تابع نمایی طبیعی

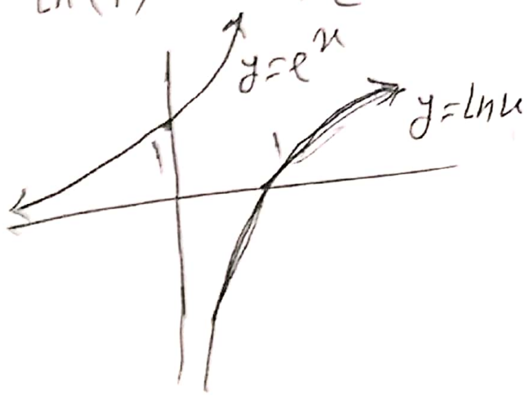
با توجه به اینکه تابع $y=\ln x$ یک تابع صعودی است (زیرا $y'=\frac{1}{x}>0$ برای $x>0$) پس یک به یک است و بنابراین وارون دارد. وارون تابع $y=\ln x$ را با $e^x = exp(x)$ نمایش می دهیم.
بنابراین طبق خواص تابع و تابع وارون داریم:

۱) $e^x = y \Leftrightarrow x=\ln y$ ، $y=\ln x \Leftrightarrow x=e^y$

۲) $e^{\ln(x)} = x \quad \forall x>0$ ، $\ln(e^x)=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

۳) $\ln(1)=0 \Rightarrow e^0=1$

۴- نمودار $y=e^x$ به صورت زیر است



۵) $D_{e^x}=\mathbb{R}=R_{\ln x}$

$D_{\ln x}=(0,+\infty)=R_{e^x}$

۶) چون تابع $y=\ln x$ برای $x>0$ پیوسته است پس تابع معکوس آن $y=e^x$ برای هر عدد حقیقی پیوسته است و همچنین

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

زیرا $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ و $\lim_{x\to0^+}\ln x = -\infty$

بنابراین محور xهای منفی (یا خط $y=0$) مجانب افقی نمودار تابع $y=e^x$ است

قوانین توان ها برای $y=e^x$:

برای هر a و b حقیقی و برای هر عدد حقیقی r داریم:

الف) $\boxed{e^{a+b}=e^a\cdot e^b}$ ، ب) $\boxed{e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}}$ ، ج) $\boxed{(e^a)^r=e^{ra}}$

مثال ۱) معادله $e^{5-3x}=10$ را حل کنید.

حل: از معکوس $y=e^x$ و $y=a^x$ که همان لگاریتم است این معادله را حل می‌کنیم

$$e^{5-3x}=10 \xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{گرفتن } \ln} \ln\left(e^{5-3x}\right)=\ln 10 \Rightarrow 5-3x=\ln 10 \Rightarrow$$

$$3x=5-\ln 10 \Rightarrow \boxed{x=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\ln 10}$$

مثال ۲: معادله $\ln(2x+1)=2-\ln x$ را حل کنید (تمرین کتاب صفحه ۱۱۵ تمرین ۳۴)

حل:

$$D_{\ln x}=(0,+\infty) \Rightarrow \begin{cases} 2x+1>0 \rightarrow x>-\frac{1}{2} \Rightarrow x>0 \\ x>0 \end{cases}$$

$$\ln(2x+1)=2-\ln x \Rightarrow \ln(2x+1)+\ln x=2 \Rightarrow \ln\left((2x+1)x\right)=2$$

$$\Rightarrow \ln(2x^2+x)=2 \Rightarrow e^{\ln(2x^2+x)}=e^2 \Rightarrow 2x^2+x=e^2$$

$$\Rightarrow 2x^2+x-e^2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8e^2}}{4} \begin{cases} x=\frac{-1-\sqrt{1+8e^2}}{4} & \text{غیر قابل قبول} \\ \boxed{x=\frac{-1+\sqrt{1+8e^2}}{4}} \end{cases}$$

یادآوری

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

به شرطی که $\Delta=b^2-4ac>0$

مشتق تابع نمایی: طبق خاصیت $y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$

از رابطه $x=\ln y$ نسبت به x مشتق ضمنی بگیریم در این صورت داریم $1=\frac{y'}{y}$

بنابراین $y'=y$ یعنی $\boxed{y=e^x \Rightarrow y'=y=e^x}$

تابع $y=e^x$ تنها تابع مخالف صفر است که از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر است و مشتق از هر مرتبه‌ای برابر e^x است یعنی

$$y=e^x \Rightarrow y'=y''=\cdots=y^{(n)}=e^x$$

همچنین اگر u تابعی از x باشد آنگاه

$$y=e^u \Longrightarrow y'=u'e^u$$

مثال: مشتق توابع زیر را حساب کنید

الف) $y=e^{3x}\sin 5x$ ، ب) $y=e^{\sin x}$ ، ج) $y=xe^x$

حل الف)

$$y = e^{-4x}\sin 5x \Rightarrow y' = (-4)e^{-4x}\sin 5x + 5e^{-4x}\cos 5x = (-4\sin 5x + 5\cos 5x)e^{-4x}$$

ب)

$$y = e^{\sin x} \Rightarrow y' = \cos x\, e^{\sin x}$$

ج)

$$y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

مثال: ماکسیمم مطلق تابع $f(x) = xe^{-x}$ را بیابید

حل: در مثال قبل دیدیم که $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ پس $f'(x) = (1-x)e^{-x} = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = 1 \text{ نقطه بحرانی}}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

$\boxed{f(1) = 1e^{-1} = \frac{1}{e}}$ چون تابع یک نقطه بحرانی بیشتر ندارد پس $\frac{1}{e}$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع

مثال: حدهای زیر را بیابید

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\times e^{-2x}}{(e^{2x}+1)e^{-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

ب)

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{+x^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

مثال (تمرین کتاب صفحه ۲۴۵ شماره ۲۶) وارون تابع $y = \dfrac{e^x}{1+2e^x}$ را پیدا کنید.

حل: در مرحله اول یک به یک بودن تابع را بررسی می کنیم

$$y=\frac{e^x}{1+2e^x}\rightarrow y'=\frac{e^x(1+2e^x)-2e^x(e^x)}{(1+2e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+2e^x)^2}>0$$

چون $y'>0$ پس تابع صعودی است بنابراین یک به یک است پس معکوس دارد

$$y=\frac{e^x}{1+2e^x}\xrightarrow[y]{\text{تعویض } x \text{ با}} x=\frac{e^y}{1+2e^y}\Rightarrow x+2xe^y=e^y\Rightarrow$$

$$x=e^y(1-2x)\Rightarrow e^y=\frac{x}{1-2x}\Rightarrow y=\ln\left(\frac{x}{1-2x}\right)$$

پس معکوس تابع $y=\frac{e^x}{1+2e^x}$ عبارت است از $y=\ln\left(\frac{x}{1-2x}\right)$.

تابع های نمایی کلی: (تابع نمایی با پایه a)

اگر $a>0$ و $a\neq 1$ آنگاه $y=a^x$ یک تابع است و با صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$\boxed{y=a^x=e^{x\ln a}}$ | $y=a^x=e^{(\ln a^x)}=xe^{\ln a}$

همانند تابع $y=e^x$ داریم

$\boxed{D_{a^x}=\mathbb{R} \quad \text{و} \quad R_{a^x}=(0,+\infty)}$

همچنین برای هر دو عدد حقیقی x_1 و x_2 و عدد حقیقی r داریم:

۱) $a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$

۲) $a^{x_1-x_2}=a^{x_1}\div a^{x_2}=\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$

۳) $(a^{x_1})^r=a^{rx_1}$

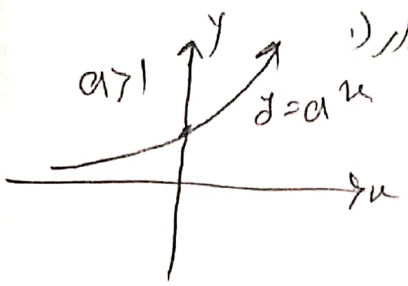
۴) $(ab)^x=a^x\cdot b^x$

مشتق تابع $y=a^x$:

$$y=a^x=e^{x\ln a}\Rightarrow y'=\ln a\, e^{x\ln a}=(\ln a)\,a^x$$

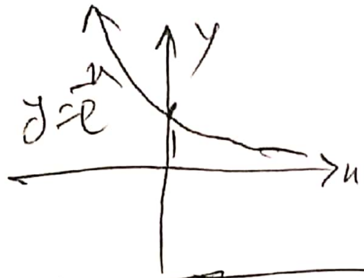
$$\boxed{y=a^x\Rightarrow y'=(\ln a)\,a^x}$$

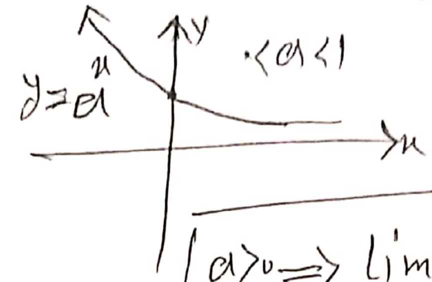
نمودار تابع $y=a^x$: نمودار تابع $y=a^x$ به عدد a بستگی دارد



الف) اگر $a>1$ باشد نمودار $y=a^x$ و $y=e^x$ مشابه هم هستند

ب) اگر $0<a<1$ باشد نمودار $y=a^x$ و $y=e^{-x}$ مشابه است





همچنین

$$\boxed{\begin{array}{l} a>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty \\ 0<a<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0 \\ 0<a<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty \end{array}}$$

مثال: مشتق توابع زیر را بیابید.

الف) $y=(10)^{x^2}$ ب) $y=(x^4)4^x$

حل:

چون $y=a^u \Longrightarrow y'=(\ln a)\,u'\,a^u$

پس الف) $y=(10)^{x^2} \Longrightarrow y'=(2\ln 10)\,x\,10^{x^2}$

ب) $y=(x^4)4^x \Longrightarrow y'=(4x^3)\,4^x+(\ln 4)(x^4)\,4^x$

تابع لگاریتمی در پایه a.

چون تابع $y=a^x$ یک‌به‌یک است پس معکوس دارد و معکوس آن را با $y=\log_a x$ نمایش می‌دهیم و بنابراین

$$\boxed{y=\log_a x \Longleftrightarrow a^y=x} \quad \text{و} \quad \boxed{a^x=y \Longleftrightarrow x=\log_a y}$$

و طبق خواص تابع و معکوس آن داریم:

$$1)\ \begin{cases} \log_a(a^x)=x & \forall x\in\mathbb{R} \\ a^{(\log_a x)}=x & \forall x>0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{همچنین}\quad \log_e x=\ln x}$$

مسئله: نشان دهید که $\log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$ برای $a>0$ و $a\neq 1$.

حل:
$$y=\log_a^x \Rightarrow x=a^y \Rightarrow \ln x=\ln(a^y)=y\ln a$$
$$\Rightarrow y=\frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow \boxed{y=\log_a^x=\frac{\ln x}{\ln a}}$$

به کمک فرمول $y=\log_a^x=\frac{\ln x}{\ln a}$ داریم $y'=\frac{1}{x\ln a}$ و اگر u تابعی از x باشد آنگاه

$$y=\log_a^u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u\ln a}$$

مثال: مشتق توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\log_{10}^{\sqrt{x}}$ ب) $y=2x\log_4^{x^2}$

حل: الف) روش اول

$$y=\log_{10}^{\sqrt{x}}=\frac{\ln\sqrt{x}}{\ln 10}=\frac{\ln x}{2\ln 10}\Rightarrow y'=\frac{1}{(2\ln 10)x}$$

روش دوم

$$y=\log_{10}^{\sqrt{x}} \Rightarrow y'=\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}\ln 10}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\ln 10}=\frac{1}{(2\ln 10)x}$$

ب)
$$y=2x\log_4^{x^2}=2x\left(\frac{\ln x^2}{\ln 4}\right)=\frac{4x\ln x}{\ln 4}\Rightarrow$$
$$y'=\frac{4}{\ln 4}\left[\ln x+\frac{x}{x}\right]=\frac{4}{\ln 4}\left[1+\ln x\right]$$

خواص لگاریتم در پایه a:

برای هر دو عدد حقیقی x_1 و x_2 و
برای هر عدد حقیقی r
و برای $a>0$ و $a\neq 1$

1) $\log_a(x_1x_2)=\log_a^{x_1}+\log_a^{x_2}$

2) $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=\log_a^{x_1}-\log_a^{x_2}$

3) $\log_a(x^r)=r\log_a^x$

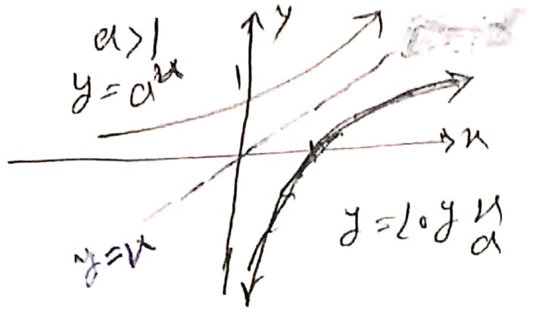
این خواص از خواص $\ln x$ نتیجه می‌شود.

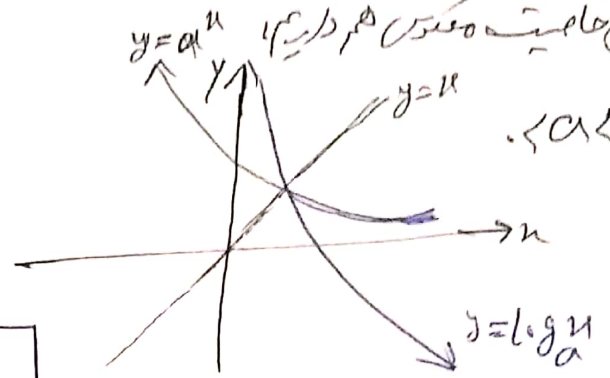
نمودار $y=\log_a^x$ همانند نمودار $y=a^x$ و a بستگی دارد

الف) اگر $a>1$ باشد آنگاه نمودار $y=\log_a^x$ همانند نمودار $y=\ln x$ است

ب) اگر $0<a<1$ باشد آنگاه نمودار $y=\log_a^x$ همانند نمودار $y=-\ln x$ است.

از روی خاصیت معکوس هم داریم:





$\boxed{a^x \text{ و } \log_a^x \text{ معکوس هم هستند}}$

مشتق توابع $y=(f(x))^{g(x)}$

یکی از کاربردهای لگاریتم محاسبه مشتق توابع $y=(f(x))^{g(x)}$ است

روش اول:

$$y=(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln y = \ln(f(x))^{g(x)} = g(x)\ln(f(x))$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \Rightarrow$$

$$y' = y\left[g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = \left[g'(x)\ln f(x) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right](f(x))^{g(x)}$$

روش دوم:

$$y=(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\ln(f(x))} \Rightarrow$$

$$y' = [g(x)\ln(f(x))]' e^{g(x)\ln(f(x))} = \left[g'(x)\ln(f(x)) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right](f(x))^{g(x)}$$

مثال: مشتق توابع زیر را بیابید الف) $y=x^{\sqrt{x}}$ ، ب) $y=(\cos x)^x$ ج) $y=(x)^{\sin x}$

حل: طبق روش دوم

الف) $y = x^{\sqrt{x}} \Rightarrow y = e^{\sqrt{x}\ln x} \Rightarrow y' = (\sqrt{x}\ln x)' x^{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) x^{\sqrt{x}} = \frac{(2+\ln x)}{2\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}}$

ب) $y = (\cos x)^{x} = e^{x\ln\cos x} \Rightarrow y' = (x\ln\cos x)'(\cos x)^{x} \Rightarrow$

$y' = \left(\ln\cos x - \frac{x\sin x}{\cos x}\right)(\cos x)^{x} = (\cos x\ln\cos x - x\sin x)(\cos x)^{x-1}$

ج) $y = (x)^{\sin x} = e^{(\sin x)\ln x} \Rightarrow y' = ((\sin x)\ln x)'(x)^{\sin x} \Rightarrow$

$y' = \left[\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right] x^{\sin x}$

توجه: از لگاریتم طبیعی می توان برای محاسبه حد و انتگرال نامعین استفاده کرد

برای نمونه (کاربرد $\ln x$ و e^{x} در حدگیری)

روش اول (محاسبه $(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

روش دوم: با کمک لگاریتم:

$$b = f(x)^{g(x)} \rightarrow \ln|b| = \ln|f(x)|^{g(x)} = g(x)\ln|f(x)|$$

اگر $f(x) > 0$ باشد نیازی به گرفتن قدر مطلق نیست

$$\lim_{x\to a} b = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \Rightarrow \lim_{x\to a}\ln|b| = \lim_{x\to a} g(x)\ln|f(x)| \Rightarrow$$ طبق خاصیت $\ln x$

$$\lim_{x\to a} b = e^{\lim_{x\to a}[g(x)\ln|f(x)|]}$$

در بخش محاسبه حدهای مبهم به کاربرد $\ln x$ و e^{x} در حدگیری خواهیم پرداخت

توجه: در بخش روشهای انتگرال گیری به کاربرد $\ln x$ در محاسبه انتگرال می پردازیم.