صرا

حل برخی از سؤالات (تمرین های) فصل توابع (۴۶ تمرین)

۱- تمرین ۵ صفحه ۶۷ ، ثابت کنید که اگر A و B و C مجموعه باشند و $A\subseteq B$ آنگاه $A\times C\subseteq B\times C$

اثبات: $\forall (a,c)\in A\times C \Rightarrow a\in A \wedge c\in C \xRightarrow{A\subseteq B} a\in B , c\in C \Rightarrow (a,c)\in B\times C$

پس $A\times C\subseteq B\times C$

۲- تمرین ۷ صفحه ۶۷: مجموعه $A\times A$ دارای ۹ عضو است اگر $(0,1)$ و $(-1,0)$ دو عضو آن باشد مجموعه A و عضوهای دیگر $A\times A$ را بیابید.

حل: $A=\{-1,0,1\}$ و

$$A\times A=\{(-1,-1),(0,0),(1,1),(-1,0),(-1,1),(0,1),(1,0),(1,-1),(0,-1)\}$$

۳- تمرین ۹ صفحه ۶۷ اگر A و B و C و D چهار مجموعه باشند ثابت کنید

$$(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$$

حل: با عضوگیری ثابت می‌کنیم

$$\forall (x,y)\in[(A\times C)\cap(B\times D)] \overset{\text{تعریف}}{\underset{\text{اشتراک}}{\equiv}} (x,y)\in A\times C \wedge (x,y)\in B\times D \overset{\text{تعریف}}{\underset{\text{ضرب}}{\equiv}} (x\in A \wedge y\in C)\wedge(x\in B , y\in D) \underset{\text{جابجایی و شرکت پذیری}}{\equiv} (x\in A\wedge x\in B)\wedge(y\in C\wedge y\in D) \overset{\text{تعریف}}{\underset{\text{اشتراک}}{\equiv}}$$

$$(x\in A\cap B)\wedge y\in C\cap D \underset{\text{تعریف ضرب}}{\equiv} (x,y)\in[(A\cap B)\times(C\cap D)]$$

۴- تمرین ۱۰ صفحه ۶۷ (تعمیم حاصل ضرب دکارتی) اگر A_1 و A_2 و ... و A_n ، n مجموعه باشند آیا می‌توانیم تعریف ارائه شده $A_1\times A_2\times A_3$ تعمیم دهیم؟ آیا می‌توان تعریف را برای حاصل ضرب دکارتی مجموعه بالا یعنی $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ تعمیم دهیم؟

حل) هر دو حاصل ضرب دکارتی می‌توان تعریف کرد.

$$A_1\times A_2\times A_3=\{(x,y,z)\mid x\in A_1 , y\in A_2 , z\in A_3\}$$

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid x_1\in A_1 , x_2\in A_2 ,\dots, x_n\in A_n\}$$

نکته: اگر بجای هر $A_i=\mathbb{R}$ باشد $\prod_{i=1}^{n}A_i=\mathbb{R}^n$ فضای اقلیدسی می‌باشد.
مثلاً $\mathbb{R}^2$ صفحه دکارتی است و $\mathbb{R}^3$ فضای دکارتی سه بعدی است.

۵- تمرین ۱۱ صفحه ۶۸: ثابت کنید که اگر $A\times A=B\times B$ آنگاه $A=B$.

اثبات: $\forall x\in A \Leftrightarrow (x,x)\in A\times A=B\times B \Leftrightarrow (x,x)\in B\times B \Leftrightarrow x\in B$

بنابراین $A=B$ (یک طرف $A\subseteq B$ و طرف دیگر $B\subseteq A$ است.)

۶- تمرین ۱۷ صفحه ۶۸: ثابت کنید که اگر $C \neq \emptyset$, $A\times C = B\times C$ آنگاه $A = B$.

$$\forall x\in B \xrightarrow[\exists y\in C]{C\neq\emptyset} (x,y)\in B\times C \xrightarrow{A\times C = B\times C} (x,y)\in A\times C \Rightarrow x\in A \quad ;(B\subseteq A)$$

$$\forall x\in A \xrightarrow[\exists y\in C]{C\neq\emptyset} (x,y)\in A\times C \xrightarrow{A\times C = B\times C} (x,y)\in B\times C \Rightarrow x\in B \quad ;(A\subseteq B)$$

پس از $A\subseteq B$, $B\subseteq A$ نتیجه می‌شود $A = B$

۷- تمرین ۱۸ صفحه ۶۸. ثابت کنید که $(A\times B)-(C\times C) = [(A-C)\times B]\cup[A\times(B-C)]$
که در آن A و B و C مجموعه‌های دلخواه هستند.

حل: $\forall (x,y)\in[(A-C)\times B]\cup[A\times(B-C)] \overset{\text{تعریف اجتماع}}{\equiv} (x,y)\in(A-C)\times B \vee (x,y)\in A\times(B-C)$

$\overset{\text{تعریف ضرب}}{\equiv} [x\in(A-C)\wedge y\in B] \vee [x\in A\wedge y\in(B-C)] \overset{\text{تعریف تفاضل}}{\equiv} [(x\in A\wedge x\notin C)\wedge y\in B]\vee$

$[x\in A\wedge(y\in B\wedge y\notin C)] \equiv [(x,y)\in A\times B\wedge y\notin C] \vee [(x,y)\in A\times B\wedge x\notin C]$

$\overset{\text{توزیع پذیری}}{\equiv} (x,y)\in A\times B\wedge\{y\notin C\vee x\notin C\} \equiv (x,y)\in[A\times B\wedge(x,y)\notin C\times C] \equiv$

$(x,y)\in[A\times B - C\times C]$

۸- تمرین ۱۹ صفحه ۶۸: ثابت کنید که

$(A\times A)-(B\times C) = [(A-B)\times A]\cup[A\times(A-C)]$

$\forall (x,y)\in[(A-B)\times A]\cup[A\times(A-C)] \equiv (x,y)\in(A-B)\times A\vee(x,y)\in A\times(A-C)$

$\equiv [x\in(A-B)\wedge y\in A]\vee[x\in A\wedge y\in A-C] \equiv [(x\in A\wedge x\notin B)\wedge y\in A]\vee[x\in A\wedge(y\in A\wedge y\notin C)]$

$\equiv [(x,y)\in A\times A\wedge x\notin B]\vee[(x,y)\in A\times A\wedge y\notin C] \overset{\text{توزیع پذیری}}{\equiv} [(x,y)\in A\times A\wedge(x\notin B\vee y\notin C)]$

$\equiv (x,y)\in A\times A\wedge(x,y)\notin B\times C \equiv (x,y)\in[A\times A - B\times C]$

۹- تمرین ۲۰ صفحه ۶۸: ثابت کنید که

$(A\times B)-(C\times D) = [(A-C)\times B\cup A\times(B-D)]$

$\forall (x,y)\in[(A-C)\times B\cup(A\times(B-D)] \equiv (x,y)\in[(A-C)\times B]\vee[(x,y)\in A\times(B-D)]$

$\equiv [x\in A-C\wedge y\in B]\vee[x\in A\wedge y\in B-D] \equiv [(x\in A\wedge x\notin C)\wedge y\in B]\vee$

$[x\in A\wedge(y\in B\wedge y\notin D)] \equiv [(x,y)\in A\times B\wedge x\notin C]\vee[(x,y)\in A\times B\wedge y\notin D]$

$\equiv [(x,y)\in A\times B\wedge(x\notin C\vee y\notin D)] \equiv [(x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\notin C\times D]$

$\equiv (x,y)\in[A\times B - C\times D]$

۱۰- تمرین ۲۱ صفحه ۶۵ جفت مرتب (x,y) را مجموعه $\{\{x\},\{x,y\}\}$ تعریف می‌کنیم. یعنی: $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$. ثابت کنید که $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c$ و $b=d$.

اثبات: فرض کنید که $(a,b)=(c,d)$ آنگاه $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$ بنابراین $\{a\}=\{c\}$ و $\{a,b\}=\{c,d\}$ پس $a=c$ و $b=d$.

برعکس اگر $a=c$ و $b=d$ پس $\{a\}=\{c\}$ و $\{a,b\}=\{c,d\}$ بنابراین $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$ یعنی $(a,b)=(c,d)$

۱۱- تمرین های ۵ و ۶ صفحه ۷۱: الف) رابطه‌ای مثال بیاورید که انعکاسی و متعدی باشد ولی متقارن نباشد.

جواب: اگر $X=\{a,b\}$ آنگاه $R=\{(a,a),(b,b),(a,b)\}$ انعکاسی و متعدی است ولی متقارن نیست.

ب) رابطه‌ای مثال بزنید که متقارن و متعدی باشد ولی انعکاسی نباشد.

جواب: اگر $X=\{a,b\}$ آنگاه $R=\{(a,a),(a,b),(b,a)\}$ یک رابطه متقارن و متعدی است ولی انعکاسی نیست.

۱۲- تمرین ۱۲ صفحه ۷۲: فرض کنید که R یک رابطه از A به B باشد و X یک زیرمجموعه دلخواه A باشد $R(X)$ که نگاره X (یا تصویر مجموعه X تحت R) را چنین تعریف کنید. $R(X)=\{y\in B \mid \exists x\in X \cdot (x,y)\in R\}$

ثابت کنید که اگر D و E زیرمجموعه‌های A باشند آنگاه الف) $R(D\cup E)=R(D)\cup R(E)$

ب) $R(D\cap E)=R(D)\cap R(E)$

حل الف) $R(D\cup E)=\{y\in B \mid \exists x\in D\cup E \ (x,y)\in R\}=\{y\in B \mid x\in D \vee x\in E \ (x,y)\in R\}$

$=\{y\in B \mid x\in D \ (x,y)\in R\}\cup\{y\in B \mid x\in E \ (x,y)\in R\}=R(D)\cup R(E)$

حل ب) $R(D\cap E)=\{y\in B \mid \exists x\in D\cap E \ (x,y)\in R\}=\{y\in B \mid x\in D\wedge x\in E \ (x,y)\in R\}$

$=\{y\in B \mid x\in D \ (x,y)\in R\}\cap\{y\in B \mid x\in E \ (x,y)\in R\}=R(D)\cap R(E)$

۱۳- تمرین ۴ صفحه ۷۲. با مفروضات تمرین ۱۲ ثابت کنید که الف) $Dom(R)=R^{-1}(B)$ ب) $Im(R)=R(A)$

حل الف) $Dom R=\{x\in A \mid \exists y\in B \ (x,y)\in R\}=\{x\in R \mid \exists y\in B \ (y,x)\in R^{-1}\}=R^{-1}(B)$

ب) $Im(R)=\{y\in B \mid \exists x\in A \ (x,y)\in R\}=R(A)$

۱۴- تمرین ۱۴ صفحه ۷۲: اگر R و S دو رابطه از A به B باشند آنگاه $R\cup S$ یک رابطه از A به B است. ثابت کنید

الف) $Dom(R\cup S)=Dom(R)\cup Dom(S)$ ب) $Im(R\cup S)=Im(R)\cup Im(S)$

ج) برای هر $x\subseteq A$: $(R\cup S)(X)=R(X)\cup S(X)$

اثبات الف) $\forall x\in Dom(R\cup S)\equiv \exists y\in B:(x,y)\in R\cup S\equiv \exists y\in B:(x,y)\in R\vee (x,y)\in S$

$\equiv \exists y\in B:(x,y)\in R \vee \exists y\in B:(x,y)\in S\equiv x\in Dom R \vee x\in Dom S\equiv x\in Dom R\cup Dom S$

اثبات ب و ج در صفحه بعد

اثبات ب) $\forall y \in Im(R\cup S) \equiv \exists x\in A : (x,y)\in R\cup S \equiv \exists x \in A: (x,y)\in R \vee (x,y)\in S$

$\equiv \exists x\in A:(x,y)\in R \vee \exists x\in A:(x,y)\in S \equiv y\in Im(R)\vee y\in Im(S)\equiv$

$\equiv y\in [Im(R)\cup Im(S)]$

اثبات ج)

$\forall y\in (R\cup S)(X) \equiv \exists x\in X: (x,y)\in R\cup S \equiv \exists x\in X: (x,y)\in R \vee (x,y)\in S \equiv$

$\equiv [\exists x\in X:(x,y)\in R]\vee[\exists x\in X:(x,y)\in S] \equiv y\in R(X)\vee y\in S(X) \equiv y\in [R(X)\cup S(X)]$

۱۵- تمرین ۴ صفحه ۷۶. فرض کنید که P یک افراز مجموعه ناتهی X باشد و رابطه هم‌ارزی X/P مفروض است. ثابت کنید $X/P = \bigcup_{A\in P} A\times A$

اثبات: با عضوگیری ثابت می‌کنیم.

$\forall (x,y)\in X/P \overset{\text{طبق تعریف } X/P}{\equiv} \exists A\in P\ x,y\in A \equiv \exists A\in P\ (x,y)\in A\times A \equiv$

$\equiv (x,y)\in \bigcup_{A\in P} A\times A$

۱۶- تمرین فرض کنید که X یک مجموعه متناهی و P افرازی از X باشد بطوریکه $P=\{A_1,A_2,\dots,A_k\}$ و فرض کنید که تعداد اعضای A_i برابر با n_i است و $i=1,2,\dots,k$. ثابت کنید که تعداد جفتهای مرتب در رابطه هم‌ارزی X/P دقیقاً $\sum_{i=1}^{k} n_i^2$ است.

اثبات: طبق فرض داریم $n(A_i)=n_i$ و طبق تمرین قبل (تمرین ۴) $X/P=\bigcup_{i=1}^{k} A_i\times A_i$ در این صورت تعداد جفتهای مرتب در X/P برابر

$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 = \sum_{i=1}^{k} n(A_i\times A_i) = n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\times A_i) = n(X/P)$.

۱۷- تمرین ۷ صفحه ۷۶:

فرض کنید که $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $P=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$

الف) نشان دهید که P یک افراز X است.

ب) رابطه هم‌ارزی X/P را به صورت جفتهای مرتب مشخص کنید

ج) با فرض $R=X/P$، مجموعه‌های a/R و b/R و c/R و d/R و e/R را صریحاً مشخص کنید

حل الف) بدیهی است که $\{a,b\}$ و $\{c\}$ و $\{d,e\}$ ناتهی هستند و دو به دو مجزا هستند و $X=\{a,b\}\cup\{c\}\cup\{d,e\}$ پس P یک افراز X است.

ب) $X/P = R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e)\}$

ج) $a/R=b/R=\{a,b\}$ و $c/R=\{c\}$ و $e/R=d/R=\{e,d\}$

۱۸- تمرین ۹ صفحه ۷۷. رابطه R روی $\mathbb{Z}$ را به صورت $(x,y)\in R \Leftrightarrow x-y=5k,\ k\in\mathbb{Z}$ تعریف شده است.

الف) ثابت کنید که رابطه R روی $\mathbb{Z}$ یک رابطه هم‌ارزی است

ب) X/R افرازی از X را بیابید.

ج) تحقیق کنید که $X/(X/R) = R$.

حل الف) انعکاسی بودن R : $\forall x\in \mathbb{Z}\quad x-x=5\times 0\quad k=0\in\mathbb{Z} \Rightarrow (x,x)\in R$

تقارنی R : $(x,y)\in R \Rightarrow x-y=5k\quad \exists k\in\mathbb{Z} \Rightarrow y-x=5(-k)\ (-k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow (y,x)\in R$

متعدی بودن R : $(x,y)\in R,\ (y,z)\in R \Rightarrow \exists k,m\in\mathbb{Z}\quad x-y=5m,\ y-z=5k \Rightarrow$

$(x-y)+(y-z)=5(m+k) \Rightarrow x-z=5(m+k)\quad m+k\in\mathbb{Z} \Rightarrow (x,z)\in R$

ب)

$\mathbb{Z}/R=\{x/R \mid x\in\mathbb{Z}\}=\{5\mathbb{Z},\ 1+5\mathbb{Z},\ 2+5\mathbb{Z},\ 3+5\mathbb{Z},\ 4+5\mathbb{Z}\}$

$x/R=\{y\in\mathbb{Z}\mid y-x=5k\quad k\in\mathbb{Z}\}=\{y\in\mathbb{Z}\mid y=\underset{k\in\mathbb{Z}}{x+5k}\}=\{x+5k\mid k\in\mathbb{Z}\}$

با توجه به اینکه R رابطه همنهشتی به پیمانه ۵ روی Z است پس این رابطه ۵ کلاس هم ارزی دارد که عبارت است از $0/R=5\mathbb{Z}$ و $1/R=1+5\mathbb{Z}$ و $2/R=2+5\mathbb{Z}$ و $3/R=3+5\mathbb{Z}$ و $4/R=4+5\mathbb{Z}$

ج) $\mathbb{Z}/(\mathbb{Z}/R)=\{(x,y)\mid \exists A\in\mathbb{Z}/R\quad x,y\in A\}=R$

$\forall (x,y)\in \mathbb{Z}/(\mathbb{Z}/R) \equiv \exists A\in\mathbb{Z}/R,\ x,y\in A \xrightarrow[\text{همنهشتی به پیمانه ۵ است}]{\text{(یکی از ۵ کلاس)}} (x,y)\in R$

۱۹- تمرین ۸ صفحه ۸۳ و ۸۴، فرض کنید $X=\{x,y,z\}$ و $Y=\{1,2,3,4\}$، کدام یک از عبارات زیر یک تابع از X به Y مشخص می‌شود. برای هر کدام که تابع نیست دلیل تابع نبودن آن را ذکر کنید.

الف) $f=\{(x,1),(y,2),(z,3)\}$: f یک تابع است (تابع دهی است)

ب) $g=\{(x,2),(y,3),(z,2)\}$: g یک تابع است (یک به یک و پوشا نیست)

ج) $h=\{(x,2),(y,1)\}$: h تابع نیست زیرا عضو z حرکت داده نشده است یا $Dom\,h\neq X$

د) $L=\{(x,1),(x,2),(y,1),(z,3)\}$: L تابع نیست زیرا x به دو عدد ۱ و ۲ رفته است و یکتایی رعایت نشده است (یعنی شرط (ب) تابع را ندارد)

۲۰- تمرین ۹ صفحه ۸۴، در تمرین قبل f^{-1} و g^{-1} و h^{-1} و L^{-1} را بیابید کدام یک از این رابطه‌های وارون تابعی از Y به X است و کدام تابع نیست چرا

حل: f^{-1} یک تابع است $f^{-1}=\{(1,x),(2,y),(3,z)\}$

$g^{-1}=\{(2,x),(3,y),(2,z)\}$: g^{-1} تابع نیست شرط (ب) در تعریف تابع ندارد. $\left[(2,x),(2,z)\in g^{-1}\right.$ ولی $\left.x\neq z\right]$

$h^{-1}=\{(2,x),(1,y)\}$ ، h^{-1} تابع نیست چون $Dom\,h^{-1}\neq Y$

$L^{-1}=\{(1,x),(2,x),(1,y),(3,z)\}$ ، L^{-1} تابع نیست شرط (ب) رعایت نشده است ($(1,x),(1,y)\in L^{-1}$ ولی $x\neq y$)

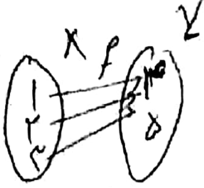
۲۱- تمرین ۵ صفحه ۸۴، فرض کنید $f: X\to X$ یک تابع از X به X و همچنین f یک رابطه انعکاسی باشد. ثابت کنید که در این صورت f تابع همانی $I_X: X\to X$ است.

حل: $(x,y)\in f \xrightarrow[\text{انعکاسی است}]{f\ \text{چون}} (x,x)\in f\ ,\ (x,y)\in f \underset{\text{تابع است}}{\Longrightarrow} x=y \Rightarrow \forall x\in X: f(x)=x$

یعنی $f: X\to X$ با ضابطه $f(x)=x$ آنگاه $f=I_X$.

۲۲- تمرین ۵ صفحه ۸۷ فرض کنید که $f: X\to Y$ یک تابع و $A\subseteq X$ و $B\subseteq Y$ باشند. مثال‌هایی بیاورید که نشان دهد حکم‌های زیر درست نباشند:

الف) اگر $B\neq\phi$ آنگاه $f^{-1}(B)\neq\phi$



$f^{-1}(\{5\})=\phi$

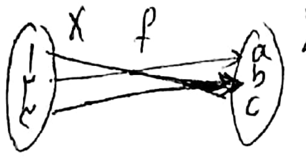
$B=\{5\}\neq\phi \Rightarrow f^{-1}(B)=\phi$

ب) $f^{-1}(f(A))=A$

$A=\{1,2\} \Rightarrow f(A)=\{4\} \Rightarrow f^{-1}(f(A))=f^{-1}(\{4\})=\{1,2,3\}$

$\Rightarrow f^{-1}(f(A))\neq A$

ج) $f(f^{-1}(B))=B$.



$B=\{c,b\} \Rightarrow f^{-1}(B)=\{1,2,3\} \Rightarrow f(f^{-1}(B))=f(\{1,2,3\})=\{b\}$

$\Rightarrow f(f^{-1}(B))\neq B$

د) $f(X)=Y$

$X=\{1,2,3\} \Rightarrow f(X)=\{a,b\}\neq Y$

۲۳- تمرین ۶ صفحه ۸۷، ثابت کنید که اگر $f(X)=Y$ (f پوشا باشد) آنگاه مسئله ۵ قسمت ج) درست است:

اثبات: $\forall y\in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x\in f^{-1}(B): y=f(x) \Rightarrow \exists x\in X,\ f(x)=y\in B$

$\Rightarrow f(f^{-1}(B))\subseteq B$ (1)

$\forall y\in B \xrightarrow[f(X)=Y]{f\ \text{پوشا است}} \exists x\in f^{-1}(B): y=f(x) \Rightarrow f(x)\in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow B\subseteq f(f^{-1}(B))$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow B=f(f^{-1}(B))$

۲۴- تمرین ۷ صفحه ۸۷، فرض کنید که $f: X\to Y$ یک تابع باشد که $f(X)=Y$ (یعنی f پوشا باشد) و B و C دو زیرمجموعه Y باشند. ثابت کنید که اگر $f^{-1}(B)=f^{-1}(C)$ آنگاه $B=C$.

مثالی بیاورید که در حالت $f(X)\neq Y$ نشان دهد که این حکم درست نیست.

حل: $\forall y\in B \xrightarrow[\text{است}]{f\ \text{پوشا}} \exists x\in X,\ y=f(x) \Rightarrow x\in f^{-1}(B) \xrightarrow{f^{-1}(B)=f^{-1}(C)} x\in f^{-1}(C)$

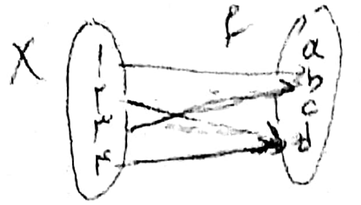
$\Rightarrow y=f(x)\in C \Longrightarrow B\subseteq C$ (1)

$\forall y\in C \xrightarrow{\text{پوشا}} \exists x\in X: y=f(x) \Rightarrow x\in f^{-1}(C) \xrightarrow{\text{فرض}} x\in f^{-1}(B) \Rightarrow y\in B$

پس $C\subseteq B$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow B=C$

ادامه جواب



$B=\{a,b\}$ و $C=\{c,b\}$

$f^{-1}(B)=\{1,2\}=f^{-1}(C)$ ولی $B\neq C$

۲۵- تمرین ۹ صفحه ۸۷: تابع $f: X\to Y$ و $A\subseteq X$ و $B\subseteq Y$ مفروض است، ثابت کنید که

الف) $f(A\cap f^{-1}(B)) = f(A)\cap B$ ب) $f(f^{-1}(B)) = f(X)\cap B$

اثبات الف)

$\forall y\in f(A\cap f^{-1}(B)) \equiv \exists x\in A\cap f^{-1}(B): y=f(x) \equiv$

$x\in A\wedge x\in f^{-1}(B): y=f(x) \equiv y\in f(A)\wedge y\in B \equiv y\in[f(A)\cap B]$

اثبات ب) $\forall y\in f(f^{-1}(B)) \equiv \exists x\in f^{-1}(B): y=f(x) \overset{f^{-1}(B)\subseteq X}{\equiv} x\in f^{-1}(B)\wedge x\in X$ $y=f(x)$

$\equiv f(x)\in B \wedge f(x)\in f(X) \Rightarrow y=f(x)\in[B\cap f(X)]$

۲۶- تمرین ۱۰ صفحه ۸۸: تابع $f: X\to Y$ و $B\subseteq Y$ مفروض است ثابت کنید که $f^{-1}(Y-B) = X - f^{-1}(B)$

اثبات: در قضیه ۲ با انتخاب $C=Y$ و $f^{-1}(C)=f^{-1}(Y)=X$ مسئله حل است.

۲۷- تمرین ۴ صفحه ۹۱: تابع $g: (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ با ضابطه $g(x)=\tan x$ تعریف شده است. آیا این تابع دوسویی است؟ اگر چنین است تابع وارون آن را بیابید

حل: g یک‌یک است زیرا $g'(x)=1+\sec^2 x>0$ یعنی g صعودی است پس یک‌یک است و g پوشا است زیرا $\operatorname{Im} g=\mathbb{R}$ و معکوس این تابع $g^{-1}:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ با ضابطه $g^{-1}(x)=\arctan x$ یا $g^{-1}(x)=\tan^{-1}(x)$ است.

۲۸- تمرین ۵ صفحه ۹۱: نشان دهید که تابع مشخصه $\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\in X-A\end{cases}$ پوشا است اگر و فقط اگر $A\subseteq X$ و $A\neq\emptyset$. چه وقت تابع χ_A دوسویی می‌شود

حل: اگر $A\subseteq X$ و $A\neq\emptyset$ پس $\exists x\in A$ بنابراین $\chi_A(x)=1$ و بنابراین $\operatorname{Im}\chi_A=\{1,0\}$ و تابع χ_A پوشا می‌شود و برعکس اگر χ_A پوشا باشد طبق تعریف $\forall 1\in\{0,1\}$ $\exists x\in A$ که $\chi_A(x)=1$ پس $A\neq\emptyset$.

اگر مجموعه $X=\{a,b\}$ و $A=\{a\}$ (یعنی مجموعه X دوعضوی و مجموعه A تک عضوی) شود χ_A یک‌یک می‌شود و بنابراین طبق حالت قبل چون $A\neq\emptyset$ پس χ_A پوشا هم می‌شود پس χ_A دوسویی می‌شود.

۲۹- تمرین ۶ صفحه ۹۱. ثابت کنید که تابع ثابت $c_b: X\to Y$ با ضابطه $c_b(x)=b$ پوشا است اگر و فقط اگر $Y=\{b\}$. چه وقت $c_b: X\to Y$ یک‌یک می‌شود

حل. اگر $|A| = |Y|$ باشد معین است که $Im\, g_A = |A| = Y$ پس g_A پوشا است.

حال g_A پوشا، و طبق تعریف تابع g_A و $Im\, g_A = |A| = Y$ بنابراین در غیر این صورت g_A یک به یک نیست

حال زمانی g_A یک به یک می‌شود که $|A| = |X|$ یعنی مجموعه X تک عضوی باشد، و زمانی g_A پوشا می‌شود که $|A| = |X|$ و $|A| = |Y|$ باشد.

۳۰- تمرین ۹ صفحه ۹۱: ثابت کنید که یک تناظر یک به یک بین مجموعه اعداد صحیح Z و مجموعه اعداد صحیح فرد وجود دارد.

حل. تابع $f: Z \longrightarrow Z_o$ با ضابطه $f(m) = 2m-1$ (یا $f(m) = 2m+1$)

دوسویی است که در آن Z_o مجموعه اعداد صحیح فرد است

f یک به یک است

$$f(m) = f(n) \Rightarrow 2m-1 = 2n-1 \Rightarrow 2m = 2n \Rightarrow m = n$$

f پوشا است

$$\exists k \in Z_o : k = 2n-1 \Rightarrow \exists n \in Z : f(n) = 2n-1 = k$$

در واقع $n = \frac{k+1}{2} \in Z$ وجود دارد زیرا

$$f(n) = 2\left(\frac{k+1}{2}\right) - 1 = k+1-1 = k$$

۳۱- تمرین ۱۰ صفحه ۹۱: فرض کنید که X یک مجموعه متناهی با m عضو و Y یک مجموعه متناهی با n عضو باشد. ثابت کنید الف) اگر $m > n$ آنگاه هیچ تابع یک به یک $f: X \longrightarrow Y$ وجود ندارد.

ب) اگر $m \leq n$ آنگاه دقیقاً $\frac{n!}{(n-m)!}$ تابع یک به یک از X به Y وجود دارد.

حل الف) اگر $m > n$ باشد برای یک به یک بودن باید ازای هر عضو دامنه (یعنی عضوی از X) یک عضو منحصر به فرد در Y موجود باشد که با هم مربوط شوند ولی چون $m - n > 0$ پس تابع نمی‌تواند یک به یک باشد چرا که به ازای $m - n = k$ ، y تکراری انتخاب می‌شود یعنی تابع یک به یک نیست.

اثبات ب) فرض کنید که $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ و $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

و $f = \{(x_1, \ ), (x_2, \ ), \dots, (x_m, \ )\}$ یک تابع یک به یک باشد. در جای خالی هر یک از زوج های $(x_i, \ )$ در f باید دقیقاً یک عضو از Y باشد، از قرار گرفتن و تعداد این انتخاب ها برای اعضای Y برابر با $\frac{n!}{(n-m)!}$ باشد یعنی

$$n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

برای زوج $(x_1, \ )$ ، n حالت برای زوج $(x_2, \ )$ ، $(n-1)$ حالت و ... برای $(x_m, \ )$ انتخاب $n-(m-1)$ حالت انتخاب وجود دارد.

۳۲- تمرین ۱۱ صفحه ۹۲، فرض کنید که X یک مجموعه متناهی با m عضو است. چند تابع دوسویی از X در X وجود دارد؟ [هر تابع دوسویی از یک مجموعه متناهی به خودش را یک جایگشت می‌نامیم]

جواب

$$m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = m!$$

$$\underset{x_1}{\overset{\text{عضو اول}}{\boxed{m}}}\ \underset{x_2}{\overset{\text{عضو دوم}}{\boxed{m-1}}}\ \dots\ \underset{x_m}{\overset{\text{عضو آخر}}{\boxed{1}}}$$

۳۳- تمرین ۱۲ صفحه ۹۲. تابع $f: X \longrightarrow Y$ و $A \subseteq X$ ، $B \subseteq Y$ مفروض اند ثابت کنید،

الف) اگر f یک‌به‌یک باشد آنگاه $f^{-1}(f(A)) = A$

ب) اگر f پوشا باشد آنگاه $f(f^{-1}(B)) = B$ (این قسمت در بخش قبل تمرین ۶ صفحه ۸۷ تمرین ۳۴ تمرین‌های حاضر) حل شده است.

حل الف) فرض کنید که f یک‌به‌یک باشد، $\forall x \in f^{-1}(f(A)) \Longrightarrow \exists y \in f(A) : y = f(x)$

$\xrightarrow{f \text{ یک‌به‌یک}} \exists x \in A : y = f(x)$ پس $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ ①

$\forall x \in A \Rightarrow \exists y \in f(A) : y = f(x) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$; $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ ②

$$①, ② \Longrightarrow f^{-1}(f(A)) = A$$

۳۴- تمرین ۱۳ صفحه ۹۲. عکس مسئله ۱۲ را ثابت کنید:

الف) اگر برای هر $A \subseteq X$، $f^{-1}(f(A)) = A$، آنگاه f یک‌به‌یک است.

ب) اگر برای هر $B \subseteq Y$، $f(f^{-1}(B)) = B$، آنگاه f پوشاست است.

حل: الف) فرض کنید که $f(x_1) = f(x_2)$ پس طبق فرض $A = \{x_1\}$ و بنابراین $\{x_1\} = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(\{x_1\})) =$

$f^{-1}(\{f(x_1)\}) = f^{-1}(\{f(x_2)\}) = f^{-1}(f(\{x_2\})) = \{x_2\} \Longrightarrow \{x_1\} = \{x_2\} \Rightarrow x_1 = x_2$

حل ب) برای هر $y \in Y$ قرار دهید $B = \{y\}$ در این صورت $f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y)\}$ پس $x = f^{-1}(y) \in X$,

بنابراین $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$ یعنی f پوشا است.

۳۵- تمرین ۱۴ صفحه ۹۲: فرض کنید که $f: X \to Y$ یک‌به‌یک است و $B \subset X$، ثابت کنید که $f(X-B) = f(X) - f(B)$.

حل: $\forall y \in f(X-B) \equiv \exists x \in X - B : y = f(x) \equiv \exists x \in X \wedge x \notin B : y = f(x)$

$\xrightarrow{\text{چون } f \text{ یک‌به‌یک}} f(x) \in f(X) \wedge f(x) \notin f(B) : y = f(x) \equiv y \in [f(X) - f(B)]$

توجه: فرض $x \notin B$، f یک‌به‌یک است پس $f(x) \notin f(B)$ زیرا اگر $y = f(x) \in f(B)$ و تناقض زیر می‌رسیم

تناقض $y = f(x) \in f(B) \Longrightarrow \forall x_0 \in B : f(x_0) = y = f(x) \Longrightarrow x_0 \neq x$

چون $x \notin B$ و $x_0 \in B$ نمی‌تواند خود x باشد چون دلخواه است.

۳۶- تمرین ۱۵ صفحه ۹۲: فرض کنید که $f: X \to Y$ یک‌به‌یک و A و B زیرمجموعه‌های X هستند. ثابت کنید که $f(A-B) = f(A) - f(B)$.

حل: $\forall y \in f(A-B) \equiv \exists x \in (A-B) : y = f(x) \equiv x \in A \wedge x \notin B \; y = f(x) \xrightarrow[\text{بودن } f]{\text{یک‌به‌یک}}$

$f(x) \in f(A) \wedge f(x) \notin f(B) \equiv y \in f(A) \wedge y \notin f(B) \equiv y \in [f(A) - f(B)]$

مرا

۳۷- تمرین ۱۶ صفحه ۹۲. فرض کنید که $f: X \to X$ چنان باشد که برای هر $x \in X$، $f(f(x)) = x$.
ثابت کنید که f یک رابطه متقارن روی X است.

حل: $(x,y) \in f \equiv y = f(x) \equiv f(f(x)) = f(y) \xrightarrow[f(f(x))=x]{\text{چون}} x = f(y) \Rightarrow (y,x) \in f$

یعنی f متقارن است

۳۸- تمرین ۱۷ صفحه ۹۳. عکس قضیه ۱۴ را ثابت کنید: فرض کنید که $f: X \to Y$ چنان تابعی است که $f^{-1}: Y \to X$ آنگاه $f: X \to Y$ دوسویی است

حل: می‌دانیم که $Dom\, f = Im\, f^{-1} = X$ و $Dom\, f^{-1} = Im f = Y$ پس f پوشا است

چون f^{-1} یک تابع است (یعنی وجود دارد) پس f یک‌به‌یک است پس f دوسویی است

۳۹- تمرین ۱۹ صفحه ۹۳. عکس مسئله ۱۵ را ثابت کنید: اگر برای تمام زیرمجموعه‌های X مانند A و B، $f(A-B) = f(A) - f(B)$ آنگاه f یک‌به‌یک است

حل: $f: X \to Y$ و $A, B \subseteq X$ فرض کنید که $f(a) = f(b)$ قرار می‌دهیم $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$

$f(A) = f(\{a\}) = \{f(a)\} = \{f(b)\} = f(\{b\}) = f(B) \Rightarrow f(A) - f(B) = \phi \Rightarrow$

$f(A-B) = f(\{a\} - \{b\}) = \phi \Rightarrow \{a\} - \{b\} = \phi \Rightarrow \{a\} = \{b\} \Rightarrow a = b$

۴۰- تمرین ۲۰ صفحه ۹۳: آیا عکس مسئله ۱۴ صحیح است. جواب: بله عکس تمرین ۱۴ صحیح است

۴۱- تمرین ۴ صفحه ۹۵- تابع $f: X \to Y$ مفروض است. ثابت کنید که $f \circ I_X = f = I_Y \circ f$

حل: $I_X: X \to X$، $I_X(x) = x$ و $I_Y: Y \to Y$، $I_Y(y) = y$ و $f: X \to Y$، $f(x) = y$

با توجه به دو تابع $f \circ I_X: X \to Y$ و $I_Y \circ f: X \to Y$

$(f \circ I_X)(x) = f(I_X(x)) \underset{(1)}{=} f(x) = y$ و $I_Y(f(x)) \underset{(2)}{=} f(x)$

$Dom\, f = Dom\,(f \circ I_X) = Dom(I_Y \circ f)$ و طبق (1) و (2) $f(x) = (f \circ I_X)(x) = (I_Y \circ f)(x)$

۴۲- تمرین ۵ صفحه ۹۵. فرض کنید که $f: X \to Y$ دوسویی و $f^{-1}: Y \to X$ تابع وارون f است. ثابت کنید که $f \circ f^{-1} = I_Y$ و $f^{-1} \circ f = I_X$.

حل: می‌دانیم که $f \circ f^{-1}: Y \to Y$ و $f^{-1} \circ f: X \to X$، برای اثبات $f \circ f^{-1} = I_Y$ کافی است که نشان دهیم $(f \circ f^{-1})(y) = I_Y(y)$ $\forall y \in Y$ و برای اثبات $f^{-1} \circ f = I_X$ ثابت کنیم که $\forall x \in X: (f^{-1} \circ f)(x) = I_X(x)$

$$(f\circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) \overset{*}{=} f(x) = y = I_Y(y)$$

$$* \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) \overset{*}{=} f^{-1}(y) \overset{*}{=} x = I_X(x)$$

۴۳- تمرین ۶ صفحه ۹۵ فرض کنید که $f: X \to Y$ یک تابع باشد. اگر توابع $g: Y \to X$ و $h: Y \to X$ وجود داشته باشند بطوریکه $g\circ f = I_X$ و $f\circ h = I_Y$. ثابت کنید $f: X \to Y$ دوسویی است و

$$g = h = f^{-1}$$

حل: چون $g: Y \to X$ وجود دارد بطوریکه $g\circ f = I_X$ پس طبق قضیه ۱۶ (f معکوس چپ دارد) f یک به یک است و چون $h: Y \to X$ وجود دارد بطوریکه $f\circ h = I_Y$ پس طبق قضیه ۱۷ (f معکوس راست دارد) f پوشا است پس f دوسویی است. حال چون f هم معکوس چپ و هم معکوس راست دارد پس هر دو معکوس باهم برابرند یعنی

$$g(y) = g(f(x)) = (g\circ f)(x) = I_X(x) = x = f^{-1}(y) \Rightarrow g = f^{-1}$$

$$y = I_Y(y) = f\circ h(y) = f(h(y)) = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(f(h(y))) = (f^{-1}\circ f)(h(y)) = h(y)$$

$$\xrightarrow[x = f^{-1}(y)]{y = f(x)} f^{-1}(y) = h(y) \Rightarrow f^{-1} = h$$

۴۴- تمرین ۸ صفحه ۹۶ فرض کنید که R یک رابطه از X به Y و S یک رابطه از Y به Z باشند. می‌توانیم همانند ترکیب توابع، ترکیب این رابطه‌ها را با $S\circ R = \{(x,z) \in X\times Z \mid \exists y \in Y \ (x,y)\in R, (y,z)\in S\}$ که رابطه‌ای از X به Z است، تعریف کنیم. ثابت کنید که

الف) $(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}$ ب) اگر T یک رابطه از Z به W باشد آنگاه $T\circ(S\circ R) = (T\circ S)\circ R$

حل الف)

$$(S\circ R)^{-1} \subseteq Z\times X \ , \ R^{-1}\circ S^{-1} \subseteq Z\times X$$

$$\forall (z,x) \in (S\circ R)^{-1} \equiv (x,z) \in S\circ R \equiv \exists y \in Y : (x,y)\in R \wedge (y,z)\in S \equiv$$

$$\exists y \in Y : (y,x) \in R^{-1} \wedge (z,y) \in S^{-1} \equiv (z,x) \in R^{-1}\circ S^{-1}$$

حل ب)

$$R \subseteq X\times Y \ , \ S \subseteq Y\times Z \ , \ T \subseteq Z\times W \ , \ S\circ R \subseteq X\times Z \ , \ \boxed{T\circ(S\circ R) \subseteq X\times W}$$

$$(T\circ S) \subseteq Y\times W \ , \ \boxed{(T\circ S)\circ R \subseteq X\times W}$$

$$\forall (x,w) \in T\circ(S\circ R) \equiv \exists z\in Z : (x,z) \in S\circ R \wedge (z,w)\in T \equiv$$

$$\exists z \in Z , [\exists y \in Y : (x,y)\in R \wedge (y,z)\in S] \wedge (z,w) \in T \underset{\text{شرکت‌پذیری}}{\equiv}$$

$$\exists y \in Y , (x,y)\in R \wedge [\exists z \in Z : (y,z)\in S \wedge (z,w)\in T] \equiv$$

$\exists y\in Y: (x,y)\in R \wedge (y,w)\in(T\circ S) \equiv (x,w)\in(T\circ S)\circ R$

پس $T\circ(S\circ R) = (T\circ S)\circ R$

۴۵- تمرین شماره ۹ صفحه ۹۶. فرض کنید که R یک رابطه روی X است ثابت کنید

الف) R متقارن است $\Longleftrightarrow I_X\subseteq R\circ R$ ب) R متعدی است $\Longleftrightarrow R\circ R\subseteq R$.

حل الف) فرض کنید که R متقارن باشد $(x,x)\in I_X$ بنابراین اگر $(x,y)\in R$ آنگاه $(y,x)\in R$ $\exists y\in X$

پس $(x,x)\in R\circ R$ (طبق تعریف ترکیب) پس $I_X\subseteq R\circ R$.

برعکس اگر $I_X\subseteq R\circ R$ نشان می‌دهیم که R متقارن است. اگر $(x,y)\in R$ چون $(x,x)\in R\circ R$ پس طبق تعریف $R\circ R$ وجود دارد $y\in X$ بطوریکه $(x,y)\in R$ و $(y,x)\in R$ یعنی $(y,x)\in R$ پس R متقارن است

حل ب) فرض کنید که R متعدی باشد. فرض کنید که $(x,y)\in R\circ R$ پس $\exists z\in X: (x,z)\in R,\ (z,y)\in R$

چون R متعدی است پس $(x,y)\in R$ یعنی $R\circ R\subseteq R$.

برعکس: اگر $R\circ R\subseteq R$ نشان می‌دهیم که R متعدی است.

$$(x,y)\in R,\ (y,z)\in R \Longrightarrow (x,z)\in R\circ R \xRightarrow{R\circ R\subseteq R} (x,z)\in R$$

پس R متعدی است

۴۶- تمرین های ۱۰ و ۱۱ صفحه ۹۶، فرض کنید که R یک رابطه از X به Y و S و T یک رابطه از Y به Z باشد. ثابت کنید که

(۱) $(T\cup S)\circ R = (T\circ R)\cup(S\circ R)$ (۲) $T\circ(R\cap S)\subseteq(T\circ R)\cap(T\circ S)$

حل:

(۱) $(x,z)\in[(T\circ R)\cup(S\circ R)] \equiv (x,z)\in T\circ R \vee (x,z)\in S\circ R \equiv$

$[\exists y\in Y\ (x,y)\in R\wedge(y,z)\in T]\vee[\exists y\in Y\ (x,y)\in R\wedge(y,z)\in S] \underset{\text{توزیع‌پذیری}}{\equiv}$

$\exists y\in Y\ (x,y)\in R\wedge[(y,z)\in T\vee(y,z)\in S] \equiv \exists y\in Y\ (x,y)\in R\wedge(y,z)\in T\cup S \equiv$
$(x,z)\in[(T\cup S)\circ R]$

(۲) $(x,z)\in T\circ(R\cap S) \equiv \exists y\in Y\ (x,y)\in(R\cap S)\wedge(y,z)\in T \equiv [\exists y\in Y\ (x,y)\in R\wedge(x,y)\in S \wedge(y,z)\in T]$

$\equiv [\exists y\in Y\ (x,y)\in R\wedge(y,z)\in T]\wedge[\exists y\in Y: (x,y)\in S,\ (y,z)\in T] \Longrightarrow$
$(x,z)\in T\circ R\wedge(x,z)\in T\circ S \equiv (x,z)\in[(T\circ R)\cap(T\circ S)]$