضیه‌های جالب و مهم **۷.۱.۷** و **۸.۱.۷** را یک بار خودتان اثبات کنید. آیا می‌توانید برای اثبات **عکس** این حکم ها مجموعه‌ی C را طور دیگری انتخاب کنید؟

۸. ابتدا قضیه‌ی **۶.۲.۶** را ببینید. حال اثبات کنید که تابع $f:A\to B$ یک به یک است اگر و تنها اگر

$$(\forall C,D\subseteq A)\quad f(C\cap D)=f(C)\cap f(D).$$

(از یک به یک بودن f به راحتی می توانید تساوی بالا را اثبات کنید. ولی اثبات عکس این حکم، **قدری فنی است، هوشمندی و دقت بیشتری می طلبد، و بسیار آموزنده است!!** برای اثبات یک به یک بودن f باید، مانند عکس قضیه‌ی

۷.۱.۷، زیرمجموعه های C و D را خودتان چنان **انتخاب** کنید که مسئله را حل کند. تمرین های **۹** تا **۱۳** نیز **به همین زیبایی** هستند.)

۹. (مشابه تمرین **۸** است. توضیح داده شده در تمرین **۸** را نیز ببینید.) ثابت کنید که تابع $f:A\to B$ یک به یک است اگر و تنها اگر

$$(\forall C,D\subseteq A)\quad f(C\setminus D)=f(C)\setminus f(D)$$

۱۰. (مشابه تمرین **۸** است. توضیح داده شده در تمرین **۸** را نیز ببینید.) ثابت کنید که تابع $f:A\to B$ یک به یک است اگر و تنها اگر

$$(\forall X\subseteq A)\quad f(A\setminus X)\subseteq B\setminus f(X)$$

۱۱. ثابت کنید که تابع $f:A\to B$ یک به یک است اگر و تنها اگر

$$(\forall X\subseteq A)\quad \overleftarrow{f}(f(X))=X$$

۱۲. ثابت کنید که تابع $f:A\to B$ پوشا است اگر و تنها اگر

$$(\forall X\subseteq A)\quad B\setminus f(X)\subseteq f(A\setminus X)$$

۱۳. ثابت کنید که تابع $f:A\to B$ پوشا است اگر و تنها اگر

$$(\forall Y\subseteq B)\quad f(\overleftarrow{f}(Y))=Y$$

۱۴. فرض کنید که تابع f دوسویی است و تابع‌های $f\circ g$ و $h\circ f$ تعریف شوند. نشان دهید که

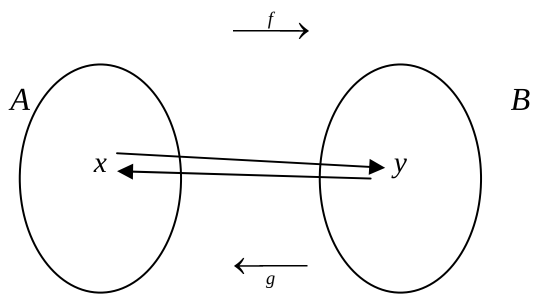
(الف) تابع h یک به یک است اگر و تنها اگر $h\circ f$ یک به یک باشد.

(ب) تابع g پوشا است اگر و تنها اگر $f\circ g$ پوشا باشد.

۱۵. فرض کنید تابع‌های $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}A$ طوری باشند که $h\circ g\circ f$ و $g\circ f\circ h$ یک به یک باشند و $f\circ h\circ g$ پوشا باشد. ثابت کنید که هر سه تابع f ، g، و h دوسویی هستند!

۲.۷ وارون‌های توابع

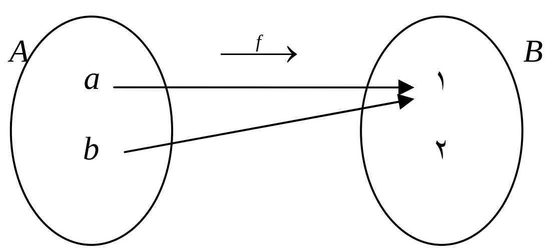
در این بخش درباره‌ی یک جفت **دســـتگاه** (توابـع $f:A\to B$ و $g:B\to A$) صحبت می‌کنیم که هر یک (یا یکی) اثر دیگری را خنثی کند. به این معنی که اگر اثـر f بر ورودی x آن را به y تبدیل کند، اثر g بر y همان x را باز پس دهد، و بر عکس.



ولی **آیا** برای هر تابع دلخواه $f:A\to B$ ، حتماً **چنین تابع** $g:B\to A$ وجود دارد؟ **پاسخ منفی است!**

۱.۲.۷ بحث در کلاس

تابع زیر را در نظر بگیرید.



تنها چهار **تابع** از B به A وجود دارند. آن‌ها را با جدول‌های زیر تعریف کنید.

	۱	۲
	b	?

	۱	۲
	b	?

	۱	۲
	a	?

	۱	۲
	a	b

ولی هر یک به دلیلی نمی‌تواند نقش g را بازی کند (**چطور؟**) البته می‌توان دید که **رابطه‌ی** $R=\{(۱,a),(۱,b)\}$ اثر f را خنثی می‌کند، و بر عکس f اثر R را خنثی می‌کند (**درست است؟**) ولی این **رابطه**، یک **تابع نیست!** (**هست؟**) اگر تا اینجای بحث سؤالی ندارید، تعریف رسمی زیر را ببینید.

۲.۲.۷ تعریف

تابع $g:B\to A$ را **وارون** تابع $f:A\to B$ (و f را **وارون** g) می‌گوییم اگر برای هر $a\in A$ و هر $b\in B$،

$$f(a)=b \Leftrightarrow g(b)=a$$

به عبارت دیگر، $g\big(f(a)\big)=a$ و $f\big(g(b)\big)=b$ ، یعنی $g\circ f=id_A$ و $f\circ g=id_B$.

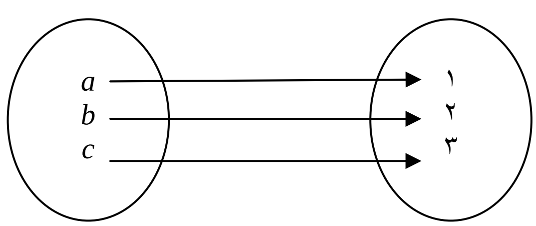
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "id_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

دیدیم که تابع f ممکن است وارون نداشته باشد.

تابعی را که وارون دارد، وارون‌پذیر می‌نامیم.

۳.۲.۷ بحث در کلاس

۱- وارونی برای تابع زیر بیابید.



۲- تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $f(x)=x^{3}+5$ در نظر بگیرید و وارونی برای آن بیابید.

۳- **آیا** تابع $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ با همان ضابطه‌ی $f(x)=x^{3}+5$ وارون دارد؟

در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم که وارون تابع f (البته در صورت وجود) منحصر به فرد است . از این رو

وارون تابع $f:A\to B$ را با $f^{-1}:B\to A$ نشان می‌دهیم.

معمولاً برای حل کردن مسئله‌های واقعی مانند بحث **۳.۲.۷** مشکلی ندارید. حال با شرکت در اثبات قضیه‌های مجرد، **اندیشه ورزی کنید.**

۴.۲.۷ قضیه

وارون تابع $f:A\to B$ ، در صورت وجود، یکتا است.

اثبات

با روش اثبات **یکتایی** آشنا شده‌اید. فرض می‌کنیم هر دو تابع $g,h:B\to A$ وارون تابع f باشند. مراحل زیر را با دلیل کامل کنید:

$$\begin{aligned} g &= g\circ id_B \\ &= g\circ(f\circ h) \\ &= \cdots \\ &= \cdots \\ &= h \end{aligned}$$

۵.۲.۷ بحث در کلاس

۱- فرض کنید $f:A\to B$ و $g:B\to C$ وارون‌پذیر باشند. برای اینکه نشان دهید تابع $f^{-1}\circ g^{-1}$ وارون $g\circ f$ است، یعنی $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$، چه می‌کنید؟ مبتدیان گاهی در ارائه‌ی اثبات این مطلب اشتباه می‌کنند! باید نشان دهید که $(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=id_C$ و $(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=id_A$.

اثبات درستی تساوی اول به صورت زیر است.

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=g\circ(f\circ f^{-1})\circ g^{-1}=g\circ id_B\circ g^{-1}=g\circ g^{-1}=id_C$$

۲- نشان دهید که اگر تابع $f:A\to B$ وارون‌پذیر باشد، آنگاه $(f^{-1})^{-1}=f$.

گاهی برای تابع $f:A\to B$ تابع $g:B\to A$ وجود دارد که دارای یکی از دو ویژگی $g\circ f=id_A$ یا $f\circ g=id_B$ است، و دیگری لزوماً برقرار نیست. این حالت‌ها نیز بسیار مفید هستند.

۶.۲.۷ تعریف

۱- تابع $g:B\to A$ را **وارون چپ** تابع $f:A\to B$ می‌نامیم اگر تابع g اثر تابع f را خنثی کند. یعنی، برای هر $a\in A$،

$$f(a)=b\Rightarrow g(b)=a$$

یا $g(f(a))=a$ یا $g\circ f=id_A$. (توجیه واژه‌ی **چپ**.)

۲- تابع $h:B\to A$ را **وارون راست** $f:A\to B$ می‌نامیم اگر تابع f اثر تابع h را خنثی کند. یعنی، برای هر $b\in B$،

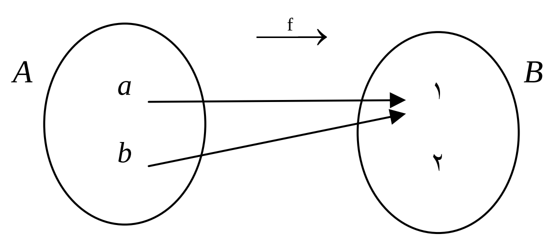
$$h(b)=a\Rightarrow f(a)=b$$

یا $f(h(b))=b$ یا $f\circ h=id_B$. (توجیه واژه‌ی **راست**.)

دوباره متذکر می‌شویم که **وارون‌های** چپ یا راست تابع **باید تابع باشند.**

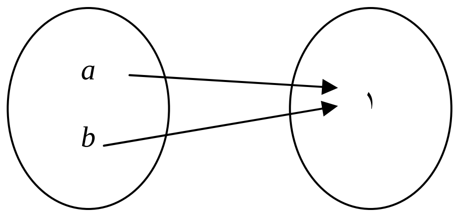
۷.۲.۷ بحث در کلاس

۱- تابع مذکور در بحث **۱.۲.۷** را در نظر بگیرید.

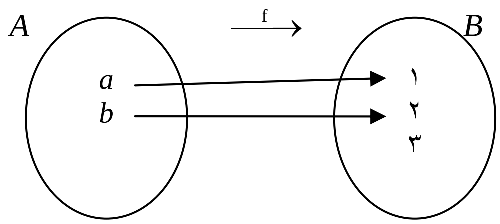


از چهار تابعی که از B به A وجود دارند، هیچ‌کدام وارون **چپ** f نیست! (**بررسی کنید**). آیا هیچ‌کدام وارون **راست** f است؟

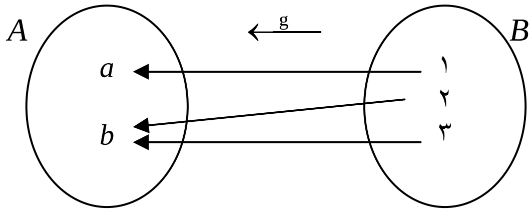
۲- نشان دهید که تابع زیر دو وارون راست دارد ولی وارون چپ ندارد.



۳- تابع زیر را در نظر بگیرید.



روشن است که **تابع** g از B به A که در زیر مشخص شده است وارون چپ f است (اثر f را خنثی می‌کند).



یک تابع دیگر نیز از B به A وارون چپ f است! آن را بیابید.

۴- آیا تابع f در بند **۳** وارون راست دارد؟

حال نوع **مجرد**ی از سؤال‌ها را به بحث می‌گذاریم.

۸.۲.۷ بحث در کلاس

۱- **آیا** هر تابع وارون‌پذیر دارای وارون چپ و وارون راست است؟ **البته که دارد!**

۲ - **آیا** اگر $g:B\to A$ وارون چپ $f:A\to B$ و $h:B\to A$ وارون راست f باشد، $g=h$؟ (مراحل اثبات قضیه‌ی **۴.۲.۷** را ببینید).

دیدیم که تابع $f:A\to B$ ممکن است وارون چپ، راست، یا وارون (دو طرفه) **داشته** یا **نداشته** باشد. **چطور** می‌توانیم تشخیص دهیم که چنین وارون‌هایی برای f وجود دارند یا وجود ندارند؟ احتمالاً با بررسی مثال‌های این بخش حدس‌هایی زده‌اید!

قضیه‌ی مهم زیر را ببینید.

۹.۲.۷ قضیه

فرض کنیم $f:A\to B$ تابع است. در این صورت،

۱- *(با شرط $A\neq\emptyset$ اگر $B\neq\emptyset$)، f **وارون چپ** دارد اگر و تنها اگر f **یک به یک** باشد.*

۲- *تابع f **وارون راست** دارد اگر و تنها اگر f **پوشا** باشد.*

۳- *تابع f **وارون** (دوطرفه) دارد اگر و تنها اگر f **دوسویی** باشد.*

اثبات

مانند قضیه‌های دوطرفه‌ی **۶.۱.۷** و **۷.۱.۷**، یک طرف هر یک از این احکام سرراست اثبات می‌شود ولی طرف دیگر آن‌ها قدری **فنی** است.

۱- ابتدا فرض می‌کنیم که f دارای وارونی چپ چون $g:B\to A$ باشد. مراحل زیر را که نشان می‌دهند f یک به یک است، کامل کنید.

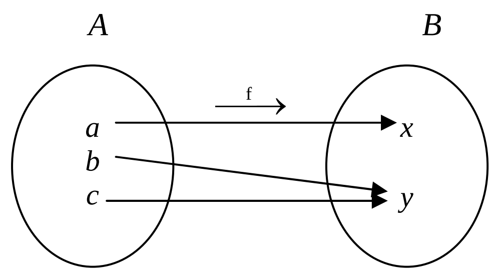
$$f(a)=f(a')\Rightarrow g(f(a))=g(f(a'))$$ (شرط **۲** تابع بودن)

$$\Rightarrow \ldots$$ (زیرا g وارون چپ f است)

برعکس، فرض می‌کنیم f یک به یک است و وارونی چپ چون g برای f می‌یابیم (**ناتهی** بودن A در این قسمت استفاده می‌شود). **لذت** تعریف کردن g را به شما واگذار می‌کنیم. برای راهنمایی، بند **۳** بحث **۶.۲.۷** را ببینید.

۲- ابتدا فرض می‌کنیم که f دارای وارونی چون $h : B \to A$ است. یعنی، برای هر $b \in B$، $f(h(b)) = b$. برای اثبات پوشا بودن f، فرض می‌کنیم $b \in B$ دلخواه است. به کمک h عضوی چون $a \in A$ پیدا می‌کنیم که $f(a) = b$. حدس می‌زنید با داده‌های $h : B \to A$ و $b \in B$، عضو a کدام عضو A می‌تواند باشد؟ درست حدس زدید، $a = h(b)$. زیرا $f(a) = f(h(b)) = b$.

برعکس، فرض می‌کنیم f پوشا است و وارونی راست چون $h : B \to A$ برای f پیدا می‌کنیم. در اینجا نیز لذت تعریف کردن h را به شما واگذار می‌کنیم. برای راهنمایی، بند **۲** بحث **۶.۲.۷**، یا روش حل مثال زیر، را ببینید.



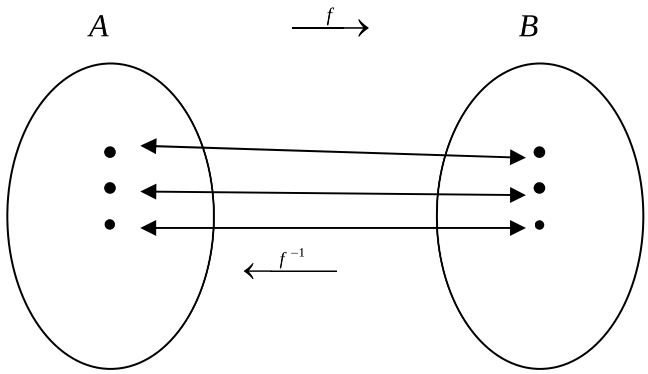
h باید x را به a و y را به یکی، و تنها یکی، از دو عضو b یا c بنگارد تا اینکه f بتواند اثر h را خنثی کند. مشاهده می‌کنیم که در این مثال، f دارای دو وارون راست است:

	x	y
	a	c

	x	y
	a	b

۳- برای اثبات این قسمت، از بندهای **۱** و **۲** قضیه و بحث **۷.۲.۷** استفاده کنید. ■

با توجه به قسمت **۳** قضیه‌ی بالا، گاهی واژه‌ی **تناظر یک به یک** نیز برای تابع دوسویی به‌کار می‌رود. زیرا f وارون دوطرفه دارد و در نتیجه هر عضو دامنه دقیقاً با یک عضو همدامنه توسط f و f^{-1} در ارتباط دو طرفه است. شکل زیر را ببینید.



به دلیل اهمیت قضیه‌های **۶.۱.۷**، **۷.۱.۷**، **۸.۲.۷**، آن‌ها را مجدداً در زیر جمع‌بندی می کنیم.

۱۰.۲.۷ قضیه

۱- *تابع* $f:A\to B$ ***یک به یک*** *است* ***اگر و تنها اگر*** *در ترکیب توابع از* ***چپ حذف شود، اگر و تنها اگر*** *(با شرط* $A\neq\emptyset$*)* ***دارای وارون چپ*** *باشد.*

۲- *تابع* $f:A\to B$ ***پوشا*** *است* ***اگر و تنها اگر*** *در ترکیب توابع* ***از راست حذف شود، اگر و تنها اگر دارای وارون راست*** *باشد.*

تمرین ۲.۷

۱. ثابت کنید که تابع حقیقی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=3x-2$ دوسویی است و وارون آن را تعریف کنید.

۲. نشان دهید که تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ با تعریف $f(n)=n^2$ وارون راست ندارد، و دست کم دو وارون چپ برای آن تعریف کنید!

۳. فرض کنید که $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$. نشان دهید که تابع $g:S\to S$ با تعریف $g(x)=x^2$ دوسویی است و وارون آن را تعریف کنید.

۴. آیا تابع حقیقی $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با تعریف $h(x)=x^{2}$ دوسویی است؟

تابع $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی

$$f(x)=\frac{x}{1-x^{2}}$$

در نظر بگیرید. نشان دهید که تابع $g:\mathbb{R}\to(0,1)$ با تعریف زیر وارون f است:

$$g(x)=\frac{2x}{1+\sqrt{1+4x^{2}}}$$

۵. نشان دهید که تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ با تعریف زیر یک بـه یـک اسـت و یـک وارون چپ برای آن بیابید:

$$f(t)=((t+1)^{2},2t+1)^{3})$$

۶. آیا به سؤال‌های جالب بحث **۷.۲.۷** پاسخ دادید؟

۷. حکم بند **۲** بحث **۸.۲.۷** را اثبات کنید.

۸. فرض کنید که $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{x,y\}$. تابع $f=\{(a,x),(b,y),(c,y)\}$ را در نظر بگیرید.

(الف) همه‌ی **رابطه**‌های از B به A را بنویسید به طوری کـه **به عنـوان رابطـه** وارون چپ f باشند. از این رابطه‌ها کدام‌ها **تابعی** از B به A هستند؟

(ب) همه‌ی رابطه‌های از B به A را بنویسید به طوری که **به عنوان رابطـه** وارون راست f باشند. از این رابطه‌ها کدام‌ها تابعی از B به A هستند؟

۹. اثبات قضیه‌ی بسیار **مهم**، **جالب**، **فنـی**، و **هوشـمندانه‌ی**(!) **۱۰.۲.۷** را بـدون رجوع به متن به طور کامل بنویسید.

۱۰. فـرض کنیـد $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}A$ تـابع باشـند بـه‌طـوری کـه $h\circ g\circ f=id_A$، $f\circ h\circ g=id_B$، و $g\circ f\circ h=id_C$. نشان دهید که هر سه تابع f، g، و h دوسویی هستند و وارون آن‌ها را مشخص کنید.

۱۱. فرض کنید که $S\neq\varnothing$ و $f:S\to T$ تـابع اسـت. نشـان دهیـد کـه تـابعی چـون $h:T\to S$ وجود دارد به‌طوری که $f\circ h\circ f=f$. از این مطلب نتیجه بگیرید که

(الف) هر تابع با دامنه‌ی ناتهی یک به یک است اگـر و تنهـا اگـر وارون چـپ داشـته باشد.

(ب) هر تابع پوشا است اگر و تنها اگر وارون راست داشته باشد.

۱۲ . نشان دهید که تابعی که وارون راست منحصر به فرد دارد، دوسویی است.

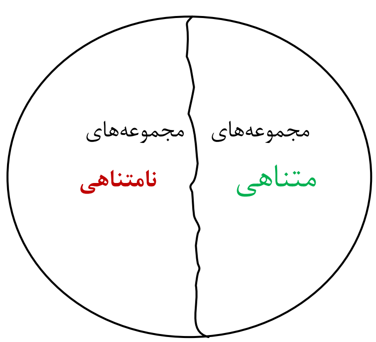
۱۳. آیا تابعی که وارون چپ منحصر به فرد دارد، دوسویی است؟

۱۴. فرض کنید $f \circ g$ تعریف شود و هر دو تابع f و g وارون چپ داشته باشند. نشان دهید که $f \circ g$ نیز وارون چپ دارد.

فصل ۸

یکریختی مجموعه‌ها

همان طور که در مقدمه‌ی بخش رابطه‌ی هم‌ارزی بیان شد، شیءها را علاوه بر مساوی (**عین هم**) بودن، به صورت‌های دیگری نیز می‌توان **یکسان در نظر گرفت** و در یک دسته قرار داد. **شما** علاوه بر مساوی بودن به چه صورت دیگری مایلید مجموعه‌ها را **یکسان** در نظر بگیرید؟ و آن‌ها را **دسته‌بندی** کنید؟ برای مثال، ممکن است مایل باشید آن‌ها را بر حسب **متناهی** یا **نامتناهی** بودن به دو دسته تقسیم کنید.



به چه صورت دیگری مایل هستید که مجموعه‌ها را دسته‌بندی کنید؟ شاید به طور طبیعی بخواهید آن‌ها را بر حسب **تعداد عضو** دسته‌بندی کنید و، برای مثال، مجموعه‌های ۰،۱،۲،۳، ... عضوی را در دسته‌های جدا از هم قرار دهید. در این صورت $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ در کدام دسته‌ها قرار می‌گیرند؟ آیا همه را در یک دسته قرار می‌دهید؟ **تعداد عضوهای** این مجموعه‌ها و بسیاری از مجموعه‌های دیگر را چطور با هم **مقایسه می‌کنید؟** در این فصل ابزار مناسب برای این مقایسه را فراهم می‌کنیم و در فصل‌های بعدی پی می‌گیریم.

۱.۸ یکریختی مجموعه‌ها

دراین بخش ابزار مناسب برای پاسخ به سؤال‌های بالا را فراهم می‌آوریم. **آیا** لازم است اندازه‌ی دو طناب را بدانیم تا بتوانیم هم‌طول بودن یا نبودن آن‌ها را تشخیص دهیم؟ **آیا** باید شمردن بدانیم تا بتوانیم هم‌تعداد بودن یا نبودن عضوهای دو مجموعه را تشخیص دهیم؟ کودکی که هنوز شمردن نمی‌داند چطور تعداد آب‌نبات‌های خودش را با تعداد آب‌نبات‌هایی که برادرش از مادر گرفته، مقایسه می‌کند تا ببیند باید **جنگ جهانی** را راه بیندازد یا خیر؟ حتماً ریاضی‌دان برجسته‌ی انگلیسی، **کانتور**، به‌یاد آورد که در کودکی **تناظری یک به یک** بین آب‌نبات‌های خودش با آب‌نبات‌های برادرش ایجاد می‌کرده و از این رو تعریف زیر را ارائه داد!

۱.۱.۸ تعریف

دو مجموعه‌ی A و B را **یکریخت** (**هم ارز** یا **همعدد**) می‌گوییم اگر تابعی دوسویی (تناظری یک به یک) چون $f: A \to B$ وجود داشته باشد. در این صورت، مشابه تساوی، می نویسیم $A \cong B$.

۲.۱.۸ تذکر

با توجه به این تعریف، هر تابع دوسویی را **یکریختی** نیز می‌نامند. یادآوری می‌کنیم که هر تابع دوسویی $f : A \to B$ (یعنی یک به یک و پوشا) **وارون‌پذیر** است و وارون آن $f^{-1} : B \to A$ نیز دوسویی است. پس برای اثبات یکریخت بودن A با B تفاوتی نمی‌کند که تابعی دوسویی از A به B پیدا کنیم یا از B به A.

همچنین، برای اثبات یکریخت بودن A با B، گاهی راحت‌تر است که دو تابع $f : A \to B$ و $g : B \to A$ تعریف کنیم و نشان دهیم که وارون یکدیگرند، یعنی نشان دهیم که $g \circ f = id_A$ و $f \circ g = id_B$.

۳.۱.۸ بحث در کلاس

۱- روشن است که هریک از دو تابع یکریختی (وارون‌پذیر یا دوسویی)

$$\begin{array}{c|cc} & u & v \\ \hline & b & a \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & u & v \\ \hline & a & b \end{array}$$

دلیلی برای یکریخت بودن $\{u,v\}$ و $\{a,b\}$ است. دو مجموعه‌ی $\{u,v,w\}$ و $\{a,b,c\}$ به چند طریق با هم یکریخت هستند؟

۲- با استفاده از مطالب **فصل ۷**، نشان دهید که **یکریخت بودن مجموعه‌ها** انعکاسی $(A \cong A)$، تقارنی $(A \cong B \Rightarrow B \cong A)$، و متعدی $(A \cong B \cong C \Rightarrow A \cong C)$ است. برای مثال، وجود $id : A \to A$ دلیل یکریختی $A \cong A$ است.

۴.۱.۸ بحث در کلاس

سؤال‌های مجرد زیر را قبلاً با واژه‌های دیگری دیده‌اید. (**درکجا؟**)

۱- نشان دهید که اگر تابعی یک به یک چون $f : A \to B$ وجود داشته باشد، آنگاه A با زیرمجموعه‌ای از B یکریخت است.

۲- نشان دهید که اگر تابعی پوشا چون $f : A \to B$ وجود داشته باشد، آنگاه B با زیرمجموعه‌ای از A یکریخت است.

بحث و بررسی سؤال‌های بالا و آنچه در زیر می‌آیند، نه تنها **سلول‌های خاکستری** مغز را فعال‌تر می‌سازند، بلکه هر یک از این مطالب را به مرور مورد استفاده قرار می‌دهیم.

۵.۱.۸ بحث در کلاس

۱- **آیا** تابع زیر دوسویی است ؟

$$\begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ ۲ & ۱ & ۳ & \cdots \end{array}$$

تابع زیر **چطور؟**

$$\begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ ۵ & ۱۰ & ۱۵ & \cdots \end{array}$$

۲- فرض کنید $A=\{۱۰۰n \mid n\in\mathbb{N}\}$. نشان دهید که $\mathbb{N}$ با A یکریخت است.

توجه کنید که لزومی ندارد که توابع را با **فرمولی زیبا** معرفی کنیم. ولی اگر بخواهید دو تابع بند **۱** را با ضا بطه بنویسید، اولی را می‌توانید به صورت زیر بنویسید:

$$f(n)=\begin{cases} ۲ & \text{اگر } n=۱ \\ ۱ & \text{اگر } n=۲ \\ n & \text{اگر } n\geq ۳ \end{cases}$$

برای دومی، فرض کنید $A=\{۵n \mid n\in\mathbb{N}\}$ و سپس $f:\mathbb{N}\to A$ را با ضابطه‌ی $f(n)=۵n \mid n\in\mathbb{N}\}$ تعریف کنید.

۷.۱.۸ بحث در کلاس

نشان دهید که $\mathbb{N}$ با هر یک از مجموعه‌های زیر یکریخت است. (مثال‌های بالا را ببینید.)

۱- $\mathbb{N}_{\circ}=\mathbb{N}\cup\{\circ\}$.

۲- $A=\{a,b,c\}\cup\mathbb{N}$.

۳- $\mathbf{E}$ ؛ مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج.

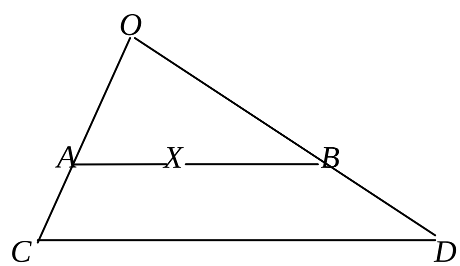
۴- $\mathbf{O}$؛ مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد.

۵- مجموعه‌ی مضارب طبیعی عدد مفروض k.

۶- $G=\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}$؛ که به مجموعه‌ی **گالیله** معروف است.

۷- $\mathbb{Z}$؛ این یکی قدری **فنی‌تر** است! اگر توانستید، **آفرین بر شما!**

۸- این مسئله بسیار **جالب** است! با استفاده از یک خط‌کش، نشان دهید که تناظری دوسویی بین مجموعه‌های نقاط هر دو پاره خط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ (هر اندازه کوچک یا هر اندازه بزرگ) وجود دارد! به این منظور، مثلث زیر را رسم کنید:



حال نقطه‌ی A را به C و B را به D نظیر کنید. به کمک خط‌کش نقطه‌ی X را به چه نقطه‌ای از $\overline{CD}$ نظیر می‌کنید؟ چطور؟

با این روش می‌توانید نشان دهید که هر دو بازه‌ی $[a,b]$ و $[c,d]$ یکریخت هستند. بازه های (a,b) و (c,d) **چطور؟**

ما نیز مانند برخی از شما وقتی برای اولین بار قضیه‌ی زیر را دیدیم، **خیلی تعجب کردیم!**

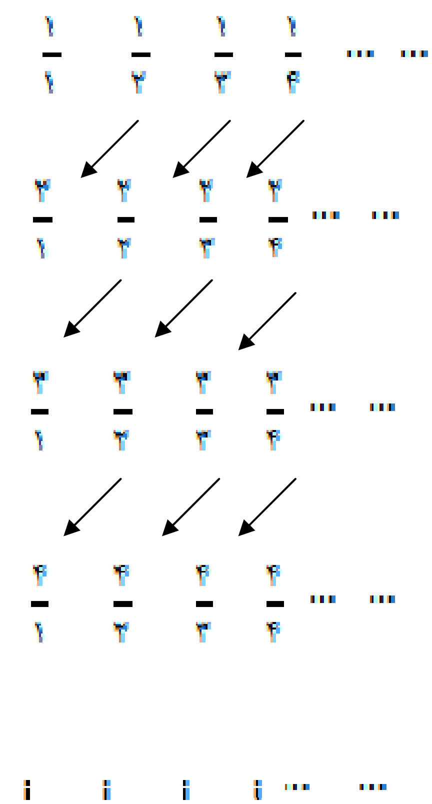
۸.۱.۸ قضیه

مجموعه‌ی اعداد گویا، $\mathbb{Q}$، با $\mathbb{N}$ یکریخت است.

اثبات

بعداً که ابزارهای بیشتری معرفی شدند، این قضیه را به روش دیگری نیز اثبات خواهیم کرد. روش جالب و مفید زیر به **روش قطری کانتور** معروف است.

ابتدا عددهای گویای مثبت را در جدول زیر می‌چینیم:



حال آن‌ها را در امتداد قطرهای از راست به چپ و از بالا به پایین در نظر می‌گیریم، و عددهای تکراری را فقط بار اول در نظر می‌گیریم. به این ترتیب تناظری از $\mathbb{N}$ به فهرست عددهای گویای مثبت به صورت:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸ . . .
۱/۱	۱/۲	۲/۱	۱/۳	۳/۱	۱/۴	۲/۳	۳/۲ . . .

به دست می‌آوریم. اعداد منفی چطور؟ با وجودی که کار تمام شده است و لازم

نیست ضابطه‌ای فرمولی ارائه دهیم، عدد گویای مثبت n ام در **قطری خوانی** بالا را a_n می‌نامیم. سپس تابع دوسویی $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(n)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } n=1 \\ a_k & \text{اگر } n=2k\text{، } k\in N \\ -a_k & \text{اگر } n=2k+1\text{، } k\in N \end{cases}$$

■

۹.۱.۸ بحث در کلاس

۱- عضوهای $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ را مانند اثبات قضیه‌ی بالا بچینید (سطر اول آن به صورت . . . (۱,۳) , (۱,۲) , (۱,۱) است.) سپس **به روش قطری** استدلال کنید که $\mathbb{N}\cong\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

۲- نشان دهید که $\mathbb{R}\cong(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. تابع تانژانت را به خاطر بیاورید!

۳- علاوه بر روش هندسی بند **۸** بحث **۷.۱.۸**، با استفاده از تابع

$$f(x)=\frac{d-c}{b-a}x+\frac{bc-ad}{b-a}$$

نشان دهید که $[a,b]\cong[c,d]$ و $(a,b)\cong(c,d)$.

۴- از بندهای **۲** و **۳** چه نتیجه‌ی **باور نکردنی** حاصل می‌شود؟!

آیا به نظر شما همه‌ی مجموعه‌های نامتناهی با $\mathbb{N}$ یکریخت هستند؟ چنین تصوری احتمالاً در زمان کانتور نیز وجود داشت، تا اینکه او قضیه‌ی زیر را اثبات کرد. برای آمادگی درک اثبات‌های دو قضیه‌ی بعدی، **در بحث زیر شرکت کنید.**

۱۰.۱.۸ بحث در کلاس

دیدیم که برای اثبات یکریخت بودن دو مجموعه‌ی A و B کافی است تنها یک تابع یکریختی (دوسویی) بین آن‌ها تعریف کنیم. ولی **چطور** اثبات می‌کنید که A و B یکریخت نیستند؟ **آیا** کافی است تابعی بین آن‌ها تعریف کنیم که دوسویی نباشد؟! **یا** اینکه باید نشان دهیم که هیچ تابع **دوسویی** بین آن‌ها **وجود ندارد؟** اگر نشان

دهیم که هیچ تابع یک به یک یا هیچ تابع پوشا بین آن‌ها وجود ندارد، **چطور؟** اگر فرض کنیم که $f: A \to B$ تابعی **دلخواه** و نامشخص است و نشان دهیم که f نمی تواند یک به یک یا پوشا باشد، **چطور؟**

به اثبات جالب قضیه زیر با دقت توجه کنید. اگر بار اول کاملاً متوجه نشدید، یک بار دیگر آن را مرور کنید.

۱۱.۱.۸ قضیه

*مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، با $\mathbb{N}$ یکریخت **نیست**!*

اثبات

به روش برهان **خلف**، فرض می‌کنیم که تابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ یکریختی باشد. فرض می‌کنیم $f(n) = a_n.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots$ ، که در آن $a_n \in \mathbb{Z}$ و $۰ \le a_{nm} \le ۹$. نشان می دهیم که f نمی‌تواند پوشا باشد و به **تناقض** می رسیم! به این منظور عددی حقیقی چون $b = ۰.b_1 b_2 b_3 \ldots$ را به صورت

$$b_i = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } a_{ii} = ۰ \\ ۰, & \text{اگر } a_{ii} \neq ۰ \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که b در نگاره‌ی f قرار ندارد. برای دست‌یابی به این حکم، توجه می‌کنیم که

$$f(1) = a_1.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$$

و چون، با توجه به تعریف b، $a_{11} \neq b_1$ پس $f(1) \neq b$. به همین ترتیب، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، چون $a_{nn} \neq b_n$، داریم $f(n) \neq b$. **جالب بود، نبود؟** ■

حال که به همت **کانتور** مجموعه‌ای نامتناهی داریم که با $\mathbb{N}$ یکریخت نیست، این **سؤال** مطرح می‌شود که **آیا** مجموعه‌های نامتناهی تنها به **دو دسته** تقسیم می‌شوند؟ یک دسته آن‌هایی که با $\mathbb{N}$ یکریخت هستند و دسته دیگر آن‌هایی که با $\mathbb{R}$ یکریخت هستند؟ به عبارت دیگر، **آیا** مجموعه‌ای وجود دارد که با هیچ یک از دو مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{R}$ یکریخت نباشد؟ با کمال **تعجب**، به مرور خواهیم دید که کانتور مجموعه‌های نامتناهی را نیز به **بی‌نهایت** دسته تقسیم می‌کند! فعلاً **اثبات مجرد و جالب قضیه‌ی دیگری را تجربه کنید.**

۱۲.۱.۸ قضیه

برای هر مجموعه چون A $A \ncong \mathcal{P}(A)$!

اثبات

یقیناً از این حکم تعجب نکردید، زیرا اگر A متناهی باشد، روشن است که $A \neq \mathcal{P}(A)$ (**چرا؟**) اثبات بسیار **زیبا و جالب** زیر هر دو حالت متناهی و نامتناهی را در بر می‌گیرد.

به روش برهان خلف، **بر خلاف** حکم، فرض می‌کنیم $A \cong \mathcal{P}(A)$ و تابع $f : A \to \mathcal{P}(A)$ را به عنوان یکریختی در نظر می‌گیریم. چون f **پوشا** است، برای

$$X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(A)$$

عضوی چون $a_0 \in A$ **وجود دارد** به طوری که $f(a_0) = X$. حال با توجه به گزاره‌ی معرف X، داریم

$$a_0 \in X \Rightarrow a_0 \notin f(a_0)(= X) \Rightarrow a_0 \notin X\,(!)$$
$$a_0 \notin X \Rightarrow a_0 \in f(a_0)(= X) \Rightarrow a_0 \in X\,(!)$$

که در هر دو حالت ممکن، به تناقض می‌رسیم!!! پس فرض **خلف** بالا **نادرست** است و در نتیجه $A \ncong \mathcal{P}(A)$، و قضیه اثبات شده است.■

اگر شما نیز مانند ما برای اولین بار متوجه‌ی این اثبات **زیبا و بسیار فنی** نشدید، پیشنهاد می‌کنیم **یک بار دیگر اثبات، به ویژه مجموعه‌ی X، را مرور کنید!**

حال چند قضیه‌ی دیگر را مطرح می‌کنیم. **آن ها را به خوبی به خاطر بسپارید زیرا، علاوه بر اینکه سلول های خاکستری را فعال می‌کنند،**

همگی در فصل ۱۱ به کار می‌آیند.

ابتدا اثبات بسیار ساده‌ی احکام زیر را بنویسید.

۱۳.۱.۸ بحث در کلاس

۱- نشان دهید که $A\cong A\times\{۱\}\cong\{۱\}\times A$. تابع $f:A\to A\times\{1\}$ را **چطور** تعریف می‌کنید؟

۲- نشان دهید که $A\times B\simeq B\times A$. همچنین،

۳- $A\times(B\times C)\simeq(A\times B)\times C$.

با مراجعه به **فصل ۷**، به راحتی می‌توانید قضیه‌ی زیرا را به عنوان تمرین اثبات کنید.

۱۴.۱.۸ قضیه

فرض کنید $A_1\cong B_1$ و $A_2\cong B_2$. در این صورت،

۱- $A_1\times A_2\cong B_1\times B_2$

۲- *با فرض* $A_1\cap A_2=\varnothing=B_1\cap B_2$، *داریم*
$A_1\cup A_2\cong B_1\cup B_2$.

۳- $A_1\uplus B_1\cong A_2\uplus B_2$.

همان‌طور که دیدیم، برای اثبات یکریخت بودن A با B باید تابعی **دوسویی** بین آن‌ها تعریف کنیم (یا یک جفت تابع $A\to B$ و $B\to A$ تعریف کنیم که وارون

یکدیگرند). **کانتور**، **شرودر**، و **برنشتاین** این روش را قدری تقلیل دادند و در قضیه‌ی مهم زیر اثبات کردند که اگر بتوانیم تنها یک جفت تابع یک به یک (**نه لزوماً دوسویی**) چون $f:A\to B$ و $g:B\to A$ تعریف کنیم، آنگاه یقیناً یک تابع دوسویی چون h بین A و B وجود خواهد داشت (**که البته ممکن است برابر با f یا g نباشد**). این قضیه بیشتر به نام **شرودر– برنشتاین** معروف است.

۱۵.۱.۸ قضیه (شرودر– برنشتاین)

اگر توابع یک به یک $f:A\rightarrowtail B$ و $g:B\rightarrowtail A$ وجود داشته باشند، آنگاه $A\cong B$.

اثبات

اثبات‌های بسیاری برای این قضیه وجود دارد که **قدری پیچیده** اند. اگر از جزییات صرف‌نظر کنیم، شاید اثبات زیر ساده تر باشد. به هر حال، با توجه به زمان باقی مانده برای مطالب دیگر درس، استاد درس ممکن است از شما بخواهد که فقط یک بار خلاصه‌ی اثبات را که در زیر می‌آید مرور کنید، ولی، البته، حکم قضیه را در حل کردن مسئله‌ها **به‌کار ببرید**.

کافی است (**چرا؟**) قضیه را برای حالتی که $B\subseteq A$ و $g:B\rightarrowtail A$ تابع شمولی است، ثابت کنیم. مجموعه‌ی

$$D=\bigcup_{n=0}^{\infty}f^n(A\setminus B)=(A\setminus B)\cup f(A\setminus B)\cup f(f(A\setminus B))\ \cdots$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $f^0=id$ ، $f^2=(f|_B)\circ f$ ، .... حال تابع $h:A\to B$ با تعریف

$$h(a)=\begin{cases}f(a) & a\in D \text{ اگر}\\ a & a\in A-D \text{ اگر}\end{cases}$$

تابع دوسویی مورد نظر است: یک به یک است، زیرا f و تابع همانی یک به یک هستند. به علاوه، حالت $f(a)=a'$ ، $a\in D$ ، $a'\in A-D$ رخ نمی‌دهد. زیرا برای $a\in D$، $n\in\mathbb{N}_0$ و $x\in A-B$ وجود دارند که $a=f^n(x)$ و در نتیجه

$a' = f(a) = f^{n+1}(x)$ در D قرار دارد که **تناقض** است. همچنین h پوشا است، زیرا برای $b \in B$، از $B \subseteq A$ داریم $b \in A$، پس $b \in D$ یا $b \in A - D$. اگر $b \in A - D$ آنگاه $h(b) = b$. اگر $b \in D$ آنگاه $m \in \mathbb{N}_0$ و $x \in A - B$ وجود دارند به طوری که $b = f^m(x)$. ولی چون $b \in B$، حالت $m = 0$ رخ نمی‌دهد. حال

$$b = f^m(x) = f(f^{m-1}(x)) = h(f^{m-1}(x))$$

زیرا $f^{m-1}(x) \in D$ (چرا؟) ■

۱۶.۱.۸ بحث در کلاس

۱- روش اثبات بالا را برای مثالی ساده بررسی می‌کنیم. اگر چه به راحتی می توانیم تابعی دوسویی بین $\mathbb{N}$ و $\mathbb{N} \cup \{0\}$ تعریف کنیم، ولی برای نمایش روش اثبات بالا، تابع یک به یک زیر را در نظر می‌گیریم که پوشا نیست:

$$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$$
$$f(a) = a + 2$$

روشن است که، تنها عدد ۱ پوشیده نمی‌شود. حال،

$$D = \{0, f(0), f(f(0)), \cdots\} = \{0, 2, 4, \cdots\}$$

در پایان تابع $h : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ داده شده در اثبات قضیه به صورت زیر تعریف می شود، که به روشنی دوسویی است:

$$h(a) = \begin{cases} f(a) = a + 2, & a \in D = \{0, 2, 4, \ldots\} \text{ اگر} \\ a, & a \in A \setminus D = \{1, 3, 5, \ldots\} \text{ اگر} \end{cases}$$

مسئله‌های زیر را یک بار دیگر با استفاده از قضیه‌ی **شرودر- برنشتاین** حل کنید.

۲- نشان دهید که $\mathbb{N} \cong \mathbb{Q}$. توجه کنید که تابع شمولی $\mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{Q}$ یک به یک است. پس کافی است تابعی یک به یک چون $g : \mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{N}$ تعریف کنید. هر عضو ناصفر $\mathbb{Q}$ را به ساده ترین صورت $\frac{p}{q}$ بنویسید، که در آن $|p|, |q|$ نسبت به هم اول هستند. حال نشان دهید که تابع g با تعریف زیر یک به یک است:

$$g(p/q)=\begin{cases} ۳^{p}.۵^{q} & \text{اگر } p,q>۰ \\ ۱ & \text{اگر } p=۰ \\ ۲.۳^{|p|}.۵^{|q|} & \text{اگر } p<۰ \text{ یا } q \end{cases}$$

۳- مشابه بند**۲**، نشان دهید که $\mathbb{N}\cong\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. تابع یک به یک $f:\mathbb{N}\rightarrowtail\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ را چطور تعریف می‌کنید؟

۴- در بند **۴** بحث **۹.۱.۸** دیدیم که هر بازه‌ی بسته و هر بازه‌ی باز با $\mathbb{R}$ یکریخت است. حال نشان دهید که هر بازه‌ی نیم باز نیز با $\mathbb{R}$ یکریخت است. توجه کنید که $\mathbb{R}\cong(a,b)\subseteq(a,b]$.

این بخش را با قضیه‌ی جالب زیر که در اثبات آن از نوشتن اعداد در **مبنای۲** استفاده می‌شود، به پایان می‌بریم. **بهتر است اثبات آن را دو بار بخوانید!**

۱۷.۱.۸ قضیه

$\mathbb{R}\cong\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

اثبات

با استفاده از قضیه‌ی شرودر- برنشتاین توابعی یک به یک چون $f:\mathcal{P}(\mathbb{N})\rightarrowtail\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathcal{P}(\mathbb{N})$ تعریف می‌کنیم. تابع f را برای $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ به صورت

$$f(A)=۰.a_1a_2...a_n...$$

تعریف می‌کنیم، که در آن

$$a_n = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } n \in A \\ ۰, & \text{اگر } n \notin A \end{cases}$$

حال f تابعی یک به یک است. **(چرا؟)**

تابع $g:\mathbb{R}\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ را برای $x\in\mathbb{R}$ به صورت

$$g(x)=A_x$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $A_x\subseteq\mathbb{N}$ با تعریف زیر تعیین می‌شود:

ابتدا x را در مبنای ۲ می‌نویسیم:

$$x=(-1)^m b_k\ldots b_2 b_1 . a_1 a_2\ldots a_n\ldots$$

یعنی، m و b_iها و a_jها برابر با ۰ یا ۱ هستند. سپس دنباله‌ی

$$\{y_n\}=(m,a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_k,b_k,\ldots)$$

را در نظر گرفته و قرار می‌دهیم:

$$n\in A_x \Leftrightarrow y_n=۱.$$

با توجه به یکتایی بسط اعداد در مبنای ۲، تابع g خوش‌تعریف و یک به یک است. ■

تمرین ۱.۸

۱. پاسخ‌های خود به بحث **۴.۱.۸** را مرور کنید.

۲. **آیا** توانستید به بند **۷** بحث **۶.۱.۸** پاسخ دهید؟

۳. **آیا** در بند **۸** بحث **۶.۱.۸** نقطه‌ی X را به نقطه‌ی O وصل کردید و محل تلاقی آن را با خط $\overline{CD}$ در نظر گرفتید!؟

۴. ثابت کنید که $\mathbb{Z}$ با مجموعه‌ی اعداد صحیح فرد یکریخت است. می توانید از بحث **۶.۱.۸** استفاده کنید.

۵. فرض کنید تابع $f:X\to Y$ پوشا و X متناهی است. نشان دهید که تعداد عضوهای Y نمی‌تواند بیش از تعداد عضوهای X باشد.

۶. نشان دهید که مجموعه‌ی $A\times B$ با مجموعه‌ی زیر یکریخت است. (روشن است که $\{\alpha,\beta\}$ را می‌توان هر مجموعه‌ی دو عضوی، یکی برای A و دیگری برای B در نظر گرفت)

$$P=\{f:\{\alpha,\beta\}\to A\cup B \mid \quad f(\alpha)\in A, f(\beta)\in B\}$$

۷. فرض کنید که تابع $f:A\to B$ **دوسویی** باشد. نشان دهید که تابع‌های $\overrightarrow{f}:\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(B)$ و $\overleftarrow{f}:\mathcal{P}(B)\to\mathcal{P}(A)$ **دوسویی** هستند.

۲.۸ توان مجموعه‌ها

پس از معرفی و مطالعه‌ی ویژگی‌های اعمالی چون اجتماع، اشتراک، ضرب، همضرب (اجتماع مجزا)، حال نوبت **توان** مجموعه‌ها است. یعنی می‌خواهیم بدانیم A به توان B چه مجموعه‌ای است و چه ویژگی‌هایی دارد؟ ابتدا این مفهوم را تعریف می‌کنیم و سپس دلیلی برای توجیه این تعریف ارائه می‌کنیم.

۱.۲.۸ تعریف

مجموعه‌ی A به **توان** مجموعه‌ی B، مجموعه‌ی زیر است.

$$A^B=\{\, f:B\to A \mid f \text{ تابع است} \}$$

چرا A به توان B را این چنین تعریف می‌کنیم؟ با الگو قراردادن توان اعداد، به یاد می‌آوریم که توان رابطه‌ای نزدیک با ضرب دارد. یادآوری می‌کنیم که

$$A^n=A\times A\times\ldots\times A \quad (n \text{ مرتبه})$$

در بحث زیر ارتباط این تعریف را با تعریف بالا می‌بینیم.

۲.۲.۸ بحث در کلاس

۱- (تمرین **۶** از بخش **۱.۸** را ببینید.) نشان دهید که مجموعه‌ی $A\times A$ با

$$A^{\{\alpha,\beta\}}=\{\, f:\{\alpha,\beta\}\to A \mid \text{تابع است } f \,\}$$

یکریخت است. (همان طور که قبلاً نیز در تمرین **۶** از بخش **۱.۸** گفتیم، روشن است که $\{\alpha,\beta\}$ را می توان هر مجموعه‌ی دو عضوی در نظر گرفت.) بنابر قضیه‌ی شرودر–برنشتاین، کافی است دو تابع یک به یک چون

$$\psi:A^{\{1,2\}}\to A\times A \quad ,\varphi:A\times A\to A^{\{1,2\}}$$

تعریف کنید. اگر در تمرین **۶** از بخش **۱.۸** موفق نشدید، اکنون به کمک هم این دو تابع طبیعی و ساده را تعریف می‌کنیم.

(الف) تعریف $\varphi:A\times A\to A^{\{\alpha,\beta\}}$: باید برای هر جفت مرتب (a,a') متعلق به $A\times A$، تابعی چون $f:\{\alpha,\beta\}\to A$ نظیرکنیم. حدس بزنید $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ کدام عضوهای A هستند؟ **روشن است، نیست؟** $f(\alpha)=a$ ، $f(\beta)=a'$!

(ب) تعریف $\psi:A^{\{\alpha,\beta\}}\to A\times A$: باید برای هر تابع $g:\{\alpha,\beta\}\to A$، جفتی مرتب در $A\times A$ نظیر کنیم. حدس بزنید جفت $(?,?)$ کدام است؟ درست است، $(g(\alpha),g(\beta))$!

حال نشان دهید که φ و ψ یک به یک هستند و قضیه‌ی شرودر- برنشتاین را به کار ببرید.

۲- بند **۱** را به $A^n=A\times A\times\ldots\times A$ تعمیم دهید.

۳- با الگو قراردادن بند **۲**، حاصل‌ضرب $A\times A\times\ldots$ به تعداد $\mathbb{N}$ را برابر با چه توانی از A تعریف می‌کنید؟

۴-**آیا** تعریف **۱.۲.۸** توان A^B، قدری توجیه شد؟

۵- با الگو قرار دادن توان اعداد، داریم $a^0=1$. حال به یاد بیاورید که چه تابعی از $\varnothing$ به A وجود دارد؟ پس $A^{\varnothing}=\{\varnothing\}$ تک عضوی است! همچنین، برای اعداد داریم $a^1=a$. حال توجه کنید که متناظر با هر عضو A، تابعی از $\{۱\}$ به A داریم (**چطور؟**) **نشان دهید** که

$A \cong A^{\{۱\}}$!

حال آماده‌ایم که قضیه‌هایی را در مورد **توان** بیاوریم که در **فصل ۱۱** به کار می‌بریم. قضیه‌ی زیر یکی از **مهم‌ترین** قضیه‌های زیربنایی نظریه‌ی مجموعه‌ها است (تعریف **۱۴.۱.۶** و مطلب بالای آن را نیز ببینید).

۳.۲.۸ قضیه

برای هر مجموعه چون A داریم $\mathcal{P}(A) \cong \{۰, ۱\}^A$.

اثبات

تعریف تابع مشخصه را در **۱۴.۱.۶** به خاطر آورید. تابع

$$\varphi : \mathcal{P}(A) \to \{۰, ۱\}^A$$

را با ضابطه‌ی

$$\varphi(X) = \chi_X$$

تعریف می‌کنیم. این تابع دوسویی است، زیرا دارای وارون زیر است:

$$\psi : \{۰, ۱\}^A \to \mathcal{P}(A)$$

$$f \mapsto f^{-1}(۱)$$

۴.۲.۸ بحث در کلاس

با استفاده از قضیه‌ی بالا و اشاره به برخی از مطالب قبل، نشان دهید که $\mathbb{R} \cong \{۰, ۱\}^{\mathbb{N}}$.

قضیه‌ی زیر همتای قضیه‌ی **۱۴.۱.۸** است. **به اثبات بدیهی ولی جالب آن توجه کنید.** قضیه‌های بعدی نیز به همین روش اثبات می‌شوند.

۵.۲.۸ قضیه

فرض کنیم $A \cong C$ و $B \cong D$. در این صورت $A^B \cong C^D$.

اثبات

با توجه به فرض‌های قضیه، فرض می‌کنیم که $f : A \to C$ و $g : B \to D$ یکریختی باشند. حال می‌خواهیم تابعی دوسویی چون $\phi : A^B \to C^D$ تعریف کنیم. توجه کنید که در اینجا ورودی های تابع φ خود تابع هستند. تابع φ باید برای هر تابع $h : B \to A$ تابعی چون $h' : D \to C$ به دست دهد. یقیناً می‌توانید حدس بزنید که تابع h' **چطور** از تابع‌های **موجود** f ، g ، و h، **ساخته می‌شود!** تابع‌های موجود را در نمودار زیر بنویسید و مسئله را **به راحتی** حل کنید (توجه کنید که هر تابع یکریختی وارون دارد)!

$$
\begin{tikzcd}
B_2 \arrow[r, "h'=?"] \arrow[d] & B_1 \\
A_2 \arrow[r, "h"] & A_1 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

یقیناً به این نتیجه رسیدید که

$$h' = \phi(h) = f \circ h \circ g^{-1}$$

حال به آسانی می‌توانید به طور مستقیم نشان دهید که تابع φ دوسویی است (**بدون تنبلی(!) نشان دهید.** زیرا اثبات قضیه‌های زیر مشابه است!)

البته، همان طور که قبلاً نیز گفتیم، روش دیگر این است که وارونی برای φ بیابید. حال، مشابه روش نموداری بالا، تابعی طبیعی چون $\psi : C^D \to A^B$ تعریف کنید و **نشان دهید** که وارون φ است. ■

احکام زیر همتای قوانین توان اعداد هستند.

۶.۲.۸ قضیه

۱- اگر $B\cap C=\varnothing$ ، آنگاه $A^{B\cup C}\cong A^{B}\times A^{C}$. (همتای $a^{b+c}=a^{b}.a^{c}$).

۲- (تعمیم حکم ۱) $A^{B\dot{\cup} C}\cong A^{B}\times A^{C}$.

۳- $(A\times B)^{C}\cong A^{C}\times B^{C}$.(همتای $(ab)^{c}=a^{c}b^{c}$).

۴- $A^{B\times C}\cong (A^{B})^{C}$. (همتای $a^{bc}=(a^{b})^{c}$).

اثبات

جزئیات اثبات را به عهده‌ی شما می‌گذاریم. **توانایی های خود را تقویت کنید!**

۱. تابع‌های $\varphi: A^{B\cup C}\to A^{B}\times A^{C}$ و $\psi: A^{B}\times A^{C}\to A^{B\cup C}$ را به صورت زیر تعریف کنید. نگاره‌ی تابع $f: B\cup C\to A$ تحت φ باید جفتی چون $(B\xrightarrow{?}A, C\xrightarrow{?}A)$ در $A^{B}\times A^{C}$ باشد. روشن است که، با داشتن $f: B\cup C\to A$ ، جفت

$$\varphi(f)=(f|_{B}, f|_{C})$$

نامزد مناسبی است. **این طور نیست؟**

همچنین، تابع ψ باید به هر جفت تابع $B\xrightarrow{f}A\xleftarrow{g}C$ در $A^{B}\times A^{C}$ تابعای چون $B\cup C\xrightarrow{?}A$ نظیر کند. با توجه به قضیه ی **۷.۳.۶**، تعریف زیر را داریم:

$$\psi(f,g)=f\cup g$$

حال نشان دهید که φ و ψ وارون یکدیگرند.

۲. یادآوری می کنیم که $B\cong B\times\{\beta\}$ و $C\cong C\times\{\gamma\}$. حال، بنا بر قضیه‌ی **۵.۲.۸**،

$$A^{B}\cong A^{B\times\{\beta\}} \quad , \quad A^{C}\cong A^{C\times\{\gamma\}}$$

همچنین، بنا بر قضیه‌ی **۱۴.۱.۸**، $A^{B}\times A^{C}\cong A^{B\times\{\beta\}}\times A^{C\times\{\gamma\}}$. در پایان، از کدام حکم ها نتیجه می‌گیرید که

$$A^{B\dot{\cup} C}\cong A^{B\times\{\beta\}}\times A^{C\times\{\gamma\}}\cong A^{B}\times A^{C}$$

۳. این حکم را نیز با استفاده از دانش قبلی می‌توانید مشابه‌ی حکم **۱** یا **۲** این قضیه به صورت زیر اثبات کنید. تابع $\varphi:(A\times B)^C\to A^C\times B^C$ را چطور تعریف می‌کنید؟ نگاره‌ی تابع $f:C\to A\times B$ از دامنه‌ی $(A\times B)^C$ تحت φ باید جفتی چون $(C\xrightarrow{?}A, C\xrightarrow{?}B)$ در $A^C\times B^C$ باشد. روشن است که، با **داشتن** $f:C\to A\times B$ و تابع های تصویر، جفت

$$\varphi(f)=(p_A\circ f, p_B\circ f)$$

نامزد مناسبی است. **این طور نیست؟**

همچنین، تابع $\psi:A^C\times B^C\to(A\times B)^C$ باید به هر جفت تابع $B\xleftarrow{g}C\xrightarrow{f}A$ در $A^C\times B^C$ تابعی چون $h:C\to A\times B$ نظیر کند. با توجه به قضیه‌ی **۴.۳.۶**، تعریف زیر را داریم:

$$\psi(f,g)=h=(f,g)$$

یعنی، $h(c)=(f(c),g(c))$. **حال نشان دهید که φ و ψ وارون یکدیگرند. تمرین خوبی است!**

۴. اثبات این یکریختی نیز ساده است، ولی تعریف تابع‌های

$$\varphi:A^{B\times C}\to(A^B)^C\quad,\quad\psi:(A^B)^C\to A^{B\times C}$$

ممکن است پیچیده به نظر آید! **نگران نباشید**، دو بار بخوانید و قدری سلول‌های خاکستری را به کار بگیرید، **حتماً متوجه می‌شوید.** ما می‌دانیم که این تابع‌ها را چطور باید تعریف کنیم و بدون حاشیه رفتن آن‌ها را ارائه دهیم، ولی می‌خواهیم **روش کار** را به شما بیاموزیم.

تابع φ باید هر عضو $f:B\times C\to A$ متعلق به مجموعه‌ی دامنه‌اش $A^{B\times C}$ را به عضوی (تابعی)، با **نماد** $\varphi(f):C\to A^B$، متعلق به همدامنه‌اش $(A^B)^C$ بنگارد. ولی $\varphi(f)$ را **چطور** تعریف کنیم؟ تابع $\varphi(f)$ باید هر عضو $c\in C$ را به عضوی (تابعی) در A^B، با **نماد** $\varphi(f)(c):B\to A$، بنگارد. حال **اگر** این تابع اخیر را مشخص کنیم، کار تمام است! این تابع باید چه کار کند؟ درست است، عضوی چون $b\in B$ را به عضوی، با **نماد** $\varphi(f)(c)(b)$، در A بنگارد! **پیدا کنید پرتقال فروش را!!** اجازه بدهید داده هایمان را مرور کنیم تا ببینیم از چه موجوداتی باید این عضو متعلق به A را بسازیم! **تابع** $f:B\times C\to A$ و

عضوهای $b\in B$ و $c\in C$ **داده می‌شوند**. چطور با این داده‌ها می‌توانیم عضوی از A بسازیم؟ روشن است، $f(b,c)\in A$. پس، قرار می دهیم

$$\varphi(f)(c)(b)=f(b,c)\in A$$

حال که **نماد** $\varphi(f)(c)(b)$ تعریف شد، پس **نماد** $\varphi(f)(c)$ و در نتیجه **نماد** $\varphi(f)$ تعریف سده است. بنابراین، تابع φ کاملاً مشخص شده است!

حال، شما سعی کنید تابع $\psi:(A^B)^C\to A^{B\times C}$ را تعریف کنید. یعنی، بگویید که اگر $h:C\to A^B$ **داده شده** باشد، آنگاه $\psi(h):B\times C\to A$ چیست؟ در واقع، باید برای هر $b\in B$ و $c\in C$ **داده شده** (و البته، تابع h)، عضو $\psi(h)(b,c)=???$ را در A مشخص کنید! **روشن است، نیست؟!** ابتدا توجه کنید که h روی c اثر می‌کند. اثبات را کامل کنید. **فراموش نکنید** که باید نشان دهید که φ و ψ وارون یکدیگر هستند! ■

این فصل را با بحث جالب زیر به پایان می‌بریم. در **فصل ۲** تعریف ریاضی‌گونه‌ی جفت مرتب (a,b) را با مجموعه‌ی کوراتوفکسی $\{\{a\},\{a,b\}\}$ ارائه کردیم و حاصلضرب $A\times B$ را تشکیل دادیم. با تعمیم این تعریف به هر n تایی مرتب، تعریف ریاضی‌گونه‌ی مجموعه‌ی $A_1\times\ldots\times A_n$ ارائه می‌شود. ولی **عبارت صوری** نامتناهی $(a_1,a_2,\ldots)$ **چطور توجیه می‌شود؟** تعریف ریاضی‌گونه‌ی I- تایی **چیست؟** در **فصل ۲** حاصلضرب خانواده‌ی دلخواه $\prod_{i\in I}A_i$ را به صورتی غیر رسمی تعریف کردیم، ولی همانجا گفتیم که آن تعریف **ریاضی‌گونه نیست**. حال ابزار لازم برای ریاضی‌گونه تعریف کردن این مفاهیم وجود دارد. با الگو قراردادن بندهای **۱** و **۲** بحث **۲.۲.۸**، تعریف زیر را ارائه می کنیم.

۷.۲.۸ تعریف

حاصلضرب دکارتی خانواده‌ی $\{A_i\}_{i\in I}$ را برابر با مجموعه‌ی زیر تعریف می کنیم:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid \ (\forall i \in I)\, f(i) \in A_i \}$$

۸.۲.۸ بحث در کلاس

مشابه بندهای **۱** و **۲** بحث **۲.۲.۸**، نشان دهید که با قرار دادن $I = \{۱,۲\}$ و $I = \{۱,۲,\cdots,n\}$، تعریف بالا معادل با تعریف معمولی $A_۱ \times A_۲$ و $A_۱ \times \ldots \times A_n$ است. یعنی

$$A_۱ \times A_۲ \cong \{ f : \{۱,۲\} \to A_۱ \cup A_۲ \mid f(۱) \in A_۱ , f(۲) \in A_۲ \}$$

$$A_۱ \times \ldots \times A_n \cong \{ f : \{۱,۲,\cdots,n\} \to A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n \mid f(i) \in A_i \}$$

تمرین ۲.۸

۱. فرض کنید که $X \neq \varnothing$. نشان دهید که

(الف) $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \cong X^{\mathbb{N}}$.

(ب) اگر $A \subseteq B$ آنگاه تابعی یک به یک مانند $h : X^A \rightarrowtail X^B$ وجود دارد.

۲. نشان دهید که مجموعه‌ی $X = \{۱,۲\}^{\mathbb{N}}$ با زیرمجموعه‌ی سره‌ای از X یکریخت است.

فصل ۹

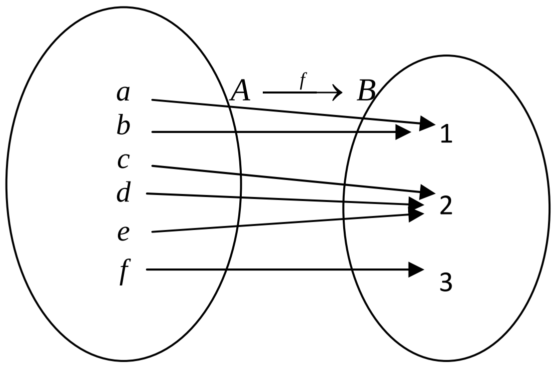
قضیه‌ی اساسی توابع

در این بخش **قضیه‌ای بسیار مهم** را درباره‌ی توابع، به ویژه توابع پوشا، بیان و مطالعه می‌کنیم که همتای آن **قضیه اساسی** برای ساختارهای جبری است که در دروس جبر مطرح می‌شود. آموختن آن در اینجا برای مجموعه‌ها کمک شایانی به درک و اثبات همتای آن در دروس جبر نیز می‌کند. به دلیل اهمیت این قضیه، یک بخش مستقل را به آن اختصاص داده‌ایم.

در **فصل۵**، دیدیم که مفهوم رابطه‌ی هم‌ارزی ارتباط بسیار نزدیکی با مفهوم افراز مجموعه‌ها دارد. **قضیه‌ی اساسی توابع** در واقع بیان ارتباط نزدیک بین افراز مجموعه‌ها و توابع پوشا است. برای ایجاد انگیزه و اثبات ادعای طبیعی و ساده بودن این قضیه، **در بحث زیر شرکت کنید.**

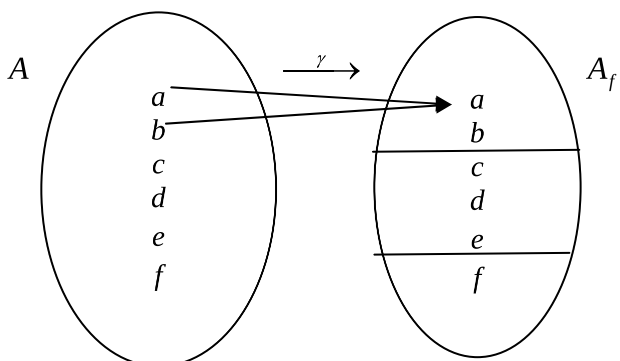
۱.۹ بحث در کلاس

تابع پوشای f را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.



۱- دامنه‌ی f، یعنی A را با توجه به تابع f به صورتی طبیعی **افراز کنید**، و این افراز را با A_f نشان دهید. همچنین، با یادآوری **فصل ۵**، رابطه‌ی هم‌ارزی همتای این افراز را تعریف کنید.

۲- تابعی طبیعی با نماد γ از A به A_f **تعریف کنید**. (γ پوشا است)



۳- با استفاده از تابع f، تابعی طبیعی **دوسویی** (یکریختی) چون $\overline{f} : A_f \to B$ تعریف کنید به طوری که مثلث زیر تعویض‌پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, two heads, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & B \\ & A_f \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

قضیه‌ی اساسی توابع در واقع حالت کلی حکم ساده‌ی بند **۳** بحث بالا است. حال، تعمیم و مجرد سازی احکام **۱** و **۲** بحث بالا را در بحث زیر مطرح می‌کنیم.

۲.۹ بحث در کلاس

فرض کنید تابع دلخواه $f:A\to B$ پوشا است. نشان دهید که

۱– مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های A چون $f^{-1}(y)\subseteq A$

$$A_f=\{f^{-1}(y)\mid y\in B\}$$

مجموعه‌ی A را افراز می‌کند.

۲– نشان دهید که رابطه‌ی به نمایش K_f و با تعریف:

$$a\mathrm{K}_f a' \Leftrightarrow f(a)=f(a') \qquad (\forall a,a'\in A)$$

رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است.

۳– نشان دهید که افراز متناظر با رابطه‌ی هم‌ارزی K_f همان A_f است؛ یعنی $A/\mathrm{K}_f=A_f$.

۳.۹ تعریف

برای هر تابع $f:A\to B$ (پوشا یا غیر پوشا)، رابطه‌ی هم‌ارزی

$$a\mathrm{K}_f a' \Leftrightarrow f(a)=f(a')$$

را **هسته‌ی** f می‌نامیم.

۴.۹ بحث در کلاس

تابع $f:\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ را با تعریف زیر در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} ۰, & \text{اگر } n \text{ زوج} \\ ۱, & \text{اگر } n \text{ فرد} \end{cases}$$

هسته‌ی f و مجموعه‌ی $\mathbb{Z}_f=\mathbb{Z}/K_f$ را مشخص کنید.

دیدیم که هسته‌ی هر تابع $f:A\to B$، رابطه‌ای هم‌ارزی روی دامنه‌ی f، یعنی A، است. لم زیر نشان می‌دهد که عکس این مطلب نیز درست است، یعنی هر رابطه‌ی هم‌ارزی روی A هسته‌ی تابعی پوشا با دامنه‌ی A است. (**جالب است، این طور نیست؟**)

۵.۹ لم

فرض کنیم $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است. در این صورت، $\sim$ هسته‌ی تابع طبیعی و پوشای γ است:

$$A\xrightarrow{\gamma}A/\sim$$
$$a\mapsto[a]_\sim$$

اثبات

باید نشان دهیم که $\mathrm{K}_\gamma=\sim$، یعنی

$$a\mathrm{K}_\gamma a'\Leftrightarrow a\sim a'$$

که به راحتی به صورت زیر اثبات می شود.

$$a\mathrm{K}_\gamma a'\Leftrightarrow \gamma(a)=\gamma(a')$$ (تعریف هسته)

$$\Leftrightarrow[a]=[a']$$ (تعریف γ)

$$\Leftrightarrow a\sim a'$$

■

حال آماده‌ایم که قضیه‌ی اساسی توابع را، که همان مجرد شده‌ی بند **۳** بحث **۲.۹** است، بیان و اثبات کنیم.

۶.۹ قضیه (قضیه‌ی اساسی توابع)

*فرض کنیم $f:A\to B$ **پوشا** است. در این صورت،*

$A/\mathrm{K}_f\cong B$.

اثبات

ضابطه‌ی $\overline{f}:A/\mathrm{K}_f\to B$ را به صورت $\overline{f}[a]=f(a)$ تعریف می‌کنیم. **خوش-تعریفی** $\overline{f}$ در واقع مهم‌ترین قسمت اثبات است. فرض کنیم $[a]=[a']$. یعنی، $a\mathrm{K}_f a'$. در نتیجه، بنابر تعریف هسته، $f(a)=f(a')$. پس $\overline{f}[a]=\overline{f}[a']$.

اثبات یک به یک بودن $\overline{f}$ از عکس کردن مراحل اثبات خوش‌تعریفی، یعنی دنبال کردن مراحل بالا از آخر به اول به دست می‌آید.

پوشا بودن $\overline{f}$ به دلیل پوشا بودن f است. در واقع، اگر $a\in A$ پیش‌نگاره‌ی $b\in B$ تحت f باشد، آنگاه $[a]$ پیش‌نگاره‌ی b تحت $\overline{f}$ است. ■

تمرین ۱.۹

۱. حال که تواناتر شده‌اید، یک‌بار دیگر سؤال‌های بحث **۱.۱.۹** را پاسخ دهید!

۲. بندهای بحث **۲.۱.۹** را برای هر یک از دو تابع تصویر $p_1,p_2:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بررسی کنید. نمودارهای هر $\overleftarrow{p_i}(y)$ را در دستگاه مختصات مشخص کنید.

۳. تابع تصویر $f:S\times T\to S$ را با تعریف $p_S(s,t)=s$ در نظر بگیرید. یکریختی مذکور در قضیه‌ی اساسی توابع را توصیف کنید.

۴. تابع تفاضل $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ را با تعریف $f(m,n)=m-n$ در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که $(m,n)K_f(r,s)$ اگر و تنها اگر $m+s=n+r$.

(ب) با استفاده از توصیف رابطه‌ی K_f در **(الف)**، به طور مستقیم نشان دهید که K_f هم‌ارزی است.

(پ) نتیجه بگیرید که $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/K_f\cong\mathbb{Z}$.

۵. فرض کنید $X=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. یعنی، $X=\{(m,n)\mid m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\}$.

(الف) نشان دهید که رابطه‌ی زیر روی X هم‌ارزی است:

$$(m,n)\sim(p,q)\Leftrightarrow mq=np$$

(ب) با استفاده از قضیه‌ی اساسی توابع، نشان دهید که $\mathbb{Q}\cong(X/\sim)$. **جالب است!**

۶. ثابت کنید که تابع $f:X\to Y$ یک به یک است اگر و تنها اگر $K_f=\Delta_X$.

۷. فرض کنید که تابع $f:X\to Y$ پوشا است، و E رابطه‌ای هم‌ارزی روی Y است. نشان دهید که

(الف) رابطه‌ی E' با تعریف زیر رابطه‌ای هم‌ارزی روی X است:

$$xE'x'\Leftrightarrow f(x)E\,f(x')$$

(ب) نشان دهید که $K_f\subseteq E'$. به عبارت دیگر،

$$xK_fx'\Rightarrow xE'x'$$

۸. فرض کنید که تابع $f:X\to Y$ پوشا است و R رابطه‌ای هم‌ارزی روی X است به طوری که $K_f\subseteq R$. نشان دهید که رابطه‌ی R' با تعریف زیر روی Y هم‌ارزی است:

$$yR'y'\Leftrightarrow xRx'$$

که در آن $f(x)=y$ و $f(x')=y'$.

۹. فرض کنید تابع $f:X\to Y$ پوشا است. نشان دهید که تناظری دوسویی بین مجموعه‌ی همه‌ی رابطه‌های هم‌ارزی روی Y و مجموعه‌ی همه‌ی رابطه‌های هم‌ارزی روی X که شامل هسته‌ی f، یعنی K_f هستند، وجود دارد.

۱۰. فرض کنید که تابع $f:X\to Y$ به صورت $f=g\circ h$ تجزیه می‌شود، که در آن $h:X\to Z$ پوشا و $g:Z\to Y$ یک به یک است. نشان دهید که

(الف) تابعی دوسویی چون $\varphi:\operatorname{Im}f\to Z$ وجود دارد به طوری که نمودار زیر در هر مسیر جا به جا پذیر است (تابع‌ها روشن هستند. آن‌ها را مشخص کنید.)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & Y \\ & \operatorname{Im} f \arrow[ur] \arrow[d, dashed] & \\ & Z \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

(ب) تابع φ با ویژگی بالا منحصر به فرد است. این مطلب نشان می‌دهد که، هر تجزیه‌ی **پوشا- یک به یک** تابع f **اساساً همان** تجزیه‌ی طبیعی پوشا یک به یک **از طریق نگاره** $\operatorname{Im} f$ است.

۱۱. در تمرین **۱۰**، به جای $X \to \operatorname{Im} f \to Y$ تابع های طبیعی و آشنای $X \to X / K_f \to Y$ را قرار دهید. حال، مسئله را مستقل از تمرین **۱۰** حل کنید. این مطلب نشان می‌دهد که، هر تجزیه‌ی **پوشا- یک به یک** تابع f **اساساً همان** تجزیه‌ی طبیعی **پوشا - یک به یک از طریق خارج قسمت** X / K_f است.

۱۲. (**تعمیم قضیه‌ی اساسی توابع**) فرض کنیم $\gamma : X \to T$ تابعی پوشا و تابع $\varphi : X \to S$ دلخواه باشد.

(الف) نشان دهید که φ از طریق γ تجزیه می‌شود (یعنی $\psi : T \to S$ وجود دارد به طوری که $\varphi = \psi \circ \gamma$) اگر و تنها اگر $K_\gamma \subseteq K_\varphi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & S \\ & T \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

(ب) به علاوه، تابع ψ (در صورت وجود) منحصر به فرد است.

(پ) تابع ψ یک به یک است اگر و تنها اگر $K_\gamma = K_\varphi$.

(ت) تابع ψ پوشا است اگر و تنها اگر φ پوشا باشد.

۱۳. نشان دهید که قضیه‌ی اساسی توابع و تمرین‌های **۱۰** و **۱۱** حالت‌های خاص تمرین

۱۲ هستند.

۱۴. فرض کنید E و E'، رابطه‌های هم‌ارزی، به ترتیب، روی X و Y هستند. توابع طبیعی $\gamma : X \to X / E$ و $\gamma' : Y \to Y / E'$ را در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید که تابع $\gamma \times \gamma' : X \times Y \to (X / E) \times (Y / E')$ پوشا است.

(ب) هسته‌ی هم‌ارزی $\gamma \times \gamma'$ را توصیف کنید.

۱۵. فرض کنید که E و E' دو رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی A باشند و $E \subseteq E'$.

(الف) نشان دهید که رابطه‌ی به نمایش E / E' و با تعریف زیر روی خارج قسمت A / E هم‌ارزی است:

$$[x]_E (E / E')[y]_E \Leftrightarrow [x]_{E'} = [y]_{E'}$$

(ب) ثابت کنید که $(A / E) / (E' / E) \simeq A / E'$.

۱۶. فرض کنید که $f : A \to B$ تابع باشد و E، E' رابطه‌هایی هم‌ارزی، به ترتیب، روی A و روی B باشند. نشان دهید که تابعی چون $\psi : A / E \to B / E'$ وجود دارد به- طوری که $\gamma' \circ f = \psi \circ \gamma$ اگر و تنها اگر $xEy \Rightarrow f(x) E' f(y)$، که در آن $\gamma : A \to A / E$ و $\gamma' : B \to B / E'$ توابع طبیعی هستند.

فصل ۱۰

تناهی و شمارایی

با مجموعه‌های **متناهی** و **نامتنـــاهی** بـه‌طـور شـهودی و غیـر رسـمی آشـنا شـدیم و تشخیص اینکه مجموعه‌ای متناهی است یا نامتناهی به قدری روشن به نظر مـی‌رسـد کـه ممکن است تصور شود که نیازی به بحث و بررسی بیشتر ندارد. ولی، برای مطالعه‌ی دقیق‌تر هر مفهومی، به تعریف دقیق و ریاضی‌گونه‌ی آن نیاز است. به هر حال ادعا نمی‌کنیم که پس از مطالعه‌ی این بخش، اطلاعات چندانی به دانسته‌های معمولی شما از مجموعـه‌هـای متناهی و نامتناهی افزوده خواهد شد. ولی، یقیناً اطلاعـات ریاضـی شـما را در مـورد ایـن مفاهیم می‌افزاید. هر دانشجوی **علوم ریاضی** خوب اسـت یـک بـار در زنـدگی در ایـن بحث شرکت کند.

۱.۱۰ مجموعه‌های متناهی

چند تعریف معادل برای مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ارائه شده است. طبیعی‌ترین آن‌ها را در زیر می‌آوریم، سپس تعریف معادلی از آن را به صورت قضیه بیان می‌کنـیم. توجـه می‌کنیم که نمی‌توانیم بگوییم که:

مجموعه‌ی متناهی آن است که نامتناهی نباشد، و مجموعه‌ی نامتناهی آن است که متناهی نباشد!

دست‌کم یکی را باید تعریف کنیم!

۱.۱.۱۰ تعریف

مجموعه‌ی A را **متناهی** می‌گوییم اگر تهی باشد یا به ازای عددی طبیعی چون k، $A \cong \mathbb{N}(k)=\{۱,۲,\dots,k\}$

و مجموعه‌ی A را **نامتناهی** می‌گوییم اگر متناهی نباشد.

۲.۱.۱۰ بحث در کلاس

۱– نشان دهید که $\{a,b,c\}$ متناهی است. (روشن است، ولی باید تعریف بالا را به کار ببرید نه احساس خود را.)

۲– فرض کنید $A \neq \varnothing$. نشان دهید که A متناهی است اگر و تنها اگر عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که $A=\{a_1, a_2,\dots,a_k\}$. نشان دهید که هر مجموعه‌ای که با مجموعه‌ای متناهی یکریخت باشد، خودش متناهی است.

۳– در تعریف بالا، ابتدا مجموعه‌ی متناهی را تعریف کردیم. و سپس خلاف آن را مجموعه‌ی نامتناهی نامیدیم. اگر می‌خواستید ابتدا مجموعه‌ی نامتناهی را تعریف کنید و سپس خلاف آن را مجموعه‌ی متناهی بنامید، چه تعریفی ارائه می‌کردید؟؟؟ **آیا** می‌گفتید که هر مجموعه‌ی نامتناهی باید با $\mathbb{N}$ یکریخت باشد؟! با $\mathbb{R}$ **چطور**؟ انتظار نداریم بتوانید تعریف درست مجموعه‌های نامتناهی را ارائه کنید، ولی اگر توانستید (و استاد درس پذیرفت) تعجب آور ولی **بسیار خوشحال** کننده است. به هر حال بزودی خواهید دید.

۳.۱.۱۰ قضیه

زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی متناهی، متناهی است.

اثبات

فرض کنیم A متناهی است. پس، بنا بر بند **۲** بحث در کلاس **۲.۱.۱۰**، $A=\{a_1, a_2,\dots,a_k\}$. حال اگر $B \subseteq A$، آنگاه $l \leq k$ وجود دارد به طوری که

$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_l\}$ که در آن $b_i\in A$. حال، بنابر بند ۲ بحث بالا، B متناهی است. ■

۴.۱.۱۰ قضیه

فرض کنیم مجموعه‌های A و B متناهی‌اند. در این صورت، هر یک از مجموعه‌های زیر نیز متناهی است.

۱- $A\cup\{x\}$.

۲- $A\cup B$.

۳- $A\times B$.

۴- B^A.

۵- $\mathcal{P}(A)$.

اثبات

اغلب احکام بالا، با استفاده از بند ۲ بحث ۲.۱.۱۰ به راحتی اثبات می‌شوند. برای مثال، ابتدا حکم ۳ را اثبات می‌کنیم. می‌نویسیم $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ و $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_l\}$، در این صورت

$$A\times B=\{(a_i,b_j)\mid\ i=1,2,\ldots,k,\ j=1,2,\ldots,l\}$$

$$\cong\mathbb{N}(kl)$$

(**چطور؟**) این حکم را به صورت زیر نیز می‌توانید اثبات کنید. ابتدا بند ۲ را به هر تعداد متناهی مجموعه‌ی متناهی تعمیم دهید. سپس بنویسید

$$A\times B=\bigcup_{b\in B}\left(A\times\{b\}\right)$$

و حکم را نتیجه بگیرید.

۴- فرض کنید $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$. مشابه **فصل ۸** نتیجه بگیرید که

$$B^{\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}}\cong B^k=B\times B\times\ldots B\quad(k\text{ مرتبه})$$

حال کافی است با استقرا، بند ۳ را تعمیم دهید.

۵- با توجه به $\mathcal{P}(A) \cong \{0,1\}^A$ ، حکم از ۴ نتیجه می‌شود. ■

حال مطالبی را درباره‌ی مجموعه‌های نامتناهی می‌آوریم. ابتدا در بحث زیر شرکت کنید.

۵.۱.۱۰ بحث در کلاس

نشان دهید که مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ نامتناهی است. توجه کنید که نباید سوگند بخورید، بلکه باید استدلال کنید و استدلال شما باید بر اساس دانسته‌ها باشد.

قبلاً در فصل ۸ دیدیم که $\mathbb{N}$ با بسیاری از زیرمجموعه‌ها و **فوق مجموعه‌های** خودش یکریخت است. قضیه‌ی زیر بسیار جالب است. روش اثبات آن نیز آموزنده است.

۶.۱.۱۰ قضیه

مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ با هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی‌اش یکریخت است!

اثبات

فرض کنیم $A \subseteq \mathbb{N}$ نامتناهی باشد. برای اثبات یکریختی $A \cong \mathbb{N}$، بحث استقرایی زیر را می‌آوریم:

چون A نامتناهی است، تهی نیست. پس عضوی چون $x_1 \in A$ وجود دارد.

چون A نامتناهی است، $A \neq \{x_1\}$. پس عضوی چون $x_2 \in A - \{x_1\}$ وجود دارد.

چون A نامتناهی است، $A \neq \{x_1, x_2\}$. پس عضوی چون $x_3 \in A - \{x_1, x_2\}$ وجود دارد.

در نهایت، چون A نامتناهی است، روند بالا خاتمه نمی‌یابد و در نتیجه

$$A = \{x_1, x_2, \ldots\} \cong \mathbb{N}. \quad ■$$

روشن است که یک مجموعه‌ی متناهی نمی‌تواند با هیچ زیرمجموعه‌ی سره‌اش یکریخت باشد (**چرا؟**) ولی قضیه‌ی بالا خلاف این مطلب را برای $\mathbb{N}$ بیان می‌کند. قضیه‌ی زیر، پا را فراتر گذاشته و تعریفی معادل برای مجموعه‌های نامتناهی ارائه می‌دهد. برخی ریاضی‌دانان یکی از دو بند معادل **۲** یا **۳** قضیه‌ی زیر را به عنوان تعریف مجموعه‌ی نامتناهی ارائه می‌دهند و سپس می‌گویند مجموعه‌ای متناهی است که نامتناهی نباشد (پاسخ بند **۳** بحث **۲.۱.۱۰**) ■

۷.۱.۱۰ قضیه

برای هر مجموعه چون A احکام زیر معادل‌اند.

۱- A *نامتناهی است.*

۲- A *زیرمجموعه‌ای یکریخت با $\mathbb{N}$ دارد. (جواب احتمالی شما به بند ۳ بحث* **۲.۱.۱۰**!)

۳ - A با زیرمجموعه‌ی سره‌ای از خودش یکریخت است.

اثبات

(۱⇒۲) با اثباتی مشابه‌ی قضیه‌ی **۶.۱.۱۰**، چون A نامتناهی است، زیرمجموعه‌ای چون $\{x_1, x_2, \ldots\}$ از A می یابیم که به روشنی با $\mathbb{N}$ یکریخت است.

(۲⇒۳) فرض کنیم $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ زیرمجموعه‌ای از A است که با $\mathbb{N}$ یکریخت است. قرار می‌دهیم $B = A - \{x_1\}$. در این صورت $A \cong B$، زیرا تابع $f : A \to B$ با تعریف

$$f(a) = \begin{cases} x_{n+1} & a = x_n \text{ اگر } \\ a & a \neq x_n \text{ اگر } \end{cases}$$

دوسویی است.

(۳⇒۱) با برهان خلف، فرض می‌کنیم که A **متناهی** است و به **تناقض** می رسیم. بنابر **۳**، A زیرمجموعه‌ای **سره** چون B دارد که با خود A یکریخت است. در این صورت، بنابر قضیه‌ی **۳.۱.۱۰**، B نیز متناهی است. فرض کنیم

$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ و $B=\{a_1, a_2, \cdots, a_l\}$.

چون $A\cong B$، $k=l$ و در نتیجه $A=B$ (**چرا؟**)، که با سره بودن B **تناقض** دارد. ■

۸.۱.۱۰ نتیجه

مجموعه‌ی A متناهی است اگر و تنها اگر با هیچ زیرمجموعه‌ی سره‌اش یکریخت نباشد.

اثبات

این نتیجه در واقع عکس نقیض گزاره‌های (۱ $\Rightarrow$ ۳) و (۳ $\Rightarrow$ ۱) است.

تمرین ۱.۱۰

۱. فرض کنید $A\cong B$. نشان دهید که

(الف) مجموعه‌ی A متناهی است اگر و تنها اگر B متناهی باشد.

(ب) مجموعه‌ی A نامتناهی است اگر و تنها اگر B نامتناهی باشد.

۲. نشان دهید که

(الف) اگر $A\subseteq B$ و مجموعه‌ی B متناهی باشد، آنگاه A نیز متناهی است.

(ب) اگر $A\subseteq B$ و مجموعه‌ی A نامتناهی باشد، آنگاه B نیز نامتناهی است.

۳. فرض کنید که $f:A\to B$ تابع باشد. نشان دهید که

(الف) اگر f یک به یک و B متناهی باشد، آنگاه A نیز متناهی است.

(ب) اگر f یک به یک و A نامتناهی باشد، آنگاه B نیز نامتناهی است.

(پ) اگر f پوشا و A متناهی باشد، آنگاه B نیز متناهی است.

(ت) اگر f پوشا و B نامتناهی باشد، آنگاه A نیز نامتناهی است.

۴. ثابت کنید که اگر همه‌ی زیرمجموعه‌های سره‌ی B متناهی باشند،

آنگاه B نیز متناهی است.

۵. نشان دهید که اگر B زیرمجموعه‌ای متناهی از مجموعه‌ی نامتناهی A باشد، آنگاه $A \setminus B$ نامتناهی است.

۶. فرض کنید که هر مجموعه‌ای که به‌طور سره A را شامل شود نامتناهی است. نشان دهید که A نامتناهی است.

۷. ثابت کنید که مجموعه‌ی اعداد اول نامتناهی است.

۲.۱۰ شمارایی

در بخش قبل، مجموعه‌ها را به دو دسته‌ی متناهی و نامتناهی تقسیم کردیم. در این بخش دسته بندی مفید دیگری، به ویژه از مجموعه‌های نامتناهی، ارائه می دهیم.

در قضیه‌ی **۷.۱.۱۰** دیدیم که هر مجموعه‌ی نامتناهی زیرمجموعه‌ای یکریخت با $\mathbb{N}$ دارد. این مطلب ایجاب می کند که اهمیت ویژه‌ای برای مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ قایل شویم.

۱.۲.۱۰ تعریف

مجموعه‌ی A را **شمارا** (یا **شمارش‌پذیر**) می‌گوییم اگر متناهی باشد یا با $\mathbb{N}$ یکریخت باشد. اگر A شمارا نباشد، آن را **ناشمارا** می‌گوییم.

با توجه به این تعریف، همه‌ی مجموعه‌های متناهی شمارا هستند. ولی در فصل قبل دیدیم که $\mathbb{R}$ با $\mathbb{N}$ یکریخت نیست و در نتیجه نمی‌تواند شمارا باشد. حال، با توجه به اینکه مجموعه‌های متناهی را در بخش قبل مطالعه کردیم و با آن‌ها آشنایی بیشتری داریم، بحث این بخش را بیشتر به مجموعه‌های **نامتناهی شمارا** یا **ناشمارا** اختصاص می‌دهیم.

۲.۲.۱۰ بحث در کلاس

از مجموعه‌های زیر کدام‌ها شمارا و کدام‌ها ناشمارا هستند؟ مثال‌های متنوع دیگری را به مرور خواهید دید: $\mathbb{N}$ ، $\mathbf{E}$ (اعداد طبیعی زوج)، $\mathbf{O}$(اعداد طبیعی فرد) ، بازه‌ی $(\circ, ۱)$ ، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$، $G=\{n^۲ \mid n\in\mathbb{N}\}$، زیرمجموعه‌های متناهی یا نامتناهی از $\mathbb{N}$.

توجه کنید که از شمارا بودن $\mathbb{Q}$ ممکن است تعجب کنیم، ولی قضیه‌ی **۸.۱.۸** را ببینید.

۳.۲.۱۰ تذکر

در بند **۲** بحث **۲.۱.۱۰** دیدیم که هر مجموعه‌ی متناهی با k عضو را می‌توانیم به صورت $A=\{a_۱, a_۲, \cdots, a_k\}$ نشان دهیم. برخی از مبتدیان هر مجموعه‌ی نامتناهی A (شمارا یا ناشمارا) را نیز به اشتباه به صورت اندیسدار $A=\{a_۱, a_۲, \cdots\}$ نمایش می‌دهند. بحث زیر نشان می‌دهد که این نمایش مجموعه‌ی نامتناهی تنها وقتی درست است که A شمارا باشد. پس باید **مراقب موارد مجاز** استفاده از این نمایش **باشیم!**

۴.۲.۱۰ بحث در کلاس

نشان دهید که مجموعه‌ی نامتناهی A شمارا است اگر و تنها اگر $A=\{a_i \mid i\in\mathbb{N}\}$.

۵.۲.۱۰ تعریف

خانواده‌ی اندیسدار $\{a_i\}_{i\in I}$ یا $\{A_i\}_{i\in I}$ را **خانواده‌ای شمارا** می‌گوییم اگر مجموعه‌ی اندیسگذار آن، یعنی I، شمارا باشد.

توجه کنید که در این تعریف، I می‌تواند هر مجموعه‌ی شمارا، حتی $\mathbb{Q}$ باشد. حال برخی از ویژگی‌های مجموعه‌های شمارا را می‌آوریم. مجدداً برای تقویت روش‌ها و دانشی که تاکنون به‌دست آورده‌اید، برخی از احکام را شما اثبات کنید و در اثبات‌ها فعالانه شرکت کنید.

۶.۲.۱۰ بحث در کلاس

۱- فرض کنید $A \cong B$. در بند ۳ بحث ۲.۱.۱۰ دیدیم که اگر A یا B متناهی باشد، دیگری نیز باید متناهی باشد. حال نشان دهید که اگر یکی شمارای نامتناهی باشد، دیگری نیز چنین است. (یادآوری می‌کنیم که ترکیب دو تابع دوسویی، تابعی دوسویی است.)

۲- با اشاره به مطالب قبل، نشان دهید که هر زیرمجموعه از مجموعه‌ای شمارا، شمارا است.

۳- فرض کنید $f : A \rightarrowtail B$ یک به یک است. نشان دهید که اگر B شمارا باشد، آنگاه A نیز شمارا است (به خاطر بیاورید که $A \cong f(A) \subseteq B$).

۴- این سؤال کمی فنی‌تر است. فرض کنید $f : A \to B$ پوشا باشد. نشان دهید که اگر A شمارا باشد، آنگاه B نیز شمارا است. (می‌توانید از این نکته استفاده کنید که هر تابع پوشا وارون راست دارد، و وارون راست آن یقیناً یک به یک است. **چرا؟**)

۵- فرض کنید $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعه‌ی شمارای A است. نشان دهید که $A/\sim$ شمارا است (تابع طبیعی و پوشای $\gamma : A \to A/\sim$ را به خاطر بیاورید.)

۶- بند ۴ را با استفاده از بندهای ۱ و ۵، و قضیه‌ی اساسی توابع حل کنید و لذت ببرید!

۷.۲.۱۰ قضیه

اگر A و B شمارا باشند، آنگاه $A \cup B$ نیز شمارا است.

اثبات

اگر هر دو مجموعه متناهی باشند آنگاه، بنا بر بحث ۴.۱.۱۰، اجتماع آن ها نیز متناهی، ودر نتیجه شمارا است. فرض کنیم یکی یا هر دو نامتناهی باشند. یک روش ساده این است که عضوهای دو مجموعه را به صورت اندیسدار متناهی یا نامتناهی

$$A : a_1, a_2 \ldots \quad \text{و} \quad B : b_1, b_2 \ldots$$

بنویسید. سپس آن ها را به صورت زیر در نظر بگیرید، و البته عضوهای تکراری را حذف کنید:

$$A \cup B = \{ a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots \}$$

حال به آسانی می توانید یکریختی $f:\mathbb{N}\to A\cup B$ را تعریف کنید. ■

۸.۲.۱۰ بحث در کلاس

با استفاده از قضیه‌ی بالا، نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد اصم ناشمارا است!

۹.۲.۱۰ قضیه

اجتماع هر خانواده‌ی شمارا از مجموعه‌های شمارا، شمارا است.

اثبات

فرض کنیم $\{A_i : i\in I\}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های شمارا باشد، یعنی I و هر A_i شمارا باشند. در این صورت، توابع یک به یک $f_i:A_i\to\mathbb{N}$ وجود دارند. با فرض اینکه به ازای هر $i\neq j$، $A_i\cap A_j=\phi$ (چرا این فرض مجاز است؟) تابع $f:\bigcup_{i\in I}A_i\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ با ضابطه‌ی

$$f(x)=(f_i(x),i),\qquad x\in A_i, i\in I$$

یک به یک است. حال چون $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارا است (**چرا؟**)، $\bigcup_{i\in I}A_i$ نیز شمارا است (**چرا؟**)■

۱۰.۲.۱۰ بحث در کلاس

۱- به راحتی می توانید نشان دهید که قضیه‌ی بالا برای خانواده‌های ناشمارا درست نیست. برای مثال، $\mathbb{R}=\bigcup_{x\in R}\{x\}$ را در نظر بگیرید.

۲- آیا $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ شمارا است؟ به خاطر بیاورید که $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ با چه مجموعه‌ای یکریخت است، یا ساده‌تر از آن، قضیه‌ی **۱۲.۱.۸** را ببینید.

۳- فرض کنید که $\mathscr{A}$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$ است. نشان دهید که $\mathscr{A}$ شمارا است! اثبات این حکم قدری **فنی**‌تر است. از این نکته استفاده کنید که هر

مجموعه‌ی متناهی $A \in \mathscr{A}$ دارای بزرگترین عددی چون k است و از این رو $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}(k))$. حال سعی کنید از قضیه‌ی بالا استفاده کنید.

۱۱.۲.۱۰ قضیه

اگر A و B شمارا باشند، آنگاه $A \times B$ شمارا است.

اثبات

کافی است توجه کنیم که $A \cong A \times \{b\}$ و

$$A \times B = \bigcup_{b \in B} A \times \{b\}$$

سپس قضیه‌ی **۹.۲.۱۰** را به کار ببریم. ■

۱۲.۲.۱۰ بحث در کلاس

با استقرا، قضیه‌ی بالارا به تعدادی متناهی مجموعه تعمیم دهید.

تمرین ۲.۱۰

۱. از مجموعه های زیر کدام ها شمارا هستند؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

(الف) $A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ اول است} \}$

(ب) $B = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > ۰\}$.

(پ) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid ۱ \leq x \leq ۱۰^{۱۰۰۰۰۰۰۰}\}$.

(ت) مجموعه ی اعداد مختلط $\mathbb{C}$.

(ث) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^{۲} = ۲^{a}\, ۳^{b}, a, b \in \mathbb{N}\}$.

۲. فرض کنید که X شمارا است و $Y \subseteq X$. نشان دهید که $X \setminus Y$ شمارا است.

۳. فرض کنید که $A \subseteq B$ و A ناشمارا است. نشان دهید که B نیز ناشمارا است.

۴. ثابت کنید که مجموعه‌ی اعداد گنگ (اصم) بین ۰ و ۱ ناشمارا است.

۵. فرض کنید که A و B شمارا هستند. نشان دهید که اجتماع مجزای $A \dot{\cup} B$ نیز شمارا است. آیا عکس این حکم درست است؟

۶. ثابت کنید که مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های نامتناهی $\mathbb{N}$ ناشمارا است.

۷. فرض کنید که P مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌های درجه‌ی ۲ به صورت $x^{۲} + mx + n$ باشد، که در آن $m, n \in \mathbb{Z}$. ثابت کنید که P شمارا است.

۸. ثابت کنید که مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایب گویا، شمارا است.

۹. ثابت کنید که A ناشمارا است اگر و تنها اگر $A \times A$ ناشمارا باشد.

۱۰. فرض کنید که S مجموعه‌ی همه‌ی دایره‌های در صفحه باشد که مختصات مراکز آن‌ها و اندازه‌ی شعاع‌شان اعداد گویا هستند. نشان دهید که S شمارا است.

۱۱. در تمرین **۱۰** به جای دایره، کره قرار دهید، و مجدداً نشان دهید که S شمارا است.

۱۲. فرض کنید که $= ۱\}$

$T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^{۲} + y^{۲}$. ثابت کنید که $T \cong \mathbb{R}$، و از این رو T ناشمارا است.

۱۳. عدد حقیقی x را **جبری** می‌نامیم اگر جواب معادله‌ای چندجمله‌ای چون

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

با ضرایب گویا باشد. در غیر این صورت x را **متعالی** (یا غیر جبری) می‌نامیم. نشان دهید که

(الف) مجموعه‌ی اعداد جبری شمارا است.

(ب) برخی از اعداد حقیقی باید متعالی باشند.

(پ) در واقع، مجموعه‌ی اعداد متعالی ناشمارا است!!

۱۴. از مجموعه‌های زیر، کدام‌ها شمارا و کدام‌ها ناشمارا هستند؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید

(الف) $A = \{f : \{۰, ۱\} \to \mathbb{N}\}$.

(ب) $B = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$.

(پ) $C = \{ f : \mathbb{N} \to \{۰, ۱\} \}$.

(ت) مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های دو عضوی $\mathbb{N}$.

(ث) مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$.

۱۵. ثابت کنید که هر مجموعه‌ی شمارای نامتناهی چون X زیرمجموعه‌ای شمارای نامتناهی چون Y دارد به‌طوری که $X \setminus Y$ شمارای نامتناهی است.

فصل ۱۱

عدد اصلی و حساب آن‌ها

با وجودی که به طور شهودی می‌دانستیم که چه مجموعه‌هایی متناهی یا نامتناهی هستند، ولی آن‌ها را به‌طور رسمی و ریاضی‌گونه در **فصل ۱۰** معرفی کردیم. در این فصل نیز قصد داریم **مفهوم تعداد عضو** مجموعه‌ها را رسمیت ببخشیم و آن‌ها را مورد مطالعه قرار دهیم.

یقیناً می‌توانیم بگوییم که در دوره‌ی ابتدایی تحصیلی، یا حتی قبل از آن، با مفهوم تعداد عضوهای مجموعه‌های متناهی آشنا شدیم. در واقع آموختیم که به هر مجموعه‌ی متناهی A عددی مانند ۰،۱،۲، ... نسبت دهیم که معرف اندازه یا **تعداد عضوهای** A باشد. همچنین، به مرور آموختیم که چطور تعداد عضوهای دو مجموعه‌ی متناهی را با هم مقایسه، جمع، در هم ضرب کنیم یا به توان برسانیم.

حال این سؤال طبیعی مطرح می‌شود که آیا می‌توانیم مفهوم تعداد عضو را به گونه‌ای به **مجموعه‌های نامتناهی** نیز تعمیم دهیم که بتوانیم آن‌ها را با هم مقایسه، جمع، در هم ضرب کنیم یا به توان برسانیم؟ **پاسخ مثبت است!**

۱.۱۱ عدد اصلی

آیا انسان‌های اولیه با مفهوم **تعداد عضو** آشنا بودند که می‌توانستند آن‌ها را با هم مقایسه کنند؟ **آیا** لازم است که از مفهوم دقیق و علمی مقیاس متر مطلع باشیم تا بتوانیم طول‌های دو طناب را با هم مقایسه کنیم؟ یا، **آیا** اصلاً لازم است که اندازه‌های طول‌های دو طناب را بدانیم تا بتوانیم طول‌های آن‌ها را با هم مقایسه کنیم؟

پاسخ منفی شما به این سؤال‌ها نشان می‌دهد که در واقع می‌توان بدون توجه به تعریف دقیق مفهوم **تعداد عضو** یک مجموعه، نمادی برای آن معرفی کرد و تعریفی برای تساوی تعداد عضوهای دو مجموعه ارائه داد و آن‌ها را با هم **مقایسه**، **جمع**، در هم **ضرب** کرد و به **توان** رساند! البته، مانند تعریف کوراتوفسکی برای جفت مرتب، تعریفی دقیق و ریاضی‌گونه نیز برای مفهوم **تعداد عضو** وجود دارد که ارائه خواهیم کرد.

اگر نمادهایی چون ۲ را برای تعداد عضوهای مجموعه‌ی $\{a,b\}$ یا ۳ را برای مجموعه‌ی {**ابراهیمی، برج آزادی، ملانصرالدین**} الگو قرار دهیم، **چه** نمادهایی برای تعداد عضوهای مجموعه‌های **نامتناهی** $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $(\circ,۱)$، $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$، و از این قبیل، پیشنهاد می‌کنید؟ آیا منصفانه است که تعداد عضوهای همه‌ی این مجموعه‌های نامتناهی را با **یک نماد** ∞ نشان دهیم؟ آیا بهتر نیست به هر مجموعه‌ی (متناهی یا نامتناهی) نمادی اختصاص دهیم که حرف معرف آن مجموعه نیز در آن نماد دیده شود؟ برای مثال، به تعداد عضوهای مجموعه‌ی A نماد $\boxed{A}$، $C(A)$ یا t_A و به B نماد $\boxed{B}$، $C(B)$ یا t_B را نسبت دهیم، و سپس روشی برای مقایسه‌ی آن‌ها معرفی کنیم؟ ریاضی‌دانان نمادها و واژه‌های زیر را انتخاب کردند.

۱.۱.۱۱ تعریف

هر یک از نمادهای $\mathrm{Card}\,A$ یا $|A|$ را برای نمایش **عدد اصلی**، **کاردینال**، یا **تعداد عضو** مجموعه‌ی A به کار می‌بریم.

برای مثال، می‌نویسیم $\text{Card}\{a,b\}=۲$ و $\text{Card}\{$ابراهیمی، برج آزادی، ملانصرالدین$\}=۳$.

۲.۱.۱۱ مقایسه‌ی اعداد اصلی

حال ببینیم که چطور باید دو عدد اصلی را با هم مقایسه کنیم؟ **لحظه‌ای به دوران شیرین کودکی می‌رویم!** همان‌طور که کودک بدون آگاهی از فن شمارش می‌تواند تشخیص دهد که تعداد آب‌نبات‌هایش با تعداد آب‌نبات‌های برادرش برابر است یا نیست، تا تصمیم بگیرد که جنگ جهانی را آغاز کند یا خیر، ما نیز می‌توانیم $|A|$ و $|B|$ را با هم مقایسه کنیم! **کودک چه می‌کند؟** سعی می‌کند **تناظری** بین آب‌نبات‌های خود و برادرش ایجاد کند! از این رو، ریاضی‌دانان تعریف زیر را برای **تساوی عددی‌های اصلی** مجموعه‌های متناهی یا نامتناهی ارائه داده‌اند.

۳.۱.۱۱ تعریف

$$\text{Card}\, A = \text{Card}\, B \Leftrightarrow A \cong B$$

این تعریف مترادف گرفتن واژه‌های **همعدد** (همتعداد) و **یکریختی** مجموعه‌ها را، که در **فصل ۸** بیان شد، توجیه می‌کند! به عبارت دیگر می‌گوییم که تعداد عضوهای مجموعه‌های (متناهی یا نامتناهی) A و B برابرند اگر و تنها اگر دست‌کم یک **تابع دوسویی** f بین آن‌ها وجود داشته باشد.

برای مثال، حتی بدون توجه به تعداد عضوهای مجموعه‌های $\{۳,۱۲,۲۰\}$ و $\{a,b,c\}$، داریم $\text{Card}\,\{۳,۱۲,۲۰\} = \text{Card}\,\{a,b,c\}$ زیرا دست‌کم تابع

x	۳	۱۲	۲۰
$f(x)$	a	b	c

دوسویی است. چرا $\text{Card}\,\{۱\} \neq \text{Card}\,\{a,b\}$؟ **درست است**، زیرا می‌توان نشان داد که هیچ تابع دوسویی بین $\{a,b\}$ و $\{۱\}$ وجود ندارد، یعنی $\{a,b\} \ncong \{۱\}$.

۴.۱.۱۱ بحث در کلاس

با استفاده از تعریف **۳.۱.۱۱**، **درستی** یا **نادرستی** احکام زیر را با دلیل تعین کنید (مطالب **فصل ۱۰** را به خاطر بیاورید.)

۱- $\text{Card}\,\mathbb{N} = \text{Card}\,\mathbb{Q} = \text{Card}\,\mathbb{Z}$.

۲- $\text{Card}\,\mathbb{N} = \text{Card}\,\mathbb{R}$.

۳- $\text{Card}\,\mathbb{R} = \text{Card}\,[۰,۱]$.

همان‌طور که گفتیم و خواهیم دید، بدون آگاهی از تعریف ریاضی‌گونه‌ی تعداد عضو (عدد اصلی) مجموعه‌ها نیز می‌توانیم آن‌ها را با هم مقایسه، جمع، در هم ضرب کنیم یا به توان برسانیم. ولی قول دادیم که تعریفی نیز برای آن ارائه دهیم.

لازم به بیان است که در بالا صرفاً نمادهایی چون $\text{Card}\,A$ و $|A|$ را برای واژه‌ی تعداد عضو، عدد اصلی، یا کاردینال مجموعه‌ی A معرفی کردیم و تعریف تساوی دو عدد اصلی را ارائه دادیم، ولی تعریفی دقیق، یعنی ریاضی‌گونه، برای واژه‌ی **تعداد عضو** ارائه نکردیم! آیا می‌توانیم تعریفی برای $\text{Card}\,A$ ارائه کنیم که تعریف تساوی **۳.۱.۱۱** برای آن با معنی باشد؟ پاسخ به این سؤال در حالتی که A مجموعه‌ای متناهی است همان **مفهوم شهودی تعداد عضو** A است. یاد آوری می‌کنیم که هر مجموعه‌ی متناهی و ناتهی A با قطعه‌ای از $\mathbb{N}$ چون $\mathbb{N}(k) = \{۱,۲,\cdots,k\}$ یکریخت است، و می‌دانیم که

$$\mathbb{N}(k) \cong \mathbb{N}(l) \Leftrightarrow k = l$$

پس تعریف $\text{Card}\,A = k$ برای A مناسب است. (البته $\text{Card}\,\phi = ۰$).

هنوز این سؤال باقی است که آیا می‌توان تعریفی برای $\text{Card } A$ ارائه داد که در هر دو حالت مجموعه‌های متناهی و نامتناهی با تعریف تساوی ۳.۱.۱۱ سازگار باشد؟

با توجه به تعریف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی در فصل **۱۰**، اگر A نامتناهی باشد، آنگاه با هیچ $\mathbb{N}(k)$ای یکریخت نیست و در نتیجه، $\text{Card } A$ را نمی‌توانیم برابر با هیچ یک از عددهای ۰،۱،۲، ... قرار دهیم. همچنین، همان‌طور که قبلاً نیز گفتیم، **طبیعی نیست** که عدد اصلی همه‌ی مجموعه‌های نامتناهی را یکسان در نظر بگیریم و، برای مثال، آن‌ها را با یک نماد ∞ نشان دهیم. در واقع این کار **با تعریف تساوی عددهای اصلی تناقض دارد!** برای مثال، چون $\mathbb{R} \ncong \mathbb{N}$، پس، با توجه به تعریف **۳.۱.۱۱** برای تساوی اعداد اصلی، نباید $\text{Card } \mathbb{R}$ را برابر با $\text{Card } \mathbb{N}$ تعریف کرد. **تعریف مجرد زیر را به بحث بگذارید.**

۵.۱.۱۱ تعریف

فرض کنیم A مجموعه‌ای (متناهی یا نامتناهی) است و $[A] = \{B \mid B \cong A\}$ رده‌ی شامل A نسبت به رابطه‌ی یکریختی مجموعه‌ها باشد. در این صورت، **تعریف می‌کنیم**:

$$\text{Card } A = [A]$$

برای مثال، عدد (یا نماد) **۲** را به **دسته‌ی همه‌ی مجموعه‌های دو عضوی نسبت می‌دهیم!** شاید این نخستین باری باشد که بر خلاف انتظار، یک عدد، یعنی عدد اصلی، را برابر با یک **دسته** تعریف می‌کنیم! ولی نگران نباشید! به هر حال دسته‌ها و مجموعه‌ها زیربنای ریاضیات هستند! (در تعریف کوراتوفسکی برای جفت مرتب نیز چنین کردیم، ولی پس از آن صرفاً از **نماد** جفت مرتب و تعریف **تساوی** دو جفت استفاده

کردیم!) **البته** معمولاً برای راحتی کار هر **نماد** عدد اصلی را به یک **مجموعه** چون A یا به هر مجموعه‌ی یکریخت با A، یعنی متعلق به $[A]$، نسبت می‌دهیم.

در بحث زیر می‌بینیم که تعریف بالا برای عدد اصلی، با تعریف **۳.۱.۱۱** داده شده برای تساوی عددهای اصلی **سازگار** است.

۶.۱.۱۱ بحث در کلاس

نشان دهید که تعریف **۵.۱.۱۱** برای عدد اصلی در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\text{Card } A = \text{Card } B \Leftrightarrow A \cong B$$

(به یاد بیاورید که برای رابطه‌های هم‌ارزی داریم: $[a]_{\sim} = [b]_{\sim} \Leftrightarrow a \sim b$).

۷.۱.۱۱ تعریف

عدد اصلی هر مجموعه‌ی متناهی را یک **عدد اصلی متناهی** و عدد اصلی هر مجموعه‌ی نامتناهی را یک **عدد اصلی نامتناهی** (یا **فرامتناهی**) می‌نامیم.

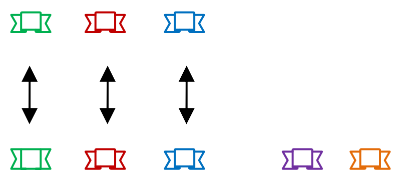
۸.۱.۱۱ تذکر

اگرچه برای نمایش همه‌ی اعداد اصلی متناهی در زبان فارسی از نمادهای مشخص ۰، ۱، ۲، . . . استفاده می‌کنیم، در حالت کلی **نماد**های مشخصی برای نمایش همه‌ی اعداد اصلی نامتناهی **وجود ندارد**. ولی، معمولاً عدد اصلی $\mathbb{R}$ را با $\aleph$ (**آلف**، حرف اول زبان عبری) و نماد $\aleph_0$ (یا ω) را برای نمایش عدد اصلی $\mathbb{N}$ به کار می‌بریم.

همان طور که گفتیم، در حالت کلی، وقتی می‌گوییم که α **عددی اصلی است**، منظور این است که **مجموعه‌ای** چون A وجود دارد به طوری که $\alpha = \text{Card } A = |A|$.

ترتیب اعداد اصلی

حال بازگردیم به ادامه‌ی بحث **مقایسه**‌ی اعداد اصلی. به یاد بیاوریم آن دو کودکی را که شمردن نمی‌دانند و تعداد آب‌نبات‌هایشان را با هم مقایسه می‌کنند! **در چه صورت جنگ جهانی را آغاز می‌کنند؟!** **درست است**، وقتی که تعداد آب‌نبات‌های یکی **کم‌تر** از دیگری باشد. به **زبان ریاضی**، وقتی که **تناظری دوسویی** میان آب‌نبات‌هایشان **به وجود نیاید!**



این مقایسه را به **زبان ریاضی** چنین تعریف می‌کنیم که اگر α و β دو عدد اصلی (متناهی یا نامتناهی) باشند و، برای مثال، $\alpha = \mathrm{Card}\, A$ و $\beta = \mathrm{Card}\, B$، آنگاه:

۹.۱.۱۱ تعریف

$\alpha \leq \beta$ اگر و تنها اگر تابعی **یک به یک** از A به B وجود داشته باشد.

حال بگویید که چه وقت $\alpha < \beta$؟

۱۰.۱.۱۱ بحث در کلاس

آیا تعریف بالا برای $\leq$ خوش‌تعریف است؟ چرا باید نگران **خوش‌تعریفی** این **تعریف** باشیم؟! زیرا، فرض کنیم **شما** در بالا α را برابر با عدد اصلی A و β را برابر با عدد اصلی B گرفتید (یعنی، $\alpha = \mathrm{Card}\, A$ و $\beta = \mathrm{Card}\, B$) به طوری که تابعی یک به یک از A به B وجود داشته باشد، و در نتیجه $\alpha \leq \beta$. ولی **دوست شما**، بدون

اطلاع از فرض شما، α را برابر با عدد اصلی C و β را برابر با عدد اصلی D گرفت (یعنی، $\alpha = \text{Card}\, C$ و $\beta = \text{Card}\, D$!) سؤال این است که **آیا** تابعی یک به یک از C به D **وجود دارد** که در این حالت نیز نشان دهد $\alpha \leq \beta$؟ **پاسخ مثبت است.** به‌راحتی می‌توانید با استفاده از این مطلب که **ترکیب دو تابع یک به یک تابعی یک به یک است**، درستی پاسخ مثبت را اثبات کنید (**چطور؟**) توجه کنید که

$$\text{Card}\, B = \text{Card}\, D \Leftrightarrow A \cong D \quad \text{و} \quad \text{Card}\, A = \text{Card}\, C \Leftrightarrow A \cong C$$

حال، قبل از معرفی چگونگی انجام اعمال جمع، ضرب، و توان اعداد اصلی (متناهی یا نامتناهی)، برخی از ویژگی‌های رابطه‌ی $\leq$ را می‌آوریم. خواهیم دید که رابطه‌ی $\leq$ در واقع یک **ترتیب جزئی** است.

ابزار لازم برای اثبات قضیه‌ها را قبلاً، به ویژه در فصل‌های **۷** و **۸**، فراهم آوردیم، پس جزییات اثبات‌ها را به عهده‌ی شما می‌گذاریم تا چگونگی استفاده از ابزارها را **تمرین کنید** و **لذت ببرید!**

۱۱.۱.۱۱ قضیه (شرودر-برنشتاین)

*رابطه‌ی $\leq$ روی اعداد اصلی، **پادتقارنی** است. یعنی، برای هر دو عدد اصلی α و β،*

$$\alpha \geq \beta \quad \& \quad \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$$

اثبات

کافی است قرار دهید $\alpha = \text{Card}\, A$، $\beta = \text{Card}\, B$ و با استفاده از تعریف‌های $\leq$ و تساوی $=$ برای اعداد اصلی،

مسئله را به مسئله‌ای مربوط به مجموعه‌ها و توابع، تبدیل و از ابزار-های فصل‌های قبل استفاده کنید.

شما می‌توانید! ■

۱۲.۱.۱۱ قضیه

رابطه‌ی $\leq$ روی اعداد اصلی، ***ترتیب*** *(جزئی) است (یعنی، انعکاسی، پادتقارنی، و متعدی است.)*

۱۳.۱.۱۱ بحث در کلاس

آیا توانستید به این سؤال پاسخ دهید که چه وقت $\alpha < \beta$ (یعنی، $\alpha \leq \beta$ ولی $\alpha \neq \beta$)؟ روشن است که ابتدا باید با قرار دادن $\alpha = \operatorname{Card} A$ و $\beta = \operatorname{Card} B$ مسئله را به مسئله‌ای روی مجموعه‌ها تبدیل کنیم. برای اثبات $\alpha \leq \beta$ **چه** باید نشان دهیم؟ و برای $\alpha \neq \beta$ **چطور؟** درست است، باید نشان دهیم که تابعی یک به یک چون $f : A \rightarrowtail B$ وجود دارد، در حالی که هیچ تابع دوسویی بین A و B (یا هیچ تابع یک به یک از B به A) وجود ندارد!

حال، با تبدیل کردن سؤال‌های زیر به سؤالی در باره‌ی مجموعه‌ها، به آسانی می‌توانید با رجوع به فصل‌های قبل به آن‌ها پاسخ دهید، و **البته لذت ببرید!!**

۱۴.۱.۱۱ بحث در کلاس

نشان دهید که

۱- برای هر عدد طبیعی n، $n < \aleph_0$ ($\aleph_0 = \operatorname{Card} \mathbb{N}$).

۲- برای هر عدد اصلی نامتناهی α، داریم $\aleph_0 \leq \alpha$. (یعنی، $\aleph_0 = \operatorname{Card} \mathbb{N}$ **کوچک‌ترین عدد اصلی نامتناهی** است!)

۳- $\aleph_0 < \aleph$ ($\aleph = \operatorname{Card} \mathbb{R}$).

۴- برای هر مجموعه چون A، $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

۵- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

۶- دنباله‌ای نامتناهی و اکیداً صعودی از اعداد اصلی نامتناهی بنویسید! (توجه کنید که $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.)

۷- آیا دسته‌ی اعداد اصلی نامتناهی، متناهی است؟ آیا بزرگ‌ترین عدد اصلی وجود دارد؟

۸- **سؤال های شما چیست؟!** برای مثال،

در بند های ۳ و ۵ بالا دیدیم که $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.) و در بند ۴ دیدیم که در حالت کلی، $|\mathcal{P}(A)| > |A|$. حال ممکن است بپرسید که

(یک) آیا زیرمجموعه‌ای چون $S \subseteq \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که عدد اصلی (تعداد عضوهای) آن بزرگ‌تر از $|\mathbb{N}|$ و کوچک‌تر از $|\mathbb{R}|$ باشد، یعنی،

$$|\mathbb{N}| < |S| < |\mathbb{R}|?$$

(دو) آیا در حالت کلی، برای هر مجموعه چون A، مجموعه‌ای چون B وجود دارد به طوری که

$$|A| < |B| < |\mathcal{P}(A)|?$$

تمرین ۱.۱۱

۱. مجموعه‌های زیر را بر حسب عدد اصلی آن‌ها دسته‌بندی کنید. برای پاسخ خود دلیل بیاورید: $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، $\mathbb{R}^+$، $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$، $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$، $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$، E (مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج)، O (مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد)، $G=\{n^۲ \mid n\in\mathbb{N}\}$، P (مجموعه‌ی اعداد اول)، $\mathbb{R}^2$، $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

۲. ثابت کنید که عدد اصلی هر بازه‌ی بسته، هر بازه‌ی باز، و هر بازه‌ی نیم‌باز از اعداد حقیقی برابر با $\aleph$ است.

۳. ثابت کنید که اگر $\mathrm{Card}\,A = \mathrm{Card}\,B = \aleph_0$، آنگاه $\mathrm{Card}\,(A\cup B) = \mathrm{Card}\,B$.

۴. عدد اصلی مجموعه‌ی $A=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^k$ را تعیین کنید.

۵. فرض کنید $x\notin A$. ثابت کنید که اگر $\mathrm{Card}\,(A\cup\{x\}) = \mathrm{Card}\,A$، آنگاه A

نامتناهی است. آیا عکس این حکم درست است؟

۶. فرض کنید $\mathrm{Card}\ A = \mathrm{Card}\ B$. ثابت کنید که $\mathrm{Card}\ \mathcal{P}(A) = \mathrm{Card}\ \mathcal{P}(B)$.

۷. ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$، آنگاه $\mathrm{Card}\ A \le \mathrm{Card}\ B$.

۸. ثابت کنید که $\mathrm{Card}\ A \le \mathrm{Card}\ B$ اگر و تنها اگر A با زیرمجموعه‌ای از B یکریخت باشد.

۹. فرض کنید که α، β، γ اعداد اصلی هستند. ثابت کنید که

(الف) اگر $\alpha \le \beta \le \gamma$، آنگاه $\alpha \le \gamma$.

(ب) اگر $\alpha < \beta \le \gamma$ آنگاه $\alpha < \gamma$.

(پ) اگر $\alpha < \beta < \gamma$ آنگاه $\alpha < \gamma$.

۱۰. فرض کنید A و B مجموعه‌هایی ناتهی باشند. نشان دهید که $\mathrm{Card}\ A \le \mathrm{Card}\ B$ اگر و تنها اگر تابعی پوشا از B به A وجود داشته باشد.

۱۱. ثابت کنید که تعداد چندجمله‌ای‌های با ضرایب گویا برابر با $\aleph_0$ است.

۱۲. نشان دهید که تعداد اعداد جبری برابر با $\aleph_0$ و تعداد اعداد متعالی بزرگ‌تر از $\aleph_0$ و کوچک‌تر از یا مساوی با $\aleph$ است.

۲.۱۱ حساب اعداد اصلی

حال که مفهوم **تعداد عضو** (عدد اصلی) مجموعه‌های متناهی را به مجموعه‌های نامتناهی نیز تعمیم دادیم و روش ریاضی مقایسه‌ی آن‌ها را نیز دیدیم، می‌خواهیم ببینیم که **چطور** می‌توانیم آن‌ها را با هم **جمع** و در هم **ضرب** کنیم یا به **توان** برسانیم؟

با **روش انجام** دادن این اعمال برای عددهای اصلی **متناهی** از دوران کودکی و کمی بعد از آن آشنا شدیم، ولی **تعریف** ریاضی گونه‌ی این اعمال را، **حتی برای مجموعه‌های متناهی**، **ندیدیم! دیدیم؟** در اینجا می‌خواهیم این اعمال را برای اعداد اصلی به گونه‌ای تعریف کنیم که هر دو حالت **متناهی** و **نامتناهی** را در بر گیرد.

عمل جمع

ابتدا عمل جمع را بررسی می‌کنیم. مطابق معمول، بلافاصله سراصل مطلب نمی‌رویم و **روش آموزشی** زیر را برای چگونگی یافتن جواب می‌آوریم. **در بحث زیر شرکت کنید.**

۱.۲.۱۱ بحث در کلاس

۱- می‌دانیم که، برای مثال، $\text{Card}\ \{۱,۲\} = ۲$ و $\text{Card}\ \{۳,۴,۵\} = ۳$. برای تعریف مجموع ۲ و ۳ باید بگوییم که $۳+۲$ **عدد اصلی کدام مجموعه**ی حاصل از این دو مجموعه است. **حدس شما چیست؟** یقیناً درست حدس زده‌اید: $۳+۲$ **عدد اصلی اجتماع** $\{۱,۲\}$ و $\{۳,۴,۵\}$، یعنی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، است. **شاید** هنوز **نتوانید** به **درستی** حدس بزنید که مجموع دو عدد اصلی α و β را در **حالت کلی** (متناهی و نامتناهی) چطور باید تعریف کنید. **می توانید؟** برخی از شما ممکن است بگویید که اگر $\alpha = \text{Card}\ A$ و $\beta = \text{Card}\ B$ آنگاه $\alpha+\beta$ عدد اصلی **اجتماع** $A \cup B$ است! قدری **نادرست** است! بند **۲** زیر را ببینید.

۲- فرض کنیم $\text{Card}\ \{۱,۲\} = ۲$. روشن است که ۳ عدد اصلی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳\}$ نیز هست! درست است؟ حال **آیا** $۳+۲$ را می‌توان برابر با عدد اصلی **اجتماع** دو مجموعه‌ی $\{۱,۲\}$ و $\{۱,۲,۳\}$، یعنی **۵** را برابر با عدد اصلی $\{۱,۲,۳\}$، **تعریف** کرد؟ یقیناً پاسخ شما نیز **منفی** است. **پس چه کنیم؟** تعریف کلی زیر **چطور است؟**

۲.۲.۱۱ تعریف

فرض کنیم $\alpha = \text{Card}\ A$ و $\beta = \text{Card}\ B$. در این صورت،

مجموع $\alpha+\beta$ را برابر با عدد اصلی **اجتماع مجزای** A و B

تعریف می‌کنیم. یعنی،

$$\alpha+\beta = Card(A \dot{\cup} B)$$

۳.۲.۱۱ بحث در کلاس

۱- با فرض‌های بند **۲** بحث بالا، و با توجه به تعریف **۲.۲.۱۱** بالا، ۳ + ۲ عدد اصلی مجموعه‌ی

$$(\{۱,۲\} \times \{۱\}) \cup (\{۱,۲,۳\} \times \{۲\}) = \{(۱,۱),(۲,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲)\}$$

است. خیلی پیچیده‌تر از حل همین مسئله در بند **۱** بحث بالا شد! این طور **نیست**؟ بند **۲** زیر، مسئله را در حالت کلی ساده‌تر می‌کند!

۲- فرض کنید که α و β دو عدد اصلی باشند. نشان دهید که همیشه دو مجموعه‌ی **مجزا** از هم A و B، یعنی با شرط $A \cap B = \varnothing$، وجود دارند به طوری که $\alpha = \text{Card } A$ و $\beta = \text{Card } B$. بنابراین، از این پس برای تعریف مجموع α و β، **بدون هیچ نگرانی** فرض می‌کنیم که $\alpha = \text{Card } A$ و $\beta = \text{Card } B$ **با شرط** $A \cap B = \varnothing$.

حال باید **نکته‌ی مهمی** را بیان کنیم. از آنجا که هر α و هر β می‌تواند عدد اصلی مجموعه‌های بسیاری باشد، باید **خوش‌تعریف** بودن تعریف عمل جمع را، مشابه بحث **۱۰.۱.۱۱** بررسی کنیم!

۴.۲.۱۱ بحث در کلاس

برای اثبات **خوش‌تعریف** بودن عمل جمع اعداد اصلی **چه باید نشان دهیم**؟ با مطالعه‌ی مجدد روش کار در بحث **۱۰.۱.۱۱**، **یقین داریم** که **می‌توانید** پاسخی درست به این سؤال بدهید، و البته ادعای خود را نیز **اثبات کنید.**

در واقع، باید فرض کنیم که $\alpha = \text{Card } A = \text{Card } A'$ و $\beta = \text{Card } B = \text{Card } B'$ با شرایط $A \cap B = \varnothing$، $A' \cap B' = \varnothing$ و نشان دهیم که

$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,(A' \cup B')$. بند **۱** بحث در کلاس **۱۳.۱.۸** و بندهای **۲** و **۳** قضیه‌ی **۱۴.۱.۸** را ببینید!

۵.۲.۱۱ بحث در کلاس

حال دو مسئله‌ی زیر را حل کنید.

۱- مجموع $\aleph_\circ + \aleph_\circ$ را تعیین کنید . ابتدا باید دو مجموعه‌ی مجزا از هم بیابید به طوری که عدد اصلی هر دو برابر با $\aleph_\circ$ باشد. سپس قضیه‌ی **۷.۲.۱۰** را به‌کار ببرید.

۲- مجموع $\aleph + \aleph_\circ$ را تعیین کنید . ابتدا مانند راهنمایی بند **۱** مشخص کنید که **چه باید نشان دهیم؟**

۳- **چطور** توجیه می‌کنید که تعریف **۲.۲.۱۱** تعمیم جمع اعداد متناهی است؟

در قضیه‌ی زیر برخی از **ویژگی‌های** عمل جمع اعداد اصلی را می‌آوریم. **اگر چه** درستی آن‌ها را از زمان دبستان تاکنون **پذیرفته** و بدون هیچ نگرانی به‌کار برده‌ایم، ولی **اثبات** آن‌ها را هرگز ندیده‌ایم! **دیده‌ایم؟** همان طور که قبلاً نیز گفتیم، برای اثبات آن-ها، کافی است ابتدا مسئله را به مسئله‌ای مربوط به مجموعه‌ها تبدیل کنیم و سپس به قضیه‌هایی از فصل‌های قبل رجوع دهیم.

۶.۲.۱۱ قضیه

فرض کنیم α، β، و γ عدد اصلی باشند. در این صورت،

۱- $\alpha + \circ = \circ + \alpha = \alpha$.

۲- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

۳- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \lambda$.

اثبات

حکم **۱** روشن است! نماد ۰ عدد اصلی کدام مجموعه است؟ بـرای اثبـات دو حکـم دیگـر، قضیه‌ی **۳.۲.۲** چطور است؟ ■

هشدار: بحث زیر نشان می‌دهد که رفتار اعداد اصلی نامتناهی دقیقاً همان رفتار اعداد اصلی متناهی نیست!! مراقب باشید!

۷.۲.۱۱ بحث در کلاس

با ارائه‌ی مثال‌هایی نشان دهید که گزاره‌های زیر برای اعداد اصلی لزوماً درست نیستند.

۱- $\alpha+\beta=\alpha \Rightarrow \beta=0$.

البته اگر هر دو عدد اصلی α و β متناهی باشند، این گزاره درست است، **نیست؟** ولی اگر حتی یکی از آن‌ها نامتناهی باشد، این گزاره لزوماً درست نیست! برای مثال، بحـث **۵.۲.۱۱** را ببینید، یا مثال $\alpha=\aleph_0$ و $\beta=5$ را در نظر بگیرید!

۲- $\alpha+\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow \beta=\gamma$.

این گزاره نیز برای اعداد اصلی متناهی درست است. ولی حتی اگر، بـرای مثـال، α نامتناهی باشد و $\beta \neq \gamma$ متناهی باشند، گزاره نادرست است. **چطور؟**

عمل ضرب

حال که پا به پای هم تعریف عمل جمع اعداد اصلی را آموختیم و برخی از ویژگی‌های آن را دیدیم، به تعریف و ویژگی‌های **عمل ضرب** می‌پردازیم.

همان طور که قبلاً نیز گفتیم، با **روش انجام** دادن این عمـل نیـز بـرای عـددهـای اصلی متناهی از دوران کودکی آشنا شدیم، ولی **تعریـف** ریاضـی گونـه‌ی ایـن عمـل را، **حتی برای مجموعه‌های متناهی**، **ندیدیم! دیدیم؟** در اینجا می‌خـواهیم ایـن عمل را برای اعداد اصلی به گونه‌ای تعریف کنیم که هـر دو حالـت متنـاهی و نامتنـاهی را

دربرگیرد. از آنجا که در تعریف عمل جمع تجربه‌ی لازم را به دست آوردیم، سریع‌تر می‌توانیم عمل ضرب را تعریف و مطالعه کنیم. از تعریف زیر تعجب نخواهید کرد.

۸.۲.۱۱ تعریف

فرض کنیم $\alpha = \text{Card}\, A$ و $\beta = \text{Card}\, B$. در این صورت **حاصل‌ضرب** $\alpha\beta$ (یا $\alpha \times \beta$) را برابر با **عدد اصلی** $A \times B$ تعریف می‌کنیم. یعنی،

$$\alpha\beta = \text{Card}\,(A \times B)$$

این تعریف، واژه‌ی حاصل‌ضرب را برای مجموعه‌ی جفت‌های مرتب توجیه می‌کند!

۹.۲.۱۱ بحث در کلاس

حال، مانند مورد جمع اعداد اصلی، باید **خوش‌تعریف** بودن تعریف عمل ضرب را بررسی کنیم! بحث در کلاس **۴.۲.۱۱** را ببینید و این بار بند **۱** قضیه **۱۴.۱.۸** را به کار ببرید. **یقیناً می‌توانید اثبات را کامل کنید.**

۱۰.۲.۱۱ بحث در کلاس

حال، حاصل‌ضرب $\aleph_0 \aleph_0$ را تعیین کنید . بند **۱** بحث در کلاس **۹.۱.۸** یا بند **۲** بحث در کلاس **۱۶.۱.۸** را ببینید.

در قضیه‌ی زیر برخی از **ویژگی‌های** عمل ضرب اعداد اصلی را می‌آوریم. مجدداً، **اگر چه** درستی آن‌ها را از زمان دبستان تاکنون **پذیرفته‌ایم** و بدون هیچ نگرانی به‌کار برده‌ایم، ولی **اثبات** آن‌ها را هرگز ندیده‌ایم! **دیده‌ایم؟** مطابق قبل، برای اثبات آن‌ها کافی است ابتدا مسئله را به مسئله‌ای مربوط به مجموعه‌ها تبدیل کنیم و سپس به قضیه‌هایی از فصل‌های قبل رجوع دهیم.

۱۱.۲.۱۱ قضیه

فرض کنیم α، β، و γ عدد اصلی باشند. در این صورت،

۱- $\alpha\circ = \circ\alpha = \alpha$.

۲- $\alpha\circ = \circ\alpha = \circ$.

۳- $\alpha\beta = \beta\alpha$.

۴- $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\lambda$.

۵- $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

اثبات

برای اثبات حکم‌های ۱، ۳، و ۴، بحث در کلاس ۱۳.۱.۸ را به‌کار ببرید.

برای ۲ بحث در کلاس ۵.۴.۲ را ببینید، و برای بند ۵ به بند ۱ قضیه‌ی ۷.۴.۲ رجوع کنید. **ساده بود؟** ■

سعی کنید اثبات خود را یک بار به طور کامل بنویسید تا در جلسه‌ی امتحان وقت کم نیاورید!!

هشدار: بحث زیر یک بار دیگر نشان می‌دهد که رفتار اعداد اصلی نامتناهی دقیقاً همان رفتار اعداد اصلی متناهی نیست!! مراقب باشید!

۱۲.۲.۱۱ بحث در کلاس

این احکام نادرست همتای ضربی آن‌هایی هستند که در بحث ۷.۲.۱۱ آمدند. با ارائه‌ی مثال‌هایی نشان دهید که گزاره‌های زیر برای اعداد اصلی لزوماً درست نیستند.

۱- $\alpha\beta = \alpha \Rightarrow \beta = ۱$

البته اگر هر دو عدد اصلی α و β متناهی (ناصفر) باشند، این گزاره درست است، **نیست؟** ولی اگر حتی یکی از آن‌ها نامتناهی باشد، این گزاره لزوماً درست نیست!

برای مثال، بحث **۱۰.۲.۱۱** را ببینید، یا مثال $\alpha = \aleph_0$ و $\beta = 5$ را در نظر بگیرید! البته در این صورت لازم است یکریختی آمده در آن را نیز اثبات کنید.

۲- $\alpha\beta = \alpha\gamma \Rightarrow \beta = \gamma$، با شرط $\alpha \neq 0$.

این گزاره نیز برای اعداد اصلی متناهی (ناصفر) درست است. ولی حتی اگر، برای مثال، α نامتناهی باشد و $\beta \neq \gamma$ متناهی باشند، گزاره نادرست است **چطور**؟

عمل توان

در پایان عمل **توان** اعداد اصلی را معرفی و مطالعه می‌کنیم. حال که تجربه‌ی بیشتری به دست آوردیم، سریع‌تر از قبل به سر اصل مطلب می‌رویم. حتماً توانستید حدس بزنید که عمل توان اعداد اصلی را **چطور** تعریف کنیم. ابتدا تعریف **۱.۲.۸** را به یاد بیاورید که در آن $A^B = \{ f : B \to A |$ تابع است $f \}$. حال تعریف زیر طبیعی است.

۱۳.۲.۱۱ تعریف

برای اعداد اصلی (متناهی یا نامتناهی) $\alpha = \text{Card } A$ و $\beta = \text{Card } B$، **توان اعداد اصلی** به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\alpha^\beta = \text{Card } A^B$$

۱۴.۲.۱۱ بحث در کلاس

۱- حال، مانند مورد جمع و ضرب اعداد اصلی، باید **خوش‌تعریف** بودن تعریف عمل توان را نیز بررسی کنیم! بحث در کلاس **۴.۲.۱۱** را ببینید و این بار باید قضیه **۵.۲.۸** را به‌کار ببرید. **یقیناً می‌توانید اثبات را کامل کنید.**

۲- **چطور** توجیه می کنید که تعریف **۱۳.۲.۱۱** تعمیم توان اعداد متناهی است؟

۱۵.۲.۱۱ بحث در کلاس

حال، $2^{\aleph_0}$ را تعیین کنید . بحث در کلاس **۴.۲.۸** را ببینید.

در قضیه‌ی زیر برخی از **ویژگی‌های** عمل توان اعداد اصلی را می‌آوریم. باز هم تکرار می‌کنیم که، **اگر چه** درستی آن‌ها را برای اعداد اصلی متناهی از دوره راهنمایی تاکنون **پذیرفته** و بدون هیچ نگرانی به‌کار برده‌ایم، ولی **اثبات** آن‌ها را هرگز ندیده‌ایم! **دیده‌ایم؟** مطابق معمول، برای اثبات آن‌ها ابتدا مسئله را به مسئله‌ای مربوط به مجموعه‌ها تبدیل می‌کنیم و سپس به قضیه‌هایی از فصل‌های قبل رجوع می‌دهیم.

۱۶.۲.۱۱ قضیه

فرض کنیم α، β، و γ عدد اصلی باشند. در این صورت،

۱- $\alpha^{0}=1$.

۲- $\alpha^{1}=\alpha$

۳- $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$.

۴- $\alpha^{\beta\gamma}=(\alpha^{\beta})^{\gamma}$

۵- $(\alpha\beta)^{\gamma}=\alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$.

اثبات

برای اثبات حکم‌های **۱** و **۲** به بند **۵** بحث در کلاس **۲.۲.۸** رجوع کنید. برای حکم‌های دیگر قضیه، همان‌طور که قبلاً نیز گفتیم، ابتدا مسئله را به مسئله‌ای در باره‌ی مجموعه‌ها تبدیل کنید و سپس قضیه‌ی **۶.۲.۸** را به کار ببرید.■

سعی کنید اثبات خود را یک بار به طور کامل بنویسید تا در جلسه‌ی امتحان وقت کم نیاورید!!

این بخش را با بیان ارتباط بین عمل‌های جمع، ضرب، و توان اعداد اصلی با رابطه‌ی ترتیب که در بخش قبل مطالعه شد، به پایان می‌بریم.

۱۷.۲.۱۱ قضیه

فرض کنیم α، β، و γ عدد اصلی باشند. در این صورت،

۱- $\alpha \le \beta, \gamma \le \delta \Rightarrow \alpha+\gamma \le \beta+\delta$.

۲- $\alpha \le \beta, \gamma \le \delta \Rightarrow \alpha\gamma \le \beta\delta$.

۳- $\alpha \le \beta, \gamma \le \delta \Rightarrow \alpha^{\gamma} \le \beta^{\delta}$.

اثبات

احکام ۱ و (ب) با استفاده از بحث در کلاس ۵.۳.۶ و ۸.۳.۶ اثبات می‌شوند. اثبات حکم ۳ مشابه اثبات قضیه‌ی ۵.۲.۸ است. ■

۱۸.۲.۱۱ بحث در کلاس

نشان دهید که برای هر عدد اصلی α، $\alpha < ۲^{\alpha}$. قضیه‌ی ۳.۲.۸ همراه با کدام بند بحث در کلاس ۱۴.۱.۱۱، **مسئله را حل می‌کند؟**

تمرین ۲.۱۱

۱. ثابت کنید که اگر عدد اصلی α نامتناهی باشد، آنگاه $\alpha + ۱ = \alpha$.

۲. ثابت کنید که اگر عدد اصلی α نامتناهی و n عددی طبیعی باشد، آنگاه $\alpha + n = \alpha$.

۳. ثابت کنید که $\aleph + \aleph = \aleph$.

۴. ثابت کنید که برای هر دو مجموعه‌ی A و B داریم:

$$\text{Card}\, A + \text{Card}\, B = \text{Card}\,(A \cup B) + \text{Card}\,(A \cap B)$$

۵. نشان دهید که $\text{Card}\,(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \aleph_{۰}$.

۶. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n، داریم $n\aleph_{۰} = \aleph_{۰}$.

۷. فرض کنید که α و β عدد اصلی هستند. ثابت کنید که

(الف) $\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$.

(ب) $\alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \vee \beta = 1$.

۸. فرض کنید که α عددی اصلی و n عددی طبیعی باشند. نشان دهید که

$$n\alpha = \alpha + \alpha + \cdots + \alpha \quad (\text{جمله } n)$$

۹. ثابت کنید که $\aleph\aleph = \aleph$ و $\aleph_0\aleph = \aleph$.

۱۰. ثابت کنید که برای هر عدد اصلی α، داریم $1^\alpha = 1$.

۱۱. ثابت کنید که $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$.

۱۲. **درستی** یا **نادرستی** گزاره‌های زیر را برای اعداد اصلی اثبات کنید.

(الف) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

(ب) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$.

(پ) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^\gamma < \beta^\gamma$.

(ت) $\alpha < \beta \Rightarrow \gamma^\alpha < \gamma^\beta$.

فصل ۱۲

اصل انتخاب و لم زورن

یادآوری می‌کنیم که برای طرح هر مفهومی شرایط و قوانینی معرفی می‌شوند. برای مثال رابطه‌-ی ترتیبی $\preceq$ با شرایط انعکاسی، پاد تقارنی، و تعدی معرفی و هر رابطه با شـرایط ۱ و ۲ مـذکور در تعریف ۶.۱.۱، تابع نامیده شد. این قوانین یا شـرایط را **اصول موضوع** معـرف آن مفهـوم می‌نامیم. متذکر شدیم که اگر این اصول را تغییر دهیم، کم، یا زیـاد کنـیم مفهـوم دیگـری بـه دست می‌آید. برای مثال، اگرشرط ۱ را از اصول موضوع معرف تابع برداریم مفهوم دیگری حاصل می‌شود، و اگر شرط تک‌گزینی را به شرط‌های ۱ و ۲ اضافه کنیم مفهوم تـابع یـک بـه یـک بـه دست می‌آید. روشن است که شرط تک‌گزینی مستقل از شرط‌های ۱ و ۲ تعریف تابع است، بـه این معنی که آن را نمی‌توان از شرط‌های ۱ و ۲ نتیجـه گرفـت، و در واقـع مثـال‌هـایی از تـابع

وجود دارند که تک‌گزین نیستند . همچنین، شرط پوشایی مستقل از شرط‌های **۱** و **۲**، و شرط تک‌گزینی است. البته ممکن است اصلی معادل با اصل دیگری باشد. برای مثال دیدیم که هر دو اصل حذف‌پذیری از راست و وارون راست داشتن معادل با اصل پوشایی تابع هستند (قضیه‌ی **۱۰.۲.۷** را ببینید).

نظریه‌ی مجموعه‌هایی که در آن کار می‌کنیم نیز از اصولی پیروی می‌کند، که اگر آن‌ها را تغییر دهیم، کم یا زیاد کنیم، ممکن است نظریه‌ی دیگری از مجموعه‌ها به دست آید. تاکنون در این کتاب این اصول موضوع را به طورضمنی (نه صریح و آشکار) به کار بردیم، و در دروس دیگر ریاضی نیز چنین خواهیم کرد، همان طور که در دروس هندسه‌ی دوره دبیرستان از **اصول موضوع هندسه‌ی اقلیدس** به طور ضمنی استفاده می‌کردیم.

۱.۱۲ اصل انتخاب

همان‌طور که به اصول اولیه‌ی تابع، اصل مستقل تک‌گزینی را اضافه کردیم و مفهوم دیگری به دست آوردیم، گاهی اصولی مستقل از اصول اولیه‌ی نظریه‌ی معمولی مجموعه‌ها را به آن‌ها اضافه می‌کنیم و نظریه‌ی جدیدی از مجموعه‌ها به دست می‌آوریم.

یکی از این اصول موضوع، اصل انتخاب نام دارد.

به دلیل ظاهر بدیهی‌اش، این اصل در ابتدا مستقل از اصول دیگر به نظر نمی‌رسید، تا اینکه ریاضی‌دانان استقلال آن را اثبات کردند. همان‌طور که گفتیم برخی از ریاضی‌دانان (به ویژه در علوم کامپیوتر) شرط **۱** تابع را قایل نمی‌شوند، بسیاری از ریاضی‌دانان (به ویژه در علوم کامپیوتر) گاهی **اصل انتخاب** را در نظریه‌ی مجموعه‌ها نمی‌پذیرند. زیرا، خواهیم دید که این اصل صرفاً **وجود** شیئی را تضمین می‌کند ولی لزوماً الگوریتمی برای پیدا کردن آن شئ معرفی نمی‌کند (که این مطلب مورد پسند برنامه‌های کامپیوتری نیست!). در این صورت، قضیه‌هایی را می‌پذیرند که بدون استفاده از این اصل اثبات می‌شوند. البته در ریاضیاتی که دست‌کم در دوره‌ی کارشناسی با آن سرو کار خواهیم داشت، این اصل پذیرفته شده است، ولی معمولاً اگر در اثبات قضیه‌ای از این اصل استفاده شود، به طور صریح اشاره می‌شود.

حال ببینیم این اصل چه می‌گوید؟ به بیانی غیر رسمی، **اصل انتخاب** می‌گوید که اگر مجموعه‌ای ناتهی (متناهی یا نامتناهی) چون $\mathscr{A}$ از جعبه‌ها (مجموعه‌ها) داشته باشیم، که هر یک دست‌کم شامل یک شئ است، آنگاه

می‌توان از هر جعبه یک شئ انتخاب کرد و
مجموعه‌ای چون C از این اشیا به‌دست آورد!

بدیهی است که اگر تعداد جعبه‌ها متناهی باشد، این کار همیشه امکانپذیر است! کاری که در میوه فروشی انجام می‌دهیم: از جعبه‌ی اول یک میوه بر می‌داریم، سپس از جعبه‌ی دوم، و به همین صورت ادامه می‌دهیم. از آنجا که تعداد جعبه‌ها متناهی است، این کار به سرانجام می‌رسد و مجموعه‌ی C به دست می‌آید و به خوبی و خوشی به منزل می‌رویم! **روشن است، نیست؟!** برنامه‌های کامپیوتری نیز به همین صورت، دیر یا زود، کار مورد نظر برنامه را به سرانجام می‌رسانند.

برای برخی از حالت‌هایی که نامتناهی است نیز این کار شدنی است. برای مثال، فرض کنیم $\mathscr{A}$ از همه‌ی زیرمجموعه‌های ناتهی $\mathbb{N}$ تشکیل شده باشد. از آنجا که هر زیرمجموعه‌ی ناتهی $\mathbb{N}$ دارای کوچک‌ترین عضو است (این همان **اصل خوش‌ترتیبی** $\mathbb{N}$ است،که خواهیم دید صورت کلی‌تر آن معادل با اصل انتخاب است)، ممکن است بگوییم که این **کوچک‌ترین عضو** را از هر یک از عضوها (جعبه‌ها)ی $\mathscr{A}$ انتخاب می‌کنیم و مجموعه‌ی C را می‌سازیم! مشکل وقتی بهتر دیده می‌شود که حتی دستورالعملی مانند این مورد برای انتخاب عضو از جعبه‌ها (مجموعه‌ها)ی متعلق به $\mathscr{A}$ در دست نباشد. در این صورت **چطور** می‌توانیم مجموعه‌ی C را تشکیل دهیم؟ برای مثال، اگر $\mathscr{A}$ از همه‌ی زیرمجموعه‌های ناتهی $\mathbb{R}$ تشکیل شده باشد، ابزار و تضمینی وجود ندارد که بتوانیم مجموعه‌ی C را بسازیم. مشاهده می‌کنیم که این مسئله صورتی به ظاهر ساده دارد و همین موضوع جدالی بین ریاضی‌دانان برای استقلال یا عدم استقلالش از اصول دیگر به وجود آورده بود.

به زبان ریاضی، **اصل انتخاب** (که آن را با **AC**، حروف اول Axiom of Choice، نشان می‌دهند) به صورت ساده‌ی زیر بیان می‌شود.

اصل انتخاب (AC)

برای هر مجموعه‌ی ناتهی $\mathscr{A}$ از مجموعه‌های ناتهی، **تابعی** چون

$$f:\mathscr{A}\to\bigcup\mathscr{A}$$

به نام **تابع انتخاب** با ویژگی زیر وجود دارد.

$$(\forall A\in\mathscr{A})\, f(A)\in A$$

روشن است که $C=\operatorname{Im} f$ مجموعه‌ی عضوهای انتخاب شده توسط f است.

لازم است **هشدار** دهیم که تاکنون اغلب با توابعی سر و کار داشتیم که دامنه و همدامنه‌ی آن‌ها مجموعه‌هایی **بسیط** بودند، ولی در این فصل اغلب توابعی مطرح می‌شوند که دامنه یا همدامنه (یا هر دو) **مجموعه‌ای از مجموعه‌ها** هستند. همین امر باعث می‌شود که اثبات‌ها ظاهری نابسیط داشته باشند، در حالی که به واقع از اثبات‌های بسیاری که تاکنون در این کتاب دیدیم سرراست‌تر هستند. چشم بیناتر و توجه بیشتری از شما در این فصل پایانی انتظار داریم. به هر حال، قرار است پس از گذراندن موفقیت آمیز این درس به **کلاس دوم برویم !!!**

همان‌طور که اصل پوشایی تابع معادل با حذف‌پذیری از راست و وارونپذیری از راست است، ده‌ها **معادل** برای **AC** پیدا شده است که برخی صرفاً بیانی مشابه با تعریف بالا دارند ولی برخی دیگر ظاهرشان بسیار متفاوت با صورت اصل انتخاب است. در این بخش تعدادی از صورت‌های معروف معادل با اصل انتخاب را می‌آوریم. برخی را اثبات می‌کنیم تا ببینید که چطور از **تابع انتخاب (AC)** استفاده می‌شود و **لذت** اثبات کردن برخی را به عنوان تمرین به شما واگذار می‌کنیم. ابتدا در بحث زیر **شرکت کنید** تا درک بهتری از تابع f به دست آورید.

۱.۱.۱۲ بحث در کلاس

فرض کنید $\mathscr{A}$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های ناتهی $X=\{a,b,c\}$ باشد. در جدول زیر، یک تابع انتخاب دیگر، علاوه بر f که داده شده است، تعریف کنید.

A	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$f(A)$	a	b	c	a	a	b	a
$g(A)$	a	b	$?$	$?$	$?$	$?$	$?$

به روشنی مشاهده می‌کنید که f یک تابع انتخاب است. برای مثال،

$$f(\{a\})=a\in\{a\} \quad , \quad f(\{b,c\})=b\in\{b,c\}$$

همان‌طور که گفتیم، اثبات قضیه‌ها سرراست هستند، فقط چون مجموعه‌ای از مجموعه‌ها مطرح می شود، نمادگذاری‌ها پیچیده می‌شوند. با حوصله توجه کنید.

۲.۱.۱۲ قضیه

اصل انتخاب معادل است با

(⁕) *برای هر مجموعه‌ی ناتهی چون $\mathscr{B}$ از مجموعه‌های ناتهی* ***دو به دو مجزا***، *مجموعه‌ای چون C وجود دارد به طوری که به ازای هر $B\in\mathscr{B}$، $C\cap B$* ***تک عضوی*** *است.*

اثبات

روشن است که مجموعه‌ی $\mathscr{B}$ حالت خاص مجموعه‌ی $\mathscr{A}$ در تعریف AC است. از این رو AC حکم (⁕) را نتیجه می‌دهد.

برعکس، (⁕) بیان می‌کند که تابع انتخاب برای هر $\mathscr{B}$ که اعضای آن دو به دو مجزا هستند، برقرار است. حال باید وجود تابع انتخاب را برای مجموعه‌ی دلخواه $\mathscr{A}$ از مجموعه‌هایی که لزوماً دو به دو مجزا نیستند، ثابت کنیم. ولی قبلاً آموختیم که، برای مثال، به صورت زیر می‌توانیم اعضای $\mathscr{A}$ را با عضوهای دو به دو مجزا جایگزین کنیم:

$$\mathscr{B}=\{A\times\{A\}\,|\,A\in\mathscr{A}\}$$

حال، بنابر فرض قضیه، مجموعه‌ای چون C با این ویژگی وجود دارد که به ازای هر $B = A\times\{A\}$، $C\cap B$ تک عضوی است. برای مثال، $(x_A, x)\in C\cap(A\times\{A\})$ که در آن $x_A \in A$. حال تابع

$$f:\mathscr{A}\to\bigcup\mathscr{A}$$
$$A\to x_A$$

یک تابع انتخاب برای $\mathscr{A}$ است، **این طور نیست؟** ■

اکنون، صورت معادل دیگری را از AC می‌آوریم.

۳.۱.۱۲ قضیه

اصل انتخاب معادل است با

(❋) *برای هر مجموعه‌ی ناتهی چون X، یک تابع انتخاب*

$$g:\mathcal{P}^*(X)\to\bigcup\mathcal{P}^*(X)=X$$

وجود دارد (که $g(A)\in A$). در اینجا $\mathcal{P}^*(X)=\mathcal{P}(X)\setminus\{\varnothing\}$.

اثبات

روشن است که (❋) از AC نتیجه می‌شود.

برعکس، (❋) بیان می‌کند که تابع انتخاب برای مجموعه‌های توانی (بدون $\varnothing$) برقرار است. حال فرض می‌کنیم که $\mathscr{A}$ مجموعه‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی است. برای استفاده از (❋)، ابتدا باید مجموعه‌ای چون X که در (❋) مطرح شده پیدا کنیم به طوری که با استفاده از تابع انتخاب g یک تابع انتخاب برای $\mathscr{A}$ بیابیم. با نگاهی به آنچه داریم، روشن است که $X=\bigcup\mathscr{A}$ نامزد خوبی است. با توجه به تعریف اجتماع، روشن است که $\mathscr{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ (**چطور؟**) بنابر (❋)، تابع انتخاب

$$g:\mathcal{P}^*(X)\to X \qquad \left(g(A)\in A\right)$$

وجود دارد. با استفاده از g تابع مورد نظر در اصل انتخاب، یعنی

$$f:\mathscr{A}\to\bigcup\mathscr{A}=X$$

را **چطور** تعریف می‌کنید؟ روشن است! چون $\mathscr{A}\subseteq\mathcal{P}^*(X)$، g را بر $\mathscr{A}$ تحدید می‌کنیم!

حال معادل جالب دیگری از اصل انتخاب را معرفی می‌کنیم. ■

۴.۱.۱۲ قضیه

اصل انتخاب معادل است با

(❋) *برای هر مجموعه‌ی ناتهی $\mathscr{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ از مجموعه‌های ناتهی، حاصل‌ضرب $\prod_{i\in I}A_i$ ناتهی است.*

اثبات

حکم (❋) بیان روشنی از اصل انتخاب است. در واقع فرض کنیم $\mathscr{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ مجموعه‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی است. بنابر AC، تابع انتخاب زیر وجود دارد

$$f:\mathscr{A}\to\bigcup_{i\in I}A_i$$

به طوری که $f(A_i)\in A_i$. حال با یادآوری تعریف $\prod_{i\in I}A_i$ در **۷.۲.۸** ، تابع زیر را معرفی می‌کنیم.

$$g:I\to\bigcup_{i\in I}A_i$$

$$g(i)=a_i=f(A_i)\in A_i$$

و در نتیجه $g\in\prod_{i\in I}A_i$ ، و $\prod_{i\in I}A_i\neq\varnothing$.

برعکس، فرض کنیم (❋) برقرار باشد. حال فرض کنیم $\mathscr{A}$ مجموعه‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی مذکور در تعریف AC باشد. مطابق معمول، $\mathscr{A}$ را با خود $I=\mathscr{A}$ به صورت زیر اندیسدار می‌کنیم.

$$\mathscr{A}\simeq\{A\times\{A\}\,|\,A\in\mathscr{A}\}$$

بنابر (⁕)، $\prod_{A\in\mathscr{A}}\left(A\times\{A\}\right)\neq\varnothing$ ، و بنابر تعریف حاصل‌ضرب در **۷.۲.۸**، دست کم یک تابع به صورت زیر وجود دارد.

$$g:I=\mathscr{A}\to\bigcup_{A\in\mathscr{A}}\left(A\times\{A\}\right)$$

به طوری که $g(A)\in A\times\{A\}$؛ برای مثال، $g(A)=(x_A,A)$. حال تابع انتخاب

$$f:\mathscr{A}\to\bigcup\mathscr{A}$$

را **معرفی کنید**. از نمادگذاری‌ها وحشت نکنید. اگر یک بار دیگر اثبات را بخوانید، **اوضاع بهتر می‌شود!** ■

همان‌طور که گفتیم، بسیاری از ریاضی‌دانان اصل انتخاب را می‌پذیرند و به کار می‌برند. ما نیز قبلاً از آن استفاده کرده‌ایم. برای مثال، قضیه‌ی زیر را ببینید.

۵.۱.۱۲ قضیه

اصل انتخاب معادل است با

(⁕) *هر تابع پوشا وارون راست دارد.*

اثبات

قبلاً، درقضیه‌ی **۹.۲.۷**، با استفاده‌ی ضمنی از اصل انتخاب اثبات کردیم که هر تابع پوشا وارون راست دارد. یک بار دیگر در اینجا آن را با استفاده‌ی صریح از AC اثبات می‌کنیم.

فرض کنیم تابع $f:A\to B$ پوشا است. برای استفاده از AC، مجموعه‌ی آشنای زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\mathscr{A}=\left\{f^{-1}(y)\middle|y\in B\right\}$$

چون f پوشا است، برای هر $y\in B$ ، مجموعه‌ی $f^{-1}(y)=\left\{x\in A\middle|f(x)=y\right\}$ **ناتهی** است. پس، بنابر AC، تابع انتخاب زیر وجود دارد.

$$h:\mathscr{A}\to\bigcup\mathscr{A}=A$$
$$h(X)\in X$$

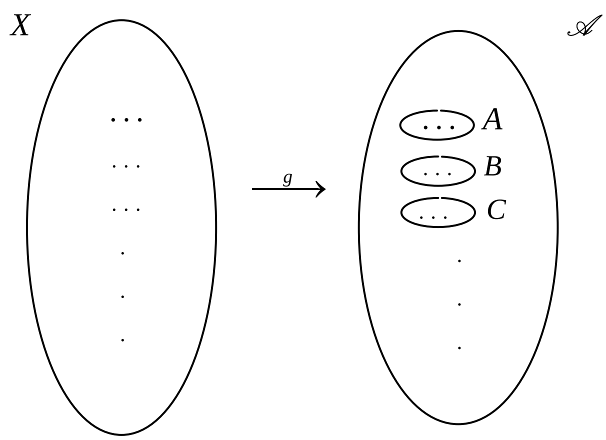
یعنی $h\left(f^{-1}(y)\right)\in f^{-1}(y)\subseteq A$. حال وارون راست f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$g:B\to A$$
$$g(y)=h\left(f^{-1}(y)\right)\in A$$

چون h تابع است، g نیز تابع است و

$$f\left(g(y)\right)=f\left(h\left(f^{-1}(y)\right)\right)$$
$$=y \qquad \text{(**بررسی کنید**)}$$

برعکس، فرض این است که هر تابع پوشا $g:X\to Y$ وارونی راست چون $f:Y\to X$ دارد $\left(g\left(f(y)\right)=y\right)$. باید درستی اصل انتخاب را نتیجه بگیریم. به این منظور، فرض می‌کنیم که $\mathscr{A}$ مجموعه‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی است و به دنبال تابع انتخاب $f:\mathscr{A}\to\bigcup\mathscr{A}$ می‌گردیم. بدون از دست دادن کلیت مطلب، می توانیم فرض کنیم که اعضای $\mathscr{A}$ دو به دو مجزا هستند (**چرا؟**) روشن است که برای استفاده از (*) باید X و Y و $g:X\to Y$ را به گونه‌ای از تنها مجموعه‌ی موجود یعنی $\mathscr{A}$ بسازیم. حدس بزنید!



درست است، قرار می‌دهیم $X = \bigcup \mathscr{A}$ ، $Y = \mathscr{A}$ و با توجه به اینکه هر $x \in X$ متعلق به A ای از $\mathscr{A}$ است، تعریف می‌کنیم که (اگر $x \in A$)

$$g : X \to Y$$
$$g(x) = A$$

یعنی g تمام اعضای A را به مجموعه‌ی A که عضوی از $\mathscr{A}$ است، می‌نگارد. حال، وارون راست g همان تابع انتخاب است. (**چطور؟**) ■

۲.۱۲ لم زورن

همان‌طور که گفتیم و دیدیم، اصل انتخاب با احکام بسیاری معادل است که برخی از آن‌ها را در بخش قبل آوردیم. برخی دیگر را، که صورتی کاملاً متفاوت با AC دارند، در این بخش می‌آوریم. این احکام معادل با اصل انتخاب را در بسیاری از دروس علوم ریاضی به دفعات به کار خواهیم برد. اثبات این قضیه‌ها را نمی آوریم ، ولی به توضیح صورت این احکام (معادل با اصل انتخاب) که در زیر هر قضیه آورده‌ایم توجه کنید تا بتوانید آن‌ها را در دروس دیگر علوم ریاضی به کار ببرید.

۱.۲.۱۲ قضیه

اصل انتخاب معادل است با

لم زورن: *فرض کنیم $(A,\leq)$ مجموعه‌ای مرتب جزئی باشد به طوری که هر زیر مجموعه‌ی کاملاً مرتب (زنجیر) آن دارای کران بالا در A باشد.*

در این صورت A دارای عضو ماکسیمال *است.*

این **اصل موضوع** معادل با اصل انتخاب، به **لم زورن** معروف شده است و آن را بسیار به کار خواهید برد. در اثبات بسیاری از قضیه‌هایی که لم زورن به کار می‌رود (برای مثال وجود پایه برای هر فضای برداری)، مجموعه‌ی مرتب $(A,\le)$ به طور صریح داده نشده است. پس برای استفاده از لم زورن باید مراحل زیر را طی کنیم.

۱- مجموعه‌ای مرتب چون $(A,\le)$ معرفی می‌کنیم که مناسب اثبات حکم مورد نظر باشد.

۲- نشان دهیم که هر زنجیر $C\subseteq A$ دست کم یک کران بالا دارد.

۳- سپس می‌گوییم که **بنابر لم زورن**، $(A,\le)$ دست‌کم یک عضو **ماکسیمال** دارد.

اگر $(A,\le)$ را درست انتخاب کرده باشیم، وجود این عضو ماکسیمال حکم مورد نظر قضیه را اثبات می‌کند! **عجیب است، این طور نیست؟**

اصل موضوع خوش‌ترتیبی $(\mathbb{N},\le)$، که بیان می‌کند هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ دارای کوچک ترین عضو است، صورت کلی‌تری دارد که معادل با اصل انتخاب است.

۳.۲.۱۲ قضیه

اصل انتخاب معادل است با

اصل خوشترتیبی کلی: *هر مجموعه را می‌توان خوش‌ترتیب کرد.*

یعنی روی هر مجموعه‌ی A (متناهی یا نامتناهی) می‌توان رابطه‌ای ترتیبی (جزئی) به گونه‌ای تعریف کرد که هر زیرمجموعه‌ی ناتهی آن نسبت به رابطه‌ی تعریف شده دارای کوچک-ترین عضو باشد. توجه کنید که $\mathbb{R}$ همراه با رابطه‌ی ترتیبی معمولی‌اش خوش‌ترتیب نیست. زیرا، برای مثال، بازه‌ی $(۰,۱)$ کوچک‌ترین عضو ندارد، ولی این اصل (معادل با اصل انتخاب)

بیان می‌کند که می‌توان رابطه‌ی ترتیبی **دیگری** در $\mathbb{R}$ معرفی کرد که نسبت به آن هر زیرمجموعه‌ی ناتهی $\mathbb{R}$، از جمله $(0,1)$، دارای کوچکترین عضو باشد!!

اصل ماکسیمال هاسدورف که بیشتر در دروس آنالیز و توپولوژی به کار می‌رود، صورت معادل دیگری از اصل انتخاب است.

۴.۲.۱۲ قضیه

اصل انتخاب معادل است با

اصل ماکسیمال هاسدورف: *هر مجموعه‌ی مرتب (جزئی) چون* $(A,\leq)$ *دست کم یک زنجیر ماکسیمال دارد.*

یعنی در مجموعه‌ی همه‌ی زنجیرهای متعلق به $(A,\leq)$ زنجیری چون C وجود دارد به طوری که زنجیر دیگری آن را شامل نمی‌شود. این اصل به صورت زیر نیز به کار می‌رود:

اصل ماکسیمال هاسدورف:

فرض کنیم $(A,\leq)$ مجموعه‌ای مرتب (جزئی) است. در این صورت برای هر زنجیر چون B در A، زنجیری ماکسیمال چون C در A وجود دارد به طوری که $B\subseteq C$.

لازم به توضیح است که برای استفاده از این اصل باید مانند لم زورن ابتدا مجموعه‌ای مرتب (جزئی) چون $(A,\leq)$ مناسب موضوع معرفی کنیم، سپس بگوییم که **بنابر اصل ماکسیمال هاسدورف** زنجیری ماکسیمال چون C در A وجود دارد. معمولاً وجود چنین زنجیر ماکسیمال مسئله را حل می‌کند.

این بخش را با بیان اصل دیگری که معادل با اصل انتخاب است، به پایان می‌بریم.

۵.۲.۱۲ قضیه

اصل انتخاب معادل است با

(❋) *برای هر دو عدد اصلی* α و β، $\alpha \leq \beta$ *یا* $\beta \leq \alpha$.

به عبارت دیگر مجموعه‌ی اعداد اصلی (متناهی یا نامتناهی) همراه با رابطه‌ی ترتیبی‌ای که در **فصل۱۱** تعریف شد، زنجیر است. پس داریم

$$1 < 2 < 3 \ldots < \aleph_0 < \aleph < \aleph_1 < \ldots$$

حتماً این سؤالی در ذهن شما بود!

منابع

فهرستی از کتاب‌های به زبان فارسی را که برای مطالعه‌ی بیش‌تر دانشجویان علوم ریاضی مناسب هستند، در زیر می‌آوریم.

۱- استیوارت، ایان و تال، دیوید: **مبانی ریاضیات**، ترجمه‌ی محمد مهدی ابراهیمی، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

۲- ابراهیمی، محمد مهدی و محمودی، مژگان: **مبانی ریاضیات**، انتشارات ققنوس.

۳- اردشیر، محمد: منطق ریاضی، انتشارات هرمس.

۴- بیتینگر، م.ل.: **منطق، اثبات و مجموعه‌ها**، ترجمه‌ی محمد مهدی ابراهیمی، انتشارات پیام نور.

۵- هالموس، پ.ر.: نظریه‌ی طبیعی مجموعه‌ها، ترجمه‌ی عبدالحمید داداله، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

فهرست راهنما

بعد از انجام پیشنهادهای داوران و ویراستار، فهرست زیر مرتب و شماره ی صفحه‌ها تایپ می‌شوند.

۱.۱

۲.۱

اثبات به روش استقرا

۱.۲

مجموعه

عضو

مجموعه‌ی تهی

نمایش مجموعه‌ها

نمایش تفصیلی یا فهرستی

نمایش توصیفی یا شرطی

تساوی مجموعه‌ها

زیرمجموعه‌ی

شامل

مشمول

زیرمجموعه‌ی سره

مجموعه‌ی توانی

مجموعه‌ای از مجموعه‌ها

مجموعه‌ی توانی

حفظ می‌کند

سازگار

اشتراک

ویژگی‌های جذب

ویژگی‌های توزیع‌پذیری

تعمیم اجتماع و اشتراک

۳.۲

تفاضل

متمم مجموعه

متمم نسبی

متمم مطلق

قوانین دمورگان

تفاضل متقارن

۴.۲

زوج، جفت، یا دوتایی مرتب

کوراتوفسکی

حاصل‌ضرب (دکارتی)

$n-$تایی مرتب

دنباله‌ی نامتناهی

$I-$تایی

اجتماع مجزای

۱.۳

رابطه‌ای (دوتایی)

همنهشتی

همانی، تساوی، یا قطری

انعکاسی یا بازتابی

تقارنی یا متقارن

پادتقارنی یا پادمتقارن

متعدی یا ترایا

خطی یا زنجیری

۲.۳

رابطه‌ی ترتیبی جزئی

قابل مقایسه‌انـد

مجموعه‌ای مرتب

خطی

زنجیر

پوشش

تالی

مقدم بر

نمودار ترتیبی

اجتماع ترتیبی

مجموع ترتیبی

قاموسی یا لغتنامه‌ای

دوگان

---

۳ .۳

بزرگ‌ترین

کوچک‌ترین

عضو ماکسیمال (یا بیشین)

عضو مینیمال (کمین)

خوش‌ترتیب

کران بالا

سوپریمم

کوچک‌ترین کران بالای

کران پایین، اینفییم (بزرگترین کران پایین)

مشبکه

کامل

ایدآل ترتیبی (یا زیرمجموعه‌ی پایینی)

فیلتر ترتیبی (یا زیرمجموعه‌ی بالایی)

۱.۴

مشبکه

توزیع پذیری

جبر بول

متمم

۲.۴

مدارهای الکتریکی

۱.۵

افراز

رابطه‌ی هم‌ارزی

به انتفای مقدم

هم‌خانه بودن

رده

مجموعه‌ی خارج قسمت

۱.۶

تابع

تابع چند مقداری

نگاره

پیش‌نگاره

دامنه

ورودی

همدامنه

برد، تصویر یا خروجی

خوش‌تعریفی

تساوی توابع

تابع تهی

تابع تحدید

ناوردا یا بسته

تابع همانی

تابع شمول

دنباله‌ای نامتناهی

دنباله‌ای متناهی

دنباله‌ی فیبوناچی

تابع مشخصه‌ی

تابعی با n متغیر

عمل دوتایی

عمل n تایی

صفرتایی

نگاره

نگاره‌ی معکوس پیش نگاره‌ی

۳.۶

ترکیب

نمودار تعویض‌پذیر

توابع تصویر

ویژگی جهانی ضرب

تابع طبیعی شمولی

ویژگی جهانی همضرب

لم چسب

۱.۷

یک به یک یا تک گزین

پوشا

دو سویی

۲.۷

وارون

وارون‌پذیر

وارون چپ

وارون راست

تناظر یک به یک

۱.۸

کانتور

یکریخت (هم ارز یا همعدد)

شرودر- برنشتاین

۲.۸

توان مجموعه‌ها

حاصل‌ضرب دکارتی خانواده

۱.۹

قضیه‌ی اساسی توابع

هسته

تعمیم قضیه‌ی اساسی توابع

۱.۱۰

تناهی و شمارایی

مجموعه‌ی متناهی

مجموعه‌ی نامتناهی

۲.۱۰

مجموعه‌ی **شمارا** (یا **شمارش‌پذیر**

مجموعه‌ی **ناشمارا**

خانواده‌ای شمارا

۱.۱۱

عدد اصلی

تعداد عضو

کاردینال

همعدد

عدد اصلی متناهی

عدد اصلی نامتناهی یا فرامتناهی

ترتیب اعداداصلی

۲.۱۱

عمل جمع

حاصل‌ضرب

توان اعداد اصلی

۱.۱۲

اصل انتخاب

تابع انتخاب

لم زورن

اصل خوشترتیبی‌کلی

اصل ماکسیمال هاسدورف