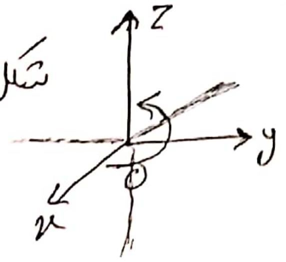
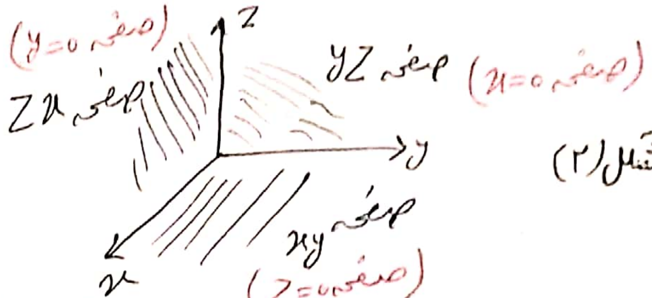
«بردارها و هندسه فضا» فصل ۱۳

«دستگاه‌های مختصات سه بعدی

دستگاه مختصات سه بعدی دکارتی تعمیم دستگاه مختصات دکارتی دو بعدی xy به فضای سه بعدی xyz است. این دستگاه از سه محور عمود بر هم x و y و z تشکیل می‌شود و محل تلاقی این سه محور مبدأ مختصات است که با $O(0,0,0)$ نمایش می‌دهیم.
معمولاً محور x و y را به صورت افقی و محور z را قائم مانند شکل (۱) در نظر می‌گیریم و جهت این محورها خلاف عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیریم. این سه محور مختصات سه صفحه مختصاتی xy و yz و zx را در فضا مشخص می‌کنند. (شکل (۲))



شکل (۱)

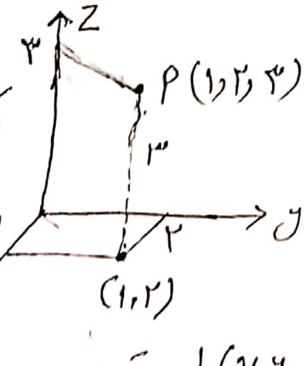


شکل (۲)

این سه صفحه فضا را به هشت قسمت تقسیم می‌کند و قسمتی که x و y و z هر سه مثبت است را یک هشتم اول می‌نامیم. به هر نقطه در این دستگاه سه مختص (x,y,z) نسبت داده می‌شود که یک نقطه در فضا است. در واقع این دستگاه مختصات همان $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ است که در آن $\mathbb{R}$ مجموعه تمام اعداد حقیقی و $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$ است.

مثال ۱: نقطه $P(1,2,3)$ را در این دستگاه نمایش دهید.

حل: در مرحله اول نقطه $(1,2)$ که سایه نقطه P در صفحه xy است را تعیین می‌کنیم سپس خطی موازی محور zها رسم می‌کنیم که از نقطه $(1,2)$ بگذرد و روی این خط به سمت بالا به اندازه ۳ واحد جدا می‌کنیم. (شکل (۳))



شکل (۳)

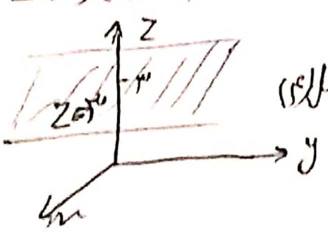
توجه: نقطه $Q(1,2,-3)$ قرینه نقطه $P(1,2,3)$ نسبت به نقطه $(1,2)$ (صفحه xy) است.

توجه: همانند دستگاه مختصات دکارتی دو بعدی که هر معادله برحسب x و y یک منحنی در صفحه xy می‌باشد در دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی (برای راحتی دستگاه مختصات فضایی) هر معادله برحسب x و y و z یک رویه (سطح) را نمایش می‌دهد.

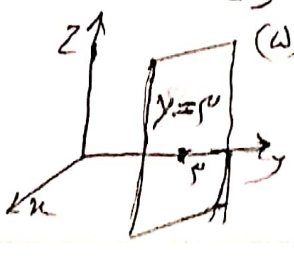
مثال ۲: معادله‌های الف) $z=3$ و ب) $y=3$ چه رویه‌ای در $\mathbb{R}^3$ را نمایش می‌دهد.

جواب: الف) معادله $z=3$ یک صفحه موازی با صفحه xy نمایش می‌دهد که ۳ واحد بالای صفحه xy قرار دارد. (شکل (۴))

ب) معادله $y=3$ یک صفحه موازی با صفحه zx نمایش می‌دهد (یک صفحه قائم بر محور yها در نقطه $(0,3,0)$ است) و سه واحد سمت راست صفحه zx قرار دارد. (شکل (۵))



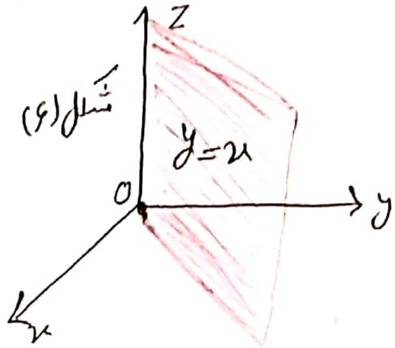
شکل (۴)



شکل (۵)

مثال ۳: رویه‌ای که معادله $x=y$ در $\mathbb{R}^3$ نمایش می‌دهد را توصیف و رسم کنید.

حل: در صفحه xoy معادله $x=y$ یک خط راست است (نیمساز ربع اول و سوم) حال اگر تعداد زیادی خط به اندازه خط $x=y$ روی خط $x=y$ قرار دهیم یک صفحه‌ای شکل می‌دهد که توصیف معادله $x=y$ در فضا است (شکل ۶) قسمتی از این صفحه که در یک هشتم اول واقع است در شکل (۶) دیده می‌شود



شکل (۶)

فاصله بین دو نقطه در فضا: به سادگی می‌توان فاصله بین دو نقطه را در صفحه به فضا تعمیم داد. اگر $P(x_1,y_1,z_1)$ و $Q(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه در فضا باشند در این صورت فاصله میان دو نقطه P و Q که با $|PQ|$ نمایش می‌دهیم برابر است با:

$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

مثال ۴: فاصله بین دو نقطه $P(2,-1,7)$ و $Q(1,-3,5)$ برابر است با:

$$|PQ|=\sqrt{(1-2)^2+(-3+1)^2+(5-7)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$$

مثال ۵: معادله کره‌ای با شعاع R و مرکز $C(\alpha,\beta,\gamma)$ را پیدا کنید.

حل: کره مجموعه تمام نقاطی در فضا است که فاصله‌شان از مرکز C برابر با R باشد. بنابراین

$$r=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}\xrightarrow[\text{به توان ۲ می‌رسانیم}]{}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

بنابراین معادله کره به مرکز $C(\alpha,\beta,\gamma)$ و شعاع R عبارت است از

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

اگر مرکز کره مبدأ مختصات $O(0,0,0)$ باشد آنگاه معادله کره $x^2+y^2+z^2=R^2$ است.

مثال ۶: نشان دهید که معادله $x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z+6=0$ معادله یک کره است و شعاع و مرکز این کره را بیابید.

حل: با مربع کامل کردن این معادله داریم:

$$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)+(z^2+2z+1)=8$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=(\sqrt{8})^2\Longrightarrow$$ مرکز کره $C(-2,3,-1)$

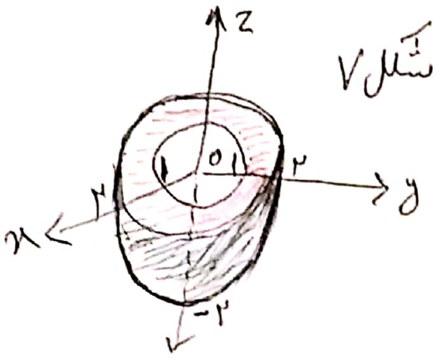
شعاع کره $=R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

مثال ۷: معادله‌های زیر چه ناحیه‌ای را در $\mathbb{R}^3$ نمایش می‌دهد؟

$$1\le x^2+y^2+z^2\le 4 \quad \text{و} \quad z\le 0$$

حل: $1\le x^2+y^2+z^2\le 4\Rightarrow 1\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le 2\Longrightarrow$

این معادله (نامعادله‌ها) نقاطی از فضای $\mathbb{R}^3$ را نشان می‌دهد که بین دو کره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع‌های $R=2$ و $R=1$ در زیر صفحه xoy (و روی صفحه xoy) قرار دارد. شکل (۷) صفحه بعد (کتاب استوارت صفحه ۱۰۲۵)



شکل ۷

چون $z \le 0$ ناحیه مفروض بین (پایین) نیم کره های $z=-\sqrt{2-x^2-y^2}$ و $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ و زیر (پایین) صفحه xy (صفحه $z=0$) قرار دارد.

تمرین های کتاب صفحه ۱۰۶ و ۱۰۷ شماره های زیر را حل کنید

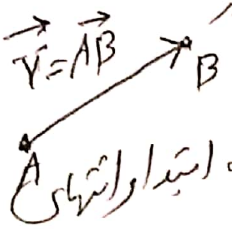
۵ و ۸ و ۹ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۵ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۱ و ۳۰ و ۳۱ و ۳۲ و ۴۰

بردارها

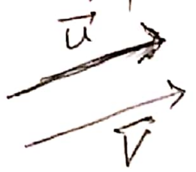
تعریف و قرارداد: بردار به کمیتی گفته می شود که هم بزرگی (اندازه) دارد و هم جهت. مانند سرعت، شتاب و نیرو. بردارها را با حروف بزرگ انگلیسی علامت دار نمایش می دهیم مانند $\vec{R}$ و $\vec{A}$ و $\vec{V}$ و $\vec{B}$ و $\vec{N}$

برای بردارها نمایش های هندسی و مؤلفه ای و همچنین نوشتن آن به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه استاندارد وجود دارد که به هریک از آنها می پردازیم.

نمایش هندسی: اگر متحرکی روی پاره خطی از نقطه A تا نقطه B حرکت کند، بردار جابجایی این متحرک را با $\vec{V}=\vec{AB}$ نمایش می دهیم که در آن A نقطه آغازین و B نقطه پایانی (نوک پیکان) بردار می باشد.

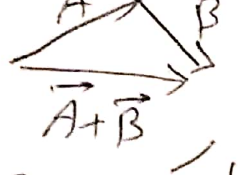


دو برداری که هم اندازه و هم جهت باشند را دو بردار مساوی نامیم و لازم نیست که ابتدا و انتهای دو بردار برابر یکی باشند. در شکل مقابل $\vec{u}=\vec{v}$.



برداری که اندازه (طول) آن صفر باشد را بردار صفر می نامیم و آن را با $\vec{0}$ نمایش می دهیم. بردار صفر دارای جهت مشخصی نیست (جهت ندارد)

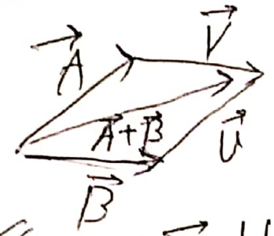
جمع دو بردار: اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دو بردار باشند که نقطه آغازین $\vec{B}$ نقطه پایانی $\vec{A}$ باشد در این صورت مجموع $\vec{A}+\vec{B}$ برداری است که از نقطه آغازین A به نقطه پایانی B کشیده شده است. این قانون جمع را قانون مثلث می نامیم.



برای جمع دو بردار قانون دیگری به نام قانون متوازی الاضلاع وجود دارد که از روی تساوی

دو بردار بیان می‌گردد و $\vec{A}+\vec{B}$ قطر متوازی الاضلاعی است که $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ضلعهای متوازی الاضلاع هستند.

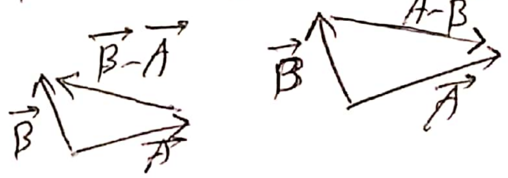
$\vec{V}=\vec{B}$ و $\vec{A}=\vec{U}$



ضرب عدد در بردار: (ضرب اسکالر). اگر c یک عدد (اسکالر) و $\vec{A}$ یک بردار باشد آنگاه $c\vec{A}$ برداری است که طولش $|c|$ برابر طول $\vec{A}$ است و اگر $c>0$ جهت $c\vec{A}$ هم‌جهت با $\vec{A}$ است و اگر $c<0$ آنگاه جهت $c\vec{A}$ مخالف جهت $\vec{A}$ است.
اگر $c=0$ آنگاه $c\vec{A}=\vec{0}$ (اگر $\vec{A}=0$ آنگاه $c\vec{A}=0$)

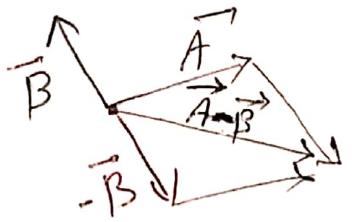
تفاضل دو بردار: $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

برای رسم $\vec{A}-\vec{B}$ هم می‌توان از قانون مثلث و هم می‌توان از قانون متوازی الاضلاع استفاده کرد. در قانون مثلث چون $\vec{B}+(\vec{A}-\vec{B})=\vec{A}$ پس بردار $\vec{A}-\vec{B}$ وقتی که با $\vec{B}$ جمع شود می‌شود $\vec{A}$ شکل مقابل



ضلع سوم مثلث بردار $\vec{B}-\vec{A}$ یا $\vec{A}-\vec{B}$ است که در آن جهت ضلع سوم مهم است.

در قانون متوازی الاضلاع: یکی از قطرها جمع دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و قطر دیگر تفاضل دو بردار A و B است. در قانون متوازی الاضلاع طبق شکل زیر اول $-\vec{B}$ را رسم می‌کنیم سپس بردار $\vec{A}$ را با روش متوازی الاضلاع جمع می‌کنیم.

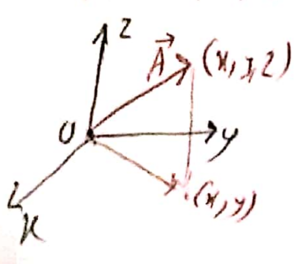


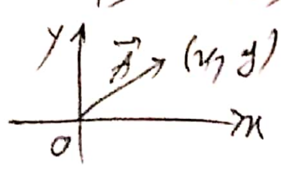
نمایش مؤلفه‌ای بردارها

در نمایش مؤلفه‌ای بردارها شروع هر بردار را مبداء مختصات در نظر می‌گیریم و نقطه پایانی $\vec{A}$ بستگی به دستگاه مختصات دو بعدی و سه بعدی دارد که در دستگاه مختصات دو بعدی با (x,y) و در مختصات سه بعدی با (x,y,z) نمایش می‌دهیم یعنی

$\vec{A}=(x,y)$ یا $\vec{A}=(x,y,z)$

و x و y و z را مؤلفه‌های بردار $\vec{A}$ می‌نامیم.





بنابراین نقطه پایانی بردار $\vec{A}$ همان نقطه (x,y) یا (x,y,z) است.

بطور خلاصه اگر $P(x,y)$ نقطه پایانی بردار $\vec{A}$ باشد آنگاه $\vec{A}=\vec{OP}=(x,y)$ در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^2$
و اگر $P(x,y,z)$ نقطه پایانی بردار $\vec{A}$ باشد آنگاه $\vec{A}=\vec{OP}=(x,y,z)$ در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^3$.

نتیجه: اگر $P(x_1,y_1,z_1)$ و $Q(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه نمایش مولفه‌ای بردار $\vec{A}=\vec{PQ}$ به صورت $\vec{A}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ است.

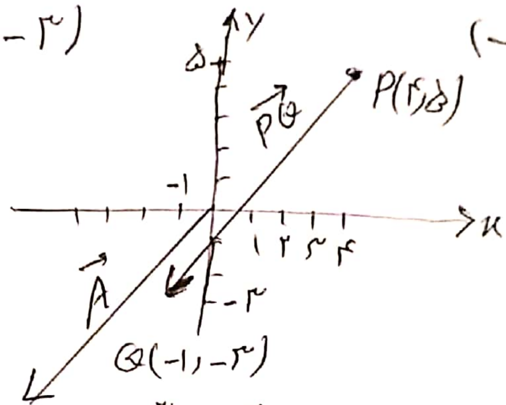
مثال ۱) الف) در $\mathbb{R}^3$ نمایش برداری پاره‌خط جهت‌داری را که نقطه آغازینش $P(2,-3,4)$ و نقطه پایانی‌اش $Q(-2,1,1)$ است را پیدا کنید.

ب) (در $\mathbb{R}^2$) اگر $P(4,5)$ و $Q(-1,-3)$ دو نقطه در صفحه $\mathbb{R}^2$ باشند آنگاه بردار $\vec{PQ}$ را ساخته و نمایش $\vec{PQ}$ را رسم کنید و برداری که برابر با $\vec{PQ}$ و شروع آن مبدأ مختصات است را رسم کنید.

حل: الف) $\vec{PQ}=(-2-2,\ 1-(-3),\ 1-4)=(-4,4,-3)$

حل ب) $\vec{PQ}=(-1-4,\ -3-5)=(-5,-8)$

بردار $\vec{A}=(-5,-8)$ همان بردار $\vec{PQ}$ است که شروع آن از مبدأ مختصات است.



نتیجه: بطور خلاصه در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ هر زوج مرتب دوتایی و هر سه‌تایی با صورت (a,b) و (a,b,c) را می‌توان یک بردار تعریف کرد. یعنی $\vec{A}=(a,b)$ و $\vec{B}=(a,b,c)$ بردار در نظر گرفت.

تعریف طول (اندازه یا بزرگی) بردار: اگر $\vec{A}$ یک بردار در صفحه یا فضا باشد طول این بردار را با $|\vec{A}|$ نمایش می‌دهیم و اگر $\vec{A}=(a,b)$ آنگاه $|\vec{A}|=\sqrt{a^2+b^2}$ و اگر $\vec{A}=(a,b,c)$ آنگاه $|\vec{A}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ است.

جمع و تفریق و ضرب عدد در بردار (ضرب اسکالر) اگر $\vec{A}=(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{B}=(x_2,y_2,z_2)$ آنگاه

$$\vec{A}+\vec{B}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2) \quad \text{و} \quad \vec{A}-\vec{B}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$$

$$c\vec{A}=(cx_1,\ cy_1,\ cz_1) \quad , \forall c\in\mathbb{R}$$

به عبارت دیگر در جمع مولفه‌های نظیر به نظیر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ با هم جمع می‌شوند و در تفریق نیز مولفه‌های نظیر به نظیر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ از هم کم می‌شوند و در ضرب اسکالر عدد c در تمام مولفه‌های $\vec{A}$ ضرب می‌شود.

مثال ۲) اگر $\vec{A}=(4,0,3)$ و $\vec{B}=(-2,1,5)$ آنگاه $\vec{A}+\vec{B}$ و $\vec{A}-\vec{B}$ و $3\vec{B}$ و $2\vec{A}+5\vec{B}$ و $|\vec{A}|$ و $|\vec{B}|$ و $|\vec{A}-\vec{B}|$ را حساب کنید.

حل: $|\vec A| = \sqrt{16+0+9} = \sqrt{25} = 5$ ، $\vec A + \vec B = (4+(-2), 0+1, 3+5) = (2, 1, 8)$

$|\vec B| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$ ، $\vec A - \vec B = (4-(-2), 0-1, 3-5) = (6, -1, -2)$

$3\vec B = (3\times(-2), 3\times 1, 3\times 5) = (-6, 3, 15)$.

$2\vec A + 5\vec B = 2(4, 0, 3) + 5(-2, +1, 5) = (12, 0, 6) + (-10, 5, 25) = (2, 5, 31)$

$|\vec A - \vec B| = \sqrt{36+1+4} = \sqrt{41}$

خواص جمع و تفریق و ضرب اسکالر بردارها: اگر $\vec A$ و $\vec B$ و $\vec C$ سه بردار دلخواه در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ باشند و c و d دو عدد حقیقی دلخواه باشند آنگاه

1) $\vec A + \vec B = \vec B + \vec A$ (خاصیت جابجایی جمع)

2) $\vec A + (\vec B + \vec C) = (\vec A + \vec B) + \vec C$ (خاصیت شرکت پذیری)

3) $\vec A + \vec 0 = \vec 0$ ، 4) $\vec A + (-\vec A) = \vec 0$

5) $c(\vec A + \vec B) = c\vec A + c\vec B$ ، 6) $(c+d)\vec A = c\vec A + d\vec A$

7) $1\vec A = \vec A$ 8) $(cd)A = c(d\vec A)$

همه این خواص هم به صورت هندسی و هم به صورت مؤلفه‌ای (جبری) قابل اثبات است

نمایش بردارها بر حسب بردارهای واحد مختصات (ترکیب خطی بردارهای پایه استاندارد)

تعریف: برداری که طول آن یک باشد را بردار واحد می‌نامیم.

مثال ۳) بردارهای $\vec i = (1, 0, 0)$ و $\vec j = (0, 1, 0)$ و $\vec K = (0, 0, 1)$ در $\mathbb{R}^3$ بردارهای واحد می‌باشند

و در $\mathbb{R}^2$ بردارهای $\vec i = (1, 0)$ و $\vec j = (0, 1)$ بردارهای واحد می‌باشند

تعریف: بردارهای $\vec i$ و $\vec j$ و $\vec K$ در $\mathbb{R}^3$ را بردارهای استاندارد پایه می‌نامند و اگر $\vec A = (x, y, z)$ یک بردار دلخواه در $\mathbb{R}^3$ باشد آنگاه می‌توانیم بنویسیم $\vec A = (x, y, z) = x\vec i + y\vec j + z\vec K$. به عبارت دیگر می‌توان بردار $\vec A$ را به صورت ترکیب خطی از سه بردار استاندارد پایه $\vec i$ و $\vec j$ و $\vec K$ نوشت.

به همین صورت بردارهای $\vec i = (1, 0)$ و $\vec j = (0, 1)$ در $\mathbb{R}^2$ را بردارهای استاندارد پایه می‌نامند و اگر $\vec A = (x, y)$ یک بردار دلخواه در $\mathbb{R}^2$ باشد آنگاه می‌توان نوشت $\vec A = (x, y) = x\vec i + y\vec j$، یعنی $\vec A$ را به صورت ترکیب خطی از دو بردار پایه استاندارد $\vec i$ و $\vec j$ نوشته می‌شود.

مثال ۴) اگر $\vec A = \vec i + 2\vec j + 3\vec K$ و $\vec B = 4\vec i + 7\vec K$ آنگاه $2\vec A + 3\vec B$ را بر حسب i و j و K

حل: $2\vec{A}+3\vec{B}=2(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{K})+3(4\vec{i}+7\vec{K})=2\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{K}+12\vec{i}+21\vec{K}=$

$=14\vec{i}+4\vec{j}+15\vec{K}$

تعریف: اگر $\vec{A}$ برداری ناصفر باشد در این صورت بردار واحد $\frac{1}{|\vec{A}|}\vec{A}$ که هم‌جهت با بردار $\vec{A}$ است را با $u_{\vec{A}}=\frac{1}{|\vec{A}|}\vec{A}$ نمایش می‌دهیم و آن را جهت $\vec{A}$ یا بردار واحد هم‌جهت با بردار $\vec{A}$ می‌نامیم.

مثال ۵) بردار واحد هم‌جهت با بردار $\vec{A}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{K}$ را پیدا کنید.

حل: $|\vec{A}|=\sqrt{4+1+4}=3 \Rightarrow u_{\vec{A}}=\frac{1}{3}\vec{A}=\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{K}$

حاصل‌ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو بردار:

تعریف: اگر $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{B}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه حاصل‌ضرب نقطه‌ای (داخلی) دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را با $\vec{A}\cdot\vec{B}$ نمایش می‌دهیم و $\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

و اگر $\vec{A}=(a_1,a_2)$ و $\vec{B}=(b_1,b_2)$ آنگاه $\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2$

مثال ۶) اگر $\vec{A}=(-1,7,4)$ و $\vec{B}=(6,2,-\frac{1}{2})$ آنگاه $\vec{A}\cdot\vec{B}$ را حساب کنید.

همچنین اگر $\vec{A}=(2,4)$ و $\vec{B}=(3,-1)$ آنگاه $\vec{A}\cdot\vec{B}$ را حساب کنید.

حل: $\vec{A}\cdot\vec{B}=(-1)(6)+2(7)+4(-\frac{1}{2})=-6+14-2=6$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=(2)(3)+4(-1)=6-4=2$

خواص ضرب داخلی دو بردار: اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ سه بردار دلخواه در $\mathbb{R}^3$ باشند و d یک اسکالر باشد آنگاه

۱) $\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}|^2$ ۲) $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$ ۳) $\vec{0}\cdot a=0$

۴) $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$ ۵) $(d\vec{A})\cdot\vec{B}=d(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot(d\vec{B})$

قضیه: اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دو بردار دلخواه و θ زاویه بین $\vec{A}$ و $\vec{B}$ باشند آنگاه $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\theta$

توجه: در اکثر کتابهای ریاضی قضیه بالا به عنوان تعریف حاصل‌ضرب داخلی دو بردار به کار رفته و برعکس تعریف بالا به عنوان قضیه ارائه می‌شود.

مثال ۷: اگر طول بردار $\vec{A}$ برابر با ۴ و طول بردار $\vec{B}$ برابر با ۶ باشد و زاویه میان این دو بردار $\frac{\pi}{3}$ باشد آنگاه $\vec{A}\cdot\vec{B}$ را حساب کنید.

حل: $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos(\theta)=4\times6\times\cos(\frac{\pi}{3})=4\times6\times\frac{1}{2}=12$

نتیجه (۱): اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ باشد آنگاه $\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{2}$.

نتیجه (۲): دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متعامدند اگر و فقط اگر $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$

مثال ۸) زاویه میان دو بردار $\vec{A}=(2,2,-1)$ و $\vec{B}=(1,0,-1)$ را پیدا کنید.

حل: $\vec{A}\cdot\vec{B}=2\times1+2\times0+(-1)\times(-1)=2+1=3$ و $|\vec{A}|=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

$|\vec{B}|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

زاویه‌های هادی و کسینوس‌های هادی یک بردار ناصفر

تعریف: اگر $\vec{A}$ یک بردار غیرصفر در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد، زاویه‌های α و β و γ در بازه $[0,\pi]$ که بردار $\vec{A}$ با محورهای xها و yها و zها می‌سازد را زاویه‌های هادی بردار A می‌نامیم و $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ را کسینوس‌های هادی بردار A می‌نامیم. به عبارت دیگر

$$\cos\alpha=\frac{\vec{A}\cdot\vec{i}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{i}|}=\frac{a_1}{|\vec{A}|}\ ،\ \cos\beta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{j}}{|\vec{A}||\vec{j}|}=\frac{a_2}{|\vec{A}|}\ ،\ \cos\gamma=\frac{\vec{A}\cdot\vec{K}}{|\vec{A}||\vec{K}|}=\frac{a_3}{|\vec{A}|}$$

که در آن $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$. بنابراین

(1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

(2) $u_{\vec{A}}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ یعنی مولفه‌های u_A کسینوس‌های هادی بردار $\vec{A}$ هستند.

مثال ۹) زاویه‌های هادی و کسینوس‌های هادی بردار $\vec{A}=(0,1,-1)$ را بیابید.

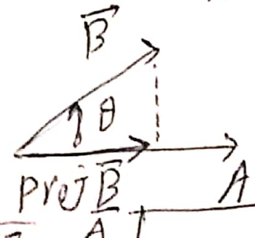
حل:

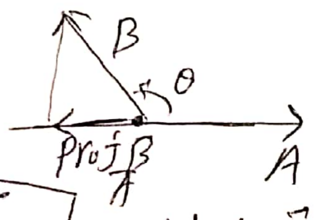
$$|\vec{A}|=\sqrt{0+1+1}=\sqrt{2}\Rightarrow\vec{u}_A=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{A}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow$$

$$\cos\alpha=0\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}\ ،\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{4}\ \text{و}\ \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\gamma=\frac{3\pi}{4}$$

تصویرهای عددی و برداری دو بردار روی هم

فرض کنید که $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دو بردار ناصفر باشند. تصویر برداری بردار $\vec{B}$ روی $\vec{A}$ را با $proj_{\vec{A}}\vec{B}$ نمایش می‌دهیم و $proj_{\vec{A}}\vec{B}=(|\vec{B}|\cos\theta)\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ و تصویر عددی (اسکالر) $\vec{B}$ روی $\vec{A}$ عبارت است از $|\vec{B}|\cos\theta$ و آن را مولفه بردار $\vec{B}$ در امتداد $\vec{A}$ (جهت $\vec{A}$) می‌نامیم و با $comp_{\vec{A}}\vec{B}$ نمایش می‌دهیم.





$$\begin{cases} proj_{\vec{A}}\vec{B}=(|B|\cos\theta)\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \\ comp_{\vec{A}}\vec{B}=|\vec{B}|\cos\theta \end{cases}$$

چون $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$ بنابراین

(1) $\boxed{comp_{A}B=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|}}$ و (2) $\boxed{proj_{A}B=\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\vec{A}\cdot\vec{A}}\right)\vec{A}}$

زیرا

$$proj_{\vec{A}}\vec{B}=(|\vec{B}|\cos\theta)\cdot\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|}\right)\cdot\frac{A}{|A|}=\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\vec{A}\cdot\vec{A}}\right)\vec{B}$$

بنابراین $\boxed{\text{Proj}_{\vec A}\vec B = \left(\frac{\vec A\cdot\vec B}{\vec A\cdot\vec A}\right)\vec A}$ (۲) و $\boxed{\text{Comp}_{\vec A}\vec B = \frac{\vec A\cdot\vec B}{|\vec A|}}$ (۱)

مثال ۱۰) اگر $\vec A=(1,1,2)$ و $\vec B=(-2,3,1)$ دو بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند

الف) تصویر عمودی و برداری $\vec B$ روی $\vec A$ را بیابید.

ب) تصویر عمودی و برداری $\vec A$ روی $\vec B$ را بیابید.

حل: $\boxed{\vec B\cdot\vec B=14}$ و $A\cdot B = 1\times(-2)+1\times(3)+2\times1=3$ و $|\vec A|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$ و $\boxed{\vec A\cdot\vec A=6}$

$|\vec B|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$

الف) $\text{Proj}_{\vec A}\vec B=\left(\frac{A\cdot B}{A\cdot A}\right)\vec A=\frac{3}{6}\vec A=\frac{1}{2}\vec A$ و $\text{Comp}_{\vec A}\vec B=\frac{3}{\sqrt6}$

ب) $\text{Proj}_{\vec B}\vec A=\left(\frac{\vec A\cdot\vec B}{\vec B\cdot\vec B}\right)\vec B=\frac{3}{14}\vec B$ و $\text{Comp}_{\vec B}\vec A=\frac{3}{\sqrt{14}}$

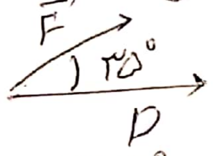
یکی از کاربردهای تصویر عمودی و برداری بردارها محاسبه کار است. فرض کنید که $\vec F$ نیرویی باشد که روی یک جسم حرکت می‌کند و این جسم از نقطه P تا Q (روی یک خط) حرکت می‌کند در این صورت اگر θ زاویه بین $\vec F$ و $\vec D=\vec{PQ}$ باشد آنگاه

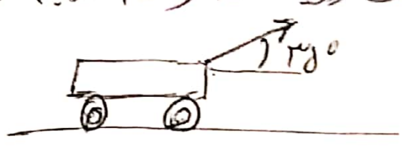
کار $=W=(|\vec F|\cos\theta)|\vec D|=\vec F\cdot\vec D$

بردار $\vec D$ بردار جابجایی جسم است.

مثال ۱۱) گاری چهارچرخی به مسافت ۱۰۰ متر روی مسیر افقی با نیروی ثابت ۷۰ نیوتن کشیده شده است. دسته گاری تحت زاویهٔ 35° (۳۵ درجه) بالای افق نگه داشته است. کار انجام شده با این نیرو چقدر است

حل: $W=\vec F\cdot\vec D=|\vec F||\vec D|\cos 35^\circ$





$W=70\times100\cos35^\circ=7000\cos35^\circ$

مثال ۱۲) نیرویی با بردار $\vec F=3\vec i+4\vec j+5\vec k$ مشخص شده است و ذره‌ای را از نقطه $P(2,1,0)$ تا نقطه $Q(4,6,2)$ حرکت می‌دهد، کار انجام شده را پیدا کنید.

حل: $D=\vec{PQ}=(4-2,6-1,2-0)=(2,5,2)$ و $\vec F=(3,4,5)$

کار $=W=F\cdot D=(3,4,5)\cdot(2,5,2)=6+20+10=36$ (تمرین ۱۴ صفحه ۱۲۷)

مثال ۱۳) اگر $\vec C=|\vec A|\vec B+|\vec B|\vec A$ که در آن A و B بردار غیرصفر هستند. آنگاه نشان دهید که بردار $\vec C$ زاویهٔ میان $\vec A$ و $\vec B$ را نصف می‌کند.

حل: فرض کنید که θ زاویهٔ بین $\vec A$ و $\vec B$ باشد، نشان می‌دهیم که $\cos\theta_2=\cos\theta_1$ که در آن θ_1 زاویهٔ بین

$\vec A$ و $\vec C$ و θ_1 زاویه بین $\vec B$ و $\vec C$ است.

$$\cos\theta_1=\frac{\vec A\cdot\vec C}{|\vec A||\vec C|}=\frac{\vec A\cdot(|\vec A|\vec B+|\vec B|\vec A)}{|\vec A||\vec C|}=$$

$$=\frac{[|\vec A|(\vec A\cdot\vec B)+|\vec B|\vec A\cdot\vec A]}{|\vec A||\vec C|}\ \underset{\text{فاکتورگیری}}{\xrightarrow{\vec A\cdot\vec A=|\vec A|^2}}\ \frac{|\vec A|[\vec A\cdot\vec B+|\vec B||\vec A|]}{|\vec A||\vec C|}=\frac{(\vec A\cdot\vec B+|\vec B||\vec A|)}{|\vec C|}\quad (1)$$

$$\cos\theta_2=\frac{\vec B\cdot\vec C}{|\vec B||\vec C|}=\frac{\vec B\cdot[|\vec A|\vec B+|\vec B|\vec A]}{|\vec B||\vec C|}=\frac{[|\vec A|(\vec B\cdot\vec B)+|\vec B|(\vec B\cdot\vec A)]}{|\vec B||\vec C|}\ \underset{\text{فاکتورگیری}}{\xrightarrow{\vec B\cdot\vec B=|\vec B|^2}}\ \frac{|\vec B|(|\vec A||\vec B|+\vec A\cdot\vec B)}{|\vec B||\vec C|}$$

$$=\frac{(\vec A\cdot\vec B+|\vec B||\vec A|)}{|\vec C|}\quad (2)\qquad \Rightarrow (1),(2)\quad \cos\theta_1=\cos\theta_2 \Rightarrow$$ بردار $\vec C$ زاویه θ را نصف می‌کند

مثال ۱۴ (تمرین ۵۱ صفحه ۱۰۲۸) ثابت کنید که

$$|\vec A+\vec B|^2+|\vec A-\vec B|^2=2|\vec A|^2+2|\vec B|^2$$

$$|\vec A+\vec B|^2-|\vec A-\vec B|^2=4(\vec A\cdot\vec B)$$

که در آن $\vec A$ و $\vec B$ دو بردار دلخواه هستند

حل:

$$|\vec A+\vec B|^2=(\vec A+\vec B)\cdot(\vec A+\vec B)=\vec A\cdot\vec A+\vec A\cdot\vec B+\vec B\cdot\vec A+\vec B\cdot\vec B=|\vec A|^2+2(\vec A\cdot\vec B)+|\vec B|^2$$

$$|\vec A-\vec B|^2=(\vec A-\vec B)\cdot(\vec A-\vec B)=\vec A\cdot\vec A-\vec A\cdot\vec B-\vec B\cdot\vec A+\vec B\cdot\vec B=|\vec A|^2-2(\vec A\cdot\vec B)+|\vec B|^2$$

$$|\vec A+\vec B|^2+|\vec A-\vec B|^2=|\vec A|^2+2(\vec A\cdot\vec B)+|\vec B|^2+|\vec A|^2-2(\vec A\cdot\vec B)+|\vec B|^2=2|\vec A|^2+2|\vec B|^2$$

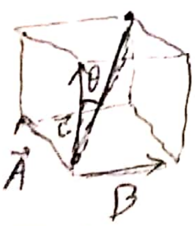
$$|\vec A+\vec B|^2-|\vec A-\vec B|^2=|\vec A|^2+2(\vec A\cdot\vec B)+|\vec B|^2-|\vec A|^2+2(\vec A\cdot\vec B)-|\vec B|^2=4(\vec A\cdot\vec B)$$

نتیجه: نشان دهید که اگر قطرهای یک متوازی‌الاضلاع با هم برابر باشند آنگاه آن متوازی‌الاضلاع یک مستطیل است.

اثبات: فرض کنید که $\vec A$ و $\vec B$ دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع باشند و قطرهای متوازی‌الاضلاع با هم برابر باشند یعنی $|\vec A+\vec B|=|\vec A-\vec B|$ زیرا $\vec A+\vec B$ و $\vec A-\vec B$ قطرهای متوازی‌الاضلاع هستند پس $|\vec A+\vec B|^2=|\vec A-\vec B|^2$ و طبق تمرین قبل $4(\vec A\cdot\vec B)=0$ یعنی $\vec A$ و $\vec B$ بر هم عمود هستند پس متوازی‌الاضلاع یک مستطیل است.

مثال ۱۵ (تمرین ۶۱ صفحه ۱۰۲۷) زاویه میان قطر مکعب و یکی از یالهایش را پیدا کنید.

حل: فرض کنید که $\vec L$ برداری باشد که قطر مکعب را نشان دهد در این صورت



$$\vec L=(\vec A+\vec B)+\vec C$$ ($\vec A+\vec B$ قطر وجه پایین (یا بالا))

اگر θ زاویه بین $\vec L$ و $\vec C$ باشد آنگاه

$$\cos\theta=\frac{\vec L\cdot\vec C}{|\vec L||\vec C|}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec L\cdot\vec C}{|\vec L||\vec C|}=\frac{(\vec A+\vec B+\vec C)\cdot\vec C}{|\vec L||\vec C|}=\frac{\vec A\cdot\vec C+\vec B\cdot\vec C+\vec C\cdot\vec C}{|\vec L||\vec C|}=\frac{|\vec C|^2}{|\vec L||\vec C|}=\frac{|\vec C|}{|\vec L|}$$

$|\vec{L}| = |\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}| = \sqrt{|A|^2+|B|^2+|C|^2} = |\vec{C}|\sqrt{3}$

چون یال های مکعب بر هم عمود هستند بنابراین

$|\vec A+\vec B+\vec C|^2 = (\vec A+\vec B+\vec C)\cdot(\vec A+\vec B+\vec C) = \vec A\cdot\vec A + \underbrace{2\vec A\cdot\vec B}_{0} + \underbrace{2\vec A\cdot\vec C}_{0} + \underbrace{2\vec B\cdot\vec C}_{0} + \vec B\cdot\vec B + \vec C\cdot\vec C$

$\Rightarrow |L|^2 = |\vec A|^2+|\vec B|^2+|\vec C|^2 \Rightarrow |\vec L| = \sqrt{|\vec A|^2+|\vec B|^2+|\vec C|^2}$

$\cos\theta = \frac{|\vec C|}{\sqrt{3}\,|\vec C|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

مثال ۱۶ (تمرین ۶۰ صفحه ۱۰۲۸) نشان دهید که اگر دو بردار $\vec u+\vec v$ و $\vec v-\vec u$ متعامد باشند آنگاه $|\vec u| = |\vec v|$ (طول دو بردار $\vec u$ و $\vec v$ با هم برابرند)

حل:

$0 = (\vec u+\vec v)\cdot(\vec u-\vec v) = \vec u\cdot\vec u \underbrace{- \vec u\cdot\vec v + \vec v\cdot\vec u}_{0} - \vec v\cdot\vec v = |\vec u|^2-|\vec v|^2 \Rightarrow$

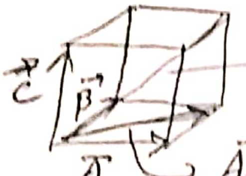
$|\vec u|^2=|\vec v|^2 \Rightarrow |\vec u|=|\vec v|$ و $|\vec u| = -|\vec v|$ غیر قابل قبول

مثال ۱۷ (تمرین ۵۲ صفحه ۱۰۲۷) زاویه بین قطر مکعب و قطر یکی از وجه هایش را بیابید.

حل: در تمرین ۵۱ (مثال ۱۵) دیدیم که $\vec L = \vec A+\vec B+\vec C$ برداری است که قطر مکعب را می دهد

و فرض کنید که $\vec A+\vec B=\vec D$ قطر یکی از وجه ها باشد

فرض کنید که θ زاویه بین $\vec L$ و $\vec D$ باشد بنابراین



$\vec L = \vec A+\vec B+\vec C$

$\vec A+\vec B = \vec D$

$\cos\theta = \frac{\vec D\cdot\vec L}{|\vec D||\vec L|} = \frac{(\vec A+\vec B)\cdot(\vec A+\vec B+\vec C)}{|\vec D||\vec L|} =$

$= \frac{\vec A\cdot\vec A + 2\vec A\cdot\vec B + \vec A\cdot\vec C + \vec B\cdot\vec C + \vec B\cdot\vec B}{|\vec D||\vec L|} = \frac{|A|^2+|B|^2}{\sqrt{2|A|^2}\sqrt{3|A|^2}} = \frac{2|\vec A|^2}{\sqrt{6}\,|A|^2} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$|\vec D| = \sqrt{2|\vec A|^2} = \sqrt{2}\,|\vec A|$ و همچنین $|\vec L| = |\vec A|\sqrt{3}$

زیرا در تمرین ۵۱ دیدیم که

تمرین های کتاب شماره های زیر را حل کنید

صفحه ۱۰۰۶ شماره های ۷ و ۸ و ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۳

صفحه ۱۰۱۶ شماره های ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ و صفحه ۱۰۲۸ شماره های ۲ و ۳ و ۲۴ و ۲۶ و ۳۲ و ۳۹ و ۴۰

و ۴۹ و ۵۰ و ۵۷ و ۵۸

حاصل ضرب خارجی (برداری) دو بردار

برای محاسبه حاصل ضرب خارجی ابتدا دترمینان ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را تعریف می‌کنیم.

تعریف: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ یک ماتریس 2×2 باشد آنگاه دترمینان ماتریس A را با $\det A$ نمایش می‌دهیم و به صورت مقابل تعریف می‌کنیم

$$\det A=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad-bc$$

مثال ۱) دترمینان ماتریس های $A=\begin{bmatrix} 2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 7 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ را بیابید.

حل: $\det A = 2\times5-3\times4=10-12=-2$ و $\det B = 7\times3-(-2)\times1=21+2=23$

تعریف (همسازه) اگر $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$ یک ماتریس $n\times n$ باشد همسازه درایه a_{ij} را با Δ_{ij} نمایش می‌دهیم و به صورت $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}\det A(i|j)$ تعریف می‌کنیم که در آن $A(i|j)$ ماتریس حاصل از A است سطر iام و ستون jام آن حذف شده است.

حال اگر i یک سطر دلخواه A باشد آنگاه $\det A$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\det A=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = a_{i1}\Delta_{i1}+a_{i2}\Delta_{i2}+\cdots+a_{in}\Delta_{in} \qquad (1)$$

همچنین اگر j یک ستون دلخواه A باشد آنگاه

$$\det A=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = a_{1j}\Delta_{1j}+a_{2j}\Delta_{2j}+\cdots+a_{nj}\Delta_{nj} \qquad (2)$$

معادله (1) و (2) را به ترتیب روش بسط سطری و ستونی ماتریس A می‌نامیم.

مثال ۲) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل روش اول) بسط سطری دترمینان A (با فرض $i=1$) نسبت به سطر اول:

$$\det A = 2\Delta_{11}+1\Delta_{12}+3\Delta_{13} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix} =$$

$$= 2(8+1)-(0-2)+3(0-8) = 18+2-24=-4$$

توجه: به جای سطر اول می‌توان از سطر دوم یا سوم استفاده کرد.

(روش دوم) بسط ستونی دترمینان ماتریس A نسبت به ستون اول ($j=1$)

(در صفحه بعد)

در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{A}$ در $\vec{B}$ را با $\vec{A}\times\vec{B}$ نمایش می دهیم و

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

حاصل ضرب خارجی را حاصل ضرب برداری هم می نامیم.

توجه: حاصل ضرب خارجی دو بردار یک بردار است و حاصل ضرب داخلی دو بردار یک عدد است

مثال ۵) اگر $\vec{A}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{B}=\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$ آنگاه $\vec{A}\times\vec{B}$ و $|\vec{A}\times\vec{B}|$ را حساب کنید.

حل:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 3&-2&1\\ 1&4&-3\end{vmatrix}=(6-4)\vec{i}-(-9-1)\vec{j}+(12+2)\vec{k}$$
$$=2\vec{i}+10\vec{j}+14\vec{k}$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{4+100+196}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$$

مثال ۶) اگر $\vec{A}=2\vec{i}-4\vec{j}+0\vec{k}$ و $\vec{B}=7\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k}$ آنگاه $\vec{A}\times\vec{B}$ را حساب کنید

حل:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 2&-4&0\\ 7&2&0\end{vmatrix}=(0-0)\vec{i}-(0-0)\vec{j}+(4+28)\vec{k}=32\vec{k}$$

به عبارت دیگر اگر $\vec{A}=2\vec{i}-4\vec{j}$ و $\vec{B}=7\vec{i}+2\vec{j}$ آنگاه

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 2&-4&0\\ 7&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-4\\ 7&2\end{vmatrix}\vec{k}=32\vec{k}$$

یعنی حاصل ضرب خارجی دو بردار در صفحه مضربی از $\vec{k}$ است.

قضیه: اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دو بردار باشند و θ زاویه جهت دار بین $\vec{A}$ و $\vec{B}$ باشد و $\vec{n}$ بردار قائم واحد بر صفحه‌ای باشد که شامل دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ باشد آنگاه $(0\leq\theta\leq\pi)$

الف) $\vec{A}\times\vec{B}=(|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta)\vec{n}$ ب) $|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$

ج) $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ د) $\vec{A}\times\vec{A}=0$

ر) بردار $\vec{A}\times\vec{B}$ هم بر $\vec{A}$ و هم بر $\vec{B}$ عمود است.

تعریف) دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ موازی نامیم هرگاه $\vec{A}=c\vec{B}$ یا $\vec{B}=c\vec{A}$ که در آن c یک عدد حقیقی است. (یعنی $\vec{A}$ و $\vec{B}$ مضرب هم هستند)

قضیه: دو بردار ناصفر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ موازی اند اگر و فقط اگر $\vec{A}\times\vec{B}=0$.

خواص حاصل ضرب برداری (خارجی) دو بردار

اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ سه بردار دلخواه باشند و d یک عدد حقیقی باشد آنگاه.

۱) $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ ۲) $A\times A=0$

۳) $(d\vec{A})\times\vec{B}=d(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\times(d\vec{B})$

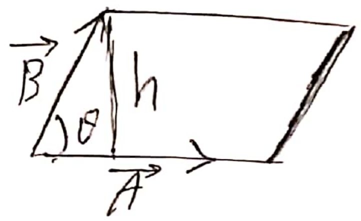
۴) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ ۵) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$

۴) $(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$ ۶) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

چند کاربرد از حاصل ضرب خارجی دو بردار

۱- اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دو ضلع مجاور یک متوازی الاضلاع باشد آنگاه.

$|\vec{A}\times\vec{B}|=$ مساحت متوازی الاضلاع



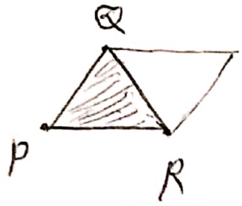
$$\sin\theta=\frac{h}{|\vec{B}|}\Rightarrow h=|\vec{B}|\sin\theta$$

مساحت متوازی الاضلاع $=$ (اندازه قاعده) $\times$ (ارتفاع) $=|\vec{A}|h=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta=|\vec{A}\times\vec{B}|$

۲- اگر P و Q و R سه رأس یک مثلث باشند آنگاه

مساحت مثلث $=\frac{1}{2}|\vec{PQ}\times\vec{PR}|$

زیرا مثلث نصف متوازی الاضلاع است

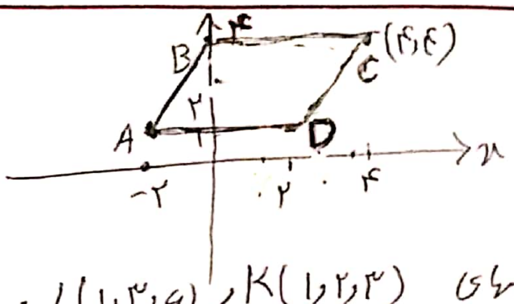


مثال ۷ (تمرین ۲۷ صفحه ۱۰۳۶) مساحت متوازی الاضلاع با رأسهای $A(-2,1)$ و $B=(0,4)$ و $C(4,4)$ و $D(2,1)$ را پیدا کنید.

حل: (شکل صفحه بعد)

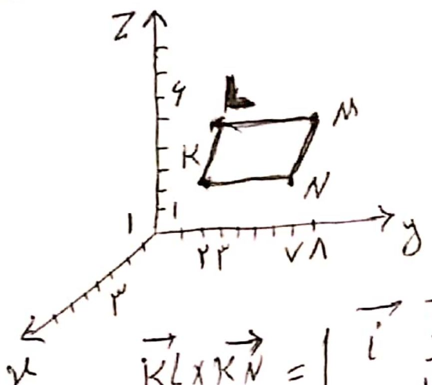
$\vec{AB}=(0-(-2),4-1)=(2,3)$ و $\vec{AD}=(2-(-2),1-1)=(4,0)$

مساحت متوازی الاضلاع $=|\vec{AB}\times\vec{AD}|=|-12\vec{k}|=12$ واحد مربع



$$\vec{AB}\times\vec{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{k}$$

مثال ۸ (تمرین ۲۸ صفحه ۱۰۳۶) مساحت متوازی الاضلاع با رأسهای $K(1,2,3)$ و $L(1,3,6)$ و $M(3,8,6)$ و $N(3,7,3)$ را پیدا کنید.



حل: $\vec{KL} = (1-1, 3-2, 6-3) = (0,1,3)$

$\vec{KN} = (3-1, 7-2, 3-3) = (2,5,0)$

مساحت متوازی الاضلاع $= |\vec{KL}\times\vec{KN}| = \sqrt{(15)^2+36+4} = \sqrt{265}$ واحد مربع

$$\vec{KL}\times\vec{KN} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (0-15)\vec i-(0-6)\vec j+(0-2)\vec k = -15\vec i+6\vec j-2\vec k$$

مثال ۹) مساحت مثلثی با رئوس $P(1,4,6)$ و $Q(-2,5,-1)$ و $R(1,-1,1)$ را پیدا کنید.

حل: $\vec{PQ} = (-2-1, 5-4, -1-6) = (-3, 1, -7)$ و $\vec{PR} = (1-1, -1-4, 1-6) = (0,-5,-5)$

مساحت مثلث $= \frac{1}{2}|\vec{PQ}\times\vec{PR}| = \frac{1}{2}\sqrt{(40)^2+225+225} = \frac{1}{2}\sqrt{1600+450} = \frac{1}{2}\sqrt{2050}$ واحد مربع

$$\vec{PQ}\times\vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-5-35)\vec i-(15-0)\vec j+(-15-0)\vec k$$
$$= -40\vec i-15\vec j-15\vec k$$

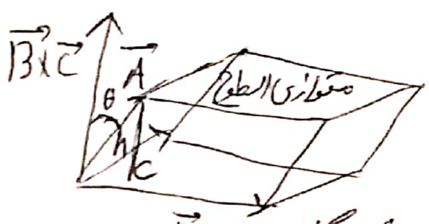
ضرب سه‌گانه‌ای جعبه‌ای:

اگر $\vec A$ و $\vec B$ و $\vec C$ سه بردار در فضا باشند آنگاه به ضرب $\vec A\cdot(\vec B\times\vec C)$ ضرب سه‌گانه جعبه‌ای می‌نامیم.

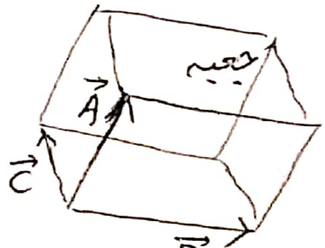
طبق خاصیت ۵ می‌دانیم که $\vec A\cdot(\vec B\times\vec C) = (\vec A\times\vec B)\cdot\vec C$ همچنین حاصل این ضرب یک عدد است

نام این ضرب سه‌گانه به این دلیل جعبه‌ای است چون اگر $\vec A$ و $\vec B$ و $\vec C$ سه یال یک جعبه یا متوازی السطوح باشند آنگاه.

حجم جعبه یا حجم متوازی السطوح $= |\vec A\cdot(\vec B\times\vec C)|$

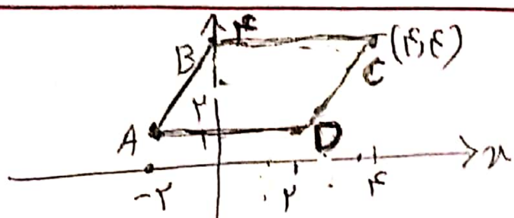


$h = |\vec A|\cos\theta$



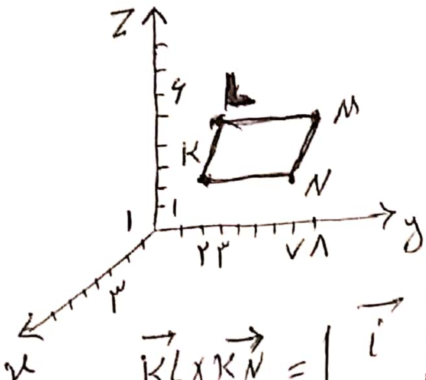
اگر θ زاویه بین $\vec A$ و $\vec B\times\vec C$ باشد و h ارتفاع متوازی السطوح باشد آنگاه

حجم $= V =$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع $= |\vec B\times\vec C|\cdot|A|\cos\theta| = |\vec A\cdot(\vec B\times\vec C)|$



$$\vec{AB}\times\vec{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{K}$$

مثال ۸ (تمرین ۲۸ صفحه ۱۰۳۶) مساحت متوازی الاضلاع با رأس‌های $K(1,2,3)$ و $L(1,3,6)$ و $M(3,8,6)$ و $N(3,7,3)$ را پیدا کنید.



حل:

$$\vec{KL} = (1-1, 3-2, 6-3) = (0,1,3)$$

$$\vec{KN} = (3-1, 7-2, 3-3) = (2,5,0)$$

مساحت متوازی الاضلاع $= |\vec{KL}\times\vec{KN}| = \sqrt{(15)^2+36+4} = \sqrt{265}$ واحد مربع

$$\vec{KL}\times\vec{KN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (0-15)\vec{i} - (0-6)\vec{j} + (0-2)\vec{K} = -15\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{K}$$

مثال ۹) مساحت مثلثی با رئوس $P(1,4,6)$ و $Q(-2,5,-1)$ و $R(1,-1,1)$ را پیدا کنید.

حل: $\vec{PQ} = (-2-1, 5-4, -1-6) = (-3, 1, -7)$ و $\vec{PR} = (1-1, -1-4, 1-6) = (0,-5,-5)$

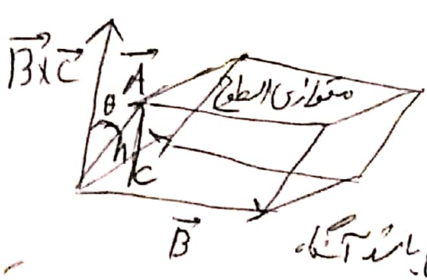
مساحت مثلث $= \frac{1}{2}|\vec{PQ}\times\vec{PR}| = \frac{1}{2}\sqrt{(40)^2+225+225} = \frac{1}{2}\sqrt{1600+450} = \frac{1}{2}\sqrt{2050}$ واحد مربع

$$\vec{PQ}\times\vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-5-35)\vec{i} - (15-0)\vec{j} + (-15-0)\vec{K} = -40\vec{i} - 15\vec{j} - 15\vec{K}$$

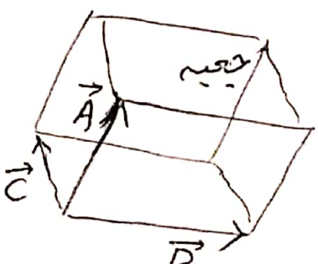
ضرب سه‌گانه‌ای جعبه‌ای:

اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ سه بردار در فضا باشند آنگاه به ضرب $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ ضرب سه‌گانه جعبه‌ای می‌نامیم.
طبق خاصیت ۵ می‌دانیم که $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ همچنین حاصل این ضرب یک عدد است.
نام این ضرب سه‌گانه به این دلیل جعبه‌ای است چون اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ سه یال یک جعبه یا متوازی السطوح باشند آنگاه

حجم جعبه = حجم متوازی السطوح $= |\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|$



$h = |A||\cos\theta|$



اگر θ زاویه بین $\vec{A}$ و $\vec{B}\times\vec{C}$ باشد و h ارتفاع متوازی السطوح باشد آنگاه

حجم $= V =$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع $= |\vec{B}\times\vec{C}|\cdot|A||\cos\theta| = |\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|$

مثال ۱۰) اگر $\vec{A}=-2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{B}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{C}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ سه یال یک متوازی السطوح باشند آنگاه حجم این متوازی السطوح را بیابید.

حل: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}-2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}=-2(15+2)-4(5-6)+1(-1-9)=-34+4-10=-40$

حجم متوازی السطوح $=|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|=|-40|=40$ واحد مکعب

تبصره (۱): همانطور که در مثال بالا دیدیم که اگر $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{B}=(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{C}=(c_1,c_2,c_3)$ آنگاه

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{A}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

تبصره (۲): اگر $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$ آنگاه، بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ در یک صفحه قرار دارند (هم صفحه هستند)

مثال ۱۱) نشان دهید که بردارهای $\vec{A}=(1,4,-7)$ و $\vec{B}=(2,-1,4)$ و $\vec{C}=(0,-9,18)$ در یک صفحه قرار دارند.

حل: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}1 & 4 & -7\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & -9 & 18\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -9 & 18\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 18\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -9\end{vmatrix}=$

$=(-18+36)-4(36-0)-7(-18-0)=18-4(36)+7(18)=8(18)-8(18)=0$

چون $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$ پس هر سه بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ در یک صفحه قرار دارند

توجه: به کمک تبصره (۲) اگر P و Q و R و S چهار نقطه دلخواه باشند و $\vec{PQ}\cdot(\vec{PR}\times\vec{PS})=0$ آنگاه این چهار نقطه در یک صفحه قرار دارند

مثال ۱۲ (تمرین ۳۸ صفحه ۱۰۳۶) آیا نقاط $A(1,3,2)$ و $B(3,-1,6)$ و $C(5,2,0)$ و $D(3,6,-4)$ در یک صفحه قرار دارند یا خیر؟

حل، $\vec{AB}=(3-1,-1-3,6-2)=(2,-4,4)$ و $\vec{AC}=(5-1,2-3,0-2)=(4,-1,-2)$

$\vec{AD}=(3-1,6-3,-4-2)=(2,3,-6)$

جوا

$\vec{AB}\cdot(\vec{AC}\times\vec{AD})=\begin{vmatrix}2 & -4 & 4\\ 4 & -1 & -2\\ 2 & 3 & -6\end{vmatrix}=2(6+6)+4(-24+4)+4(12+2)=24-80+56=0$

پس هر چهار نقطه در یک صفحه قرار دارند

تبصره (۳): به ضرب $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ که در خاصیت ۶ (یعنی $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$) آمده است ضرب سه گانه برداری می نامیم و از آن در قانون اول کپلر برای حرکت سیارات استفاده می شود.

مثال ۱۳ (تمرین ۲۵ صفحه ۱۰۳۷) اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دو بردار دلخواه باشند ثابت کنید: $(\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B})=2(\vec{A}\times\vec{B})$

حل: $$(\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B})=\underbrace{\vec{A}\times\vec{A}}_{0}+\vec{A}\times\vec{B}-\underbrace{\vec{B}\times\vec{A}-\underbrace{\vec{B}\times\vec{B}}_{0}}=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{B}=2(\vec{A}\times\vec{B})$$

چون $-\vec{B}\times\vec{A}=\vec{A}\times\vec{B}$

مثال ۱۴ (تمرین ۴۶ صفحه ۱۰۳۷) نشان دهید که $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

حل: فرض کنید که $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{B}=(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{C}=(c_1,c_2,c_3)$ در این صورت

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=\underbrace{(b_2c_3-b_3c_2)}_{d_1}\vec{i}-\underbrace{(b_1c_3-b_3c_1)}_{d_2}\vec{j}+\underbrace{(b_1c_2-b_2c_1)}_{d_3}\vec{k}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ d_1&d_2&d_3\end{vmatrix}=(a_2d_3-a_3d_2)\vec{i}-(a_1d_3-a_3d_1)\vec{j}+(a_1d_2-a_2d_1)\vec{k}$$

$$=\left[a_2(b_1c_2-b_2c_1)+a_3(b_1c_3-b_3c_1)\right]\vec{i}-\left[a_1(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_2c_3-b_3c_2)\right]\vec{j}+$$

$$+\left[a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)\right]\vec{k}$$ (۱) تساوی

$$(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}=\left[a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right]\vec{B}-\left[a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right]\vec{C}$$

$$=\left[(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1\right]\vec{i}+$$

$$+\left[(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_2-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_2\right]\vec{j}+$$

$$+\left[(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_3-(a_1b_1+a_2b_2+a_3c_3)c_3\right]\vec{k}=$$

$$=\left[a_2c_2b_1+a_3c_3b_1-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1\right]\vec{i}+\left[a_1c_1b_2+a_3c_3b_2-a_1b_1c_2-a_3b_3c_2\right]\vec{j}$$

$$+\left[a_1c_1b_3+a_2c_2b_3-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3\right]=$$

$$=\left[a_2(b_1c_2-b_2c_1)+a_3(b_1c_3-b_3c_1)\right]\vec{i}-\left[a_1(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_2c_3-b_3c_2)\right]\vec{j}$$

$$+\left[a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)\right]\vec{k}$$ (۲) تساوی

(۱) تساوی و (۲) تساوی $\Longrightarrow \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(A\cdot C)\vec{B}-(A\cdot B)\vec{C}$

معادله خط و صفحه در فضا

معادله خط در فضا: فرض کنید که L خطی در فضا باشد که از نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد و موازی با بردار $\vec{u}=(a,b,c)$ است. اگر $Q(x,y,z)$ یک نقطه دلخواه غیر از P روی خط L باشد آنگاه معادله برداری خط L عبارت است از: $\boxed{\overrightarrow{PQ}=t\vec{u}}$ (۱) که در آن $\exists t\in\mathbb{R}$ و t را پارامتر در نظر می‌گیریم.

$$\overrightarrow{PQ}=t\vec{u} \Rightarrow (x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=t(a,b,c) \Rightarrow \boxed{\vec{R}(t)=(x_0+ta)\vec{i}+(y_0+tb)\vec{j}+(z_0+tc)\vec{k}}$$

$$\begin{cases} x=x_0+ta \\ y=y_0+tb \\ z=z_0+tc \end{cases}$$ (۲) معادلات پارامتری خط L

$\xrightarrow{\text{با حذف } t}$

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$ (۳) معادلات متقارن خط L، $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$

اگر $a=0$ آنگاه معادلات متقارن خط L به صورت $\begin{cases} x=x_0 \\ \dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c} \end{cases}$ است.

مثال ۱) معادله برداری و معادله پارامتری و معادلات متقارن خط L را که از نقطه $P(5,1,3)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{u}=\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ موازی است را پیدا کنید.

حل: طبق فرمول (۱) داریم

$$(x-5,\ y-1,\ z-3)=t(1,4,-2) \Rightarrow (x,y,z)=(5+t,\ 1+4t,\ 3-2t) \Rightarrow$$

$$\vec{R}(t)=(5+t)\vec{i}+(1+4t)\vec{j}+(3-2t)\vec{k}$$ معادله برداری خط L

$$\Rightarrow \begin{cases} x=5+t \\ y=1+4t \\ z=3-2t \end{cases}$$ معادله پارامتری خط L

$$\Rightarrow \frac{x-5}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{-2}$$ معادلات متقارن خط L

مثال ۲) الف) معادله‌های پارامتری و معادله‌های متقارن خطی را که از نقطه‌های $A(2,4,-3)$ و $B(3,-1,1)$ می‌گذرد پیدا کنید. ب) این خط صفحه xy (یعنی صفحه $z=0$) را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند.

حل: بردار $\vec{u}$ عبارت است از بردار $\overrightarrow{AB}$ پس $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3-2,\ -1-4,\ 1+3)=(1,-5,4)$

بجای نقطه P نقطه A در نظر بگیریم پس: $\vec{R}(t)=(2+t)\vec{i}+(4-5t)\vec{j}+(-3+4t)\vec{k}$ معادله برداری خط L

الف) $\begin{cases} x=2+t \\ y=4-5t \\ z=-3+4t \end{cases}$: معادلات پارامتری خط L و $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z+3}{4}$ معادلات متقارن خط L

ب) $z=0 \Rightarrow -3+4t=0 \Rightarrow t=\frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} y=4-\frac{15}{4}=\frac{1}{4} \\ x=2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4} \end{cases}$

پس $(\frac{11}{4},\frac{1}{4},0)$ محل تلاقی خط L با صفحه $z=0$ است.

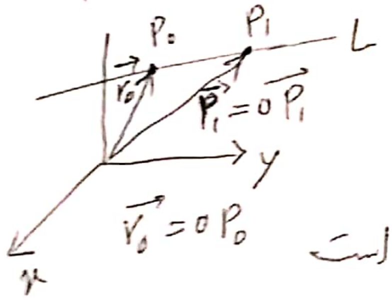
تبصره ۱) بطور کلی اگر خط L از دو نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ و $Q(x_1,y_1,z_1)$ می‌گذرد در این صورت $\vec{u}=\vec{PQ}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ بنابراین معادلات خط، خط L عبارت است از:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}}$$

تبصره ۲) (معادله پاره خط و نیم خط)

معادله خط L که از نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{u}$ موازی است به صورت معادله (1) یعنی $\vec{PQ}=t\vec{u}$ نمایش داده‌ایم. حال اگر $\vec{r}_0=\vec{OP}$ و $\vec{r}=\vec{OQ}$ در این صورت معادله (1) را می‌توان به صورت $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{u}$ نمایش داد زیرا $\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}$ و بنابراین طبق معادله (1) داریم $\vec{OQ}=\vec{OP}+t\vec{u}$ یعنی $\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{u}}$ (2)

حال اگر $P_0(x_0,y_0,z_0)$ و $P_1(x_1,y_1,z_1)$ قسمتی از خط L باشد (شکل زیر)



$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{u}=r_0+t(\vec{P_0P_1})=r_0+t(\vec{OP_1}-\vec{OP_0})\Longrightarrow$$

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t(\vec{r}_1-\vec{r}_0)=(1-t)r_0+tr_1\Longrightarrow\boxed{\vec{r}=(1-t)\vec{r}_0+t\vec{r}_1}$$

حال اگر $0\le t\le 1$ باشد معادله $\vec{r}=(1-t)\vec{r}_0+t\vec{r}_1$ معادله پاره خط P_0P است.

تعریف (پاره خط) پاره خط از $\vec{OP_0}=\vec{r}_0$ ، $\vec{OP_1}=\vec{r}_1$ با معادله برداری ($0\le t\le 1$) $r(t)=(1-t)r_0+tr_1$ مشخص می‌شود. به عبارت دیگر $0\le t\le 1$ ؛ $\vec{r}(t)=(1-t)\vec{OP_0}+t\vec{OP_1}$ معادله برداری پاره خط $\overline{P_0P_1}$ است.

اگر $t\ge 1$ یا $t\le 0$ باشد معادله $\vec{r}(t)=(1-t)\vec{r}_0+t\vec{r}_1$ معادله یک نیم خط است.

اگر $t\ge 1$ شروع نیم خط از P_1 است و اگر $t\le 0$ شروع نیم خط از P_0 است.

مثال ۳) معادله برداری و پارامتری پاره خط $\overline{PQ}$ را بیابید که در آن $P(-1,2,1)$ و $Q(3,4,2)$ است.

حل: معادله برداری این پاره خط عبارت است از $0\le t\le 1$ ، $\vec{r}(t)=(1-t)\vec{OP}+t\vec{OQ}$

$$\vec{r}(t)=(1-t)(-1,2,1)+t(3,4,2)=(-1+t,2-2t,1-t)+(3t,4t,2t)\Rightarrow$$

$$\vec{r}(t)=(-1+4t,2+2t,1+t)=(-1+4t)\vec{i}+(2+2t)\vec{j}+(1+t)\vec{k}\qquad 0\le t\le 1$$

معادله پارامتری پاره خط $\overline{PQ}$ عبارت است از

$$\begin{cases}x=-1+4t\\ y=2+2t\\ z=1+t\end{cases}\qquad 0\le t\le 1$$

وضعیت دو خط L_1 و L_2 نسبت به هم: دو خط L_1 و L_2 می‌توانند نسبت به هم سه وضعیت موازی بودن، متقاطع بودن و متنافر بودن داشته باشند:

دو خط L_1 و L_2 با بردارهای موازی به ترتیب u_1 و u_2 موازی هستند هرگاه $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ با هم موازی باشند به عبارت دیگر $\vec{u_1} = d\vec{u_2}$ یا $\vec{u_2} = d\vec{u_1}$

دو خط L_1 و L_2 متقاطع هستند هرگاه محل تلاقی داشته باشند یا در یک نقطه مشترک باشند

دو خط L_1 و L_2 را متنافر نامیم هرگاه متقاطع و موازی نباشند:

قضیه: فرض کنید که L_1 و L_2 دو خط با بردارهای موازی به ترتیب u_1 و u_2 باشند:

الف) شرط لازم و کافی برای اینکه این دو خط متنافر باشند این است که

$\vec{P_1P_2}\cdot(\vec{u_1}\times\vec{u_2}) \neq 0$ یعنی

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

که در آن $\vec{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$ و $u_2 = (a_2, b_2, c_2)$ و $P_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطه‌ای روی خط L_1 است و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ یک نقطه روی خط L_2 است

ب) کوتاه‌ترین فاصله بین دو خط متنافر L_1 و L_2 عبارت است از

$$d = \frac{|\vec{P_1P_2}\cdot(\vec{u_1}\times\vec{u_2})|}{|\vec{u_1}\times\vec{u_2}|}$$

نتیجه) اگر $\vec{P_1P_2}\cdot(\vec{u_1}\times\vec{u_2}) = 0$ آنگاه دو خط L_1 و L_2 متقاطع یا موازی هستند

مثال ۴) نشان دهید که دو خط L_1 و L_2 با معادله‌های پارامتری زیر متنافرند و سپس کوتاه‌ترین فاصله بین این دو خط را بیابید.

$$L_1\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+3t \\ z = 4-t \end{cases} \qquad L_2\begin{cases} x = 2s \\ y = 3+s \\ z = -3+4s \end{cases}$$

حل (در صفحه بعد)

روش اول طبق قضیه قبل عمل می‌کنیم.

$\vec{u_1}=(1,3,-1)$ و $P_1(1,-2,4)$ و $\vec{u_2}=(2,1,4)$ و $P_2(0,3,-3)$

$\overrightarrow{P_1P_2}=(0-1,3+2,-3-4)=(-1,5,-7)$

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u_1}\times\vec{u_2})=\begin{vmatrix}-1&5&-7\\1&3&-1\\2&1&4\end{vmatrix}=-1(12+1)-5(4+2)-7(1-6)=$$
$$=-13-30+35=-8\neq 0$$

پس این دو خط متنافرند.

$$\vec{u_1}\times\vec{u_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&3&-1\\2&1&4\end{vmatrix}=(12+1)\vec{i}-(4+2)\vec{j}+(1-6)\vec{k}=13\vec{i}-6\vec{j}-5\vec{k}$$

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u_1}\times\vec{u_2})|}{|\vec{u_1}\times\vec{u_2}|}=\frac{|-8|}{\sqrt{169+36+25}}=\frac{8}{\sqrt{230}}$$

روش دوم برای متنافر بودن: این دو خط موازی نیستند زیرا u_1 و u_2 موازی نیستند.
این دو خط متقاطع نیستند زیرا اگر

$$\begin{cases}1+t=2s & (1)\\-2+3t=3+s & (2)\\4-t=-3+4s & (3)\end{cases}$$

از حل معادله اول و دوم داریم

$$\begin{cases}t-2s=-1\\3t-s=5\end{cases}$$ پس $$\begin{cases}-3t+6s=3\\3t-s=5\end{cases}$$ با جمع کردن داریم $5s=8$

پس $s=\frac{8}{5}$ و $t=-1+2(\frac{8}{5})=\frac{11}{5}$

با قرار دادن $s=\frac{8}{5}$ و $t=\frac{11}{5}$ در معادله (3) داریم:

$$4-\frac{11}{5}=-3+\frac{32}{5}\Rightarrow\frac{9}{5}=\frac{17}{5}$$

که یک تناقض است یعنی این دو خط متقاطع نیستند.
بنابراین این دو خط متنافر هستند

مثال ۵ (تمرین ۲۰ صفحه ۱۰۴۹) وضعیت دو خط زیر را بررسی کنید و اگر متقاطع هستند محل تقاطع دو خط را بدست آورید.

$$L_1\begin{cases}x=1+2t\\y=3t\\z=2-t\end{cases}\qquad L_2\begin{cases}x=-1+s\\y=4+s\\z=1+3s\end{cases}$$

حل: $\vec{u_1}=(2,3,-1)$ و $\vec{u_2}=(1,1,3)$
$P_1(1,0,2)$ و $P_2(-1,4,1)$

$\overrightarrow{P_1P_2}=(-1-1,4-0,1-2)=(-2,4,-1)$

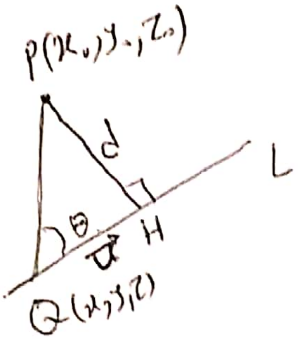
$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u_1}\times\vec{u_2})=\begin{vmatrix}-2&4&-1\\2&3&-1\\1&1&3\end{vmatrix}=-2(9+1)-4(6+1)-1(2-3)=-20-28+1=-47$$

پس این دو خط متنافر هستند.

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u_1}\times\vec{u_2})|}{|\vec{u_1}\times\vec{u_2}|}=\frac{|-47|}{\sqrt{100+49+1}}=\frac{47}{\sqrt{150}}$$

$$\vec{u_1}\times\vec{u_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&-1\\1&1&-3\end{vmatrix}=(9+1)\vec{i}-(6+1)\vec{j}+(2-3)\vec{k}=10\vec{i}-7\vec{j}-\vec{k}$$

فاصله نقطه تا یک خط: فرض کنید که L یک خط در فضا با بردار موازی $\vec{u}=(a,b,c)$ باشد. کوتاهترین فاصله نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ تا خط L عبارت است از



$$d=|\overrightarrow{PQ}|\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Q یک نقطه دلخواه روی خط L است و $\sin\theta=\frac{d}{|\overrightarrow{PQ}|}$

مثال ۶: فاصله (کوتاهترین فاصله) نقطه $P(2,1,3)$ از خط L با معادلات متقارن $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ را بیابید.

حل: نقطه Q را دلخواه روی L انتخاب می‌کنیم $Q(1,2,-1)$ و $\vec{u}=(3,1,-1)$

$$\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}i&j&\vec{k}\\-1&1&-4\\3&1&-1\end{vmatrix}=(-1+4)\vec{i}-(1+12)\vec{j}+(-1-3)\vec{k}=3\vec{i}-13\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PQ}=(1-2,\,2-1,\,-1-3)=(-1,1,-4)$$

$$d=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{9+169+16}}{\sqrt{9+1+1}}=\frac{\sqrt{194}}{\sqrt{11}}$$

مثال ۷ (تمرین ۶۷ صفحه ۱۰۵۱) فاصله نقطه $P(4,1,-2)$ از خط L با معادله پارامتری زیر را بیابید

$$\begin{cases}x=1+t\\y=3-2t\\z=4-3t\end{cases}$$

حل: $\vec{u}=(1,-2,-3)$ و $Q(1,3,4)$

$$\overrightarrow{PQ}=(1-4,\,3-1,\,4+2)=(-3,2,6)$$

ادامه در صفحه بعد

$$\vec{PQ}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&2&6\\1&-2&-3\end{vmatrix}=(-6+12)\vec{i}-(9-6)\vec{j}+(6-2)\vec{k}=6\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$$

$$d=\frac{|\vec{PQ}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{36+9+16}}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{\sqrt{61}}{\sqrt{14}}$$

معادله صفحه: فرض کنید که S یک صفحه باشد و $\vec{N}=(a,b,c)$ بردار قائم این صفحه باشد. اگر $P_0(x_0,y_0,z_0)$ یک نقطه از این صفحه باشد (صفحه S از نقطه P_0 بگذرد) آنگاه معادله برداری این صفحه عبارت است از $\vec{P_0P}\cdot\vec{N}=0$ (1) که در آن $P(x,y,z)$ یک نقطه دیگر از صفحه غیر از P_0 است.

$$\vec{P_0P}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$$

$$\vec{P_0P}\cdot\vec{N}=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow \boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

معادله اسکالر صفحه S (2)

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0$$

با فرض $d=ax_0+by_0+cz_0$ داریم:

$$\boxed{ax+by+cz=d}\quad (3)$$

معادله صفحه

اگر $-d=ax_0+by_0+cz_0$ در نظر بگیریم داریم

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}\quad (4)$$

معادله صفحه

معادله های (1)، (2)، (3) و (4) همگی معادله صفحه S هستند.

مثال ۸) معادله صفحه ای پیدا کنید که از نقطه $P(2,4,-1)$ می گذرد و بردار قائمش $\vec{N}=(2,3,4)$ است. همچنین محل برخورد این صفحه با محورهای مختصات (قطعه های این صفحه) را پیدا کنید و آن را رسم کنید.

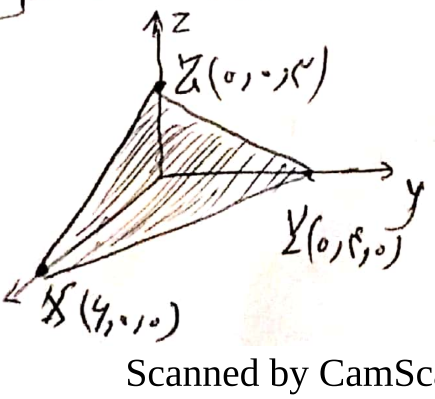
حل: معادله صفحه عبارت است از: $\boxed{2(x-2)+3(y-4)+4(z+1)=0}$ یا

$$2x+3y+4z=12$$

$X=$ محل برخورد با محور x ها وقتی که $z=y=0$: $X=\frac{12}{2}=6$

$Y=\frac{12}{3}=4$

$Z=\frac{12}{4}=3$



قسمت هاشور خورده قسمتی از صفحه است که در یک هشتم اول قرار دارد.

مثال ۹) معادله صفحه‌ای را پیدا کنید که از نقاط $P(1,3,2)$ و $Q(3,-1,6)$ و $R(5,2,0)$ می‌گذرد و آن را رسم کنید.

$\vec{PQ}=(2,-4,4)$
$\vec{PR}=(4,-1,-2)$

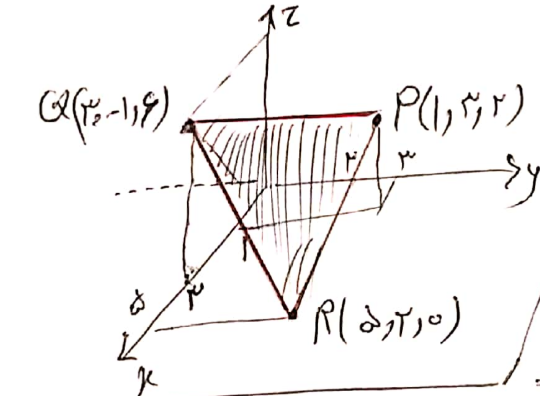
حل: بردار قائم این صفحه عبارت است از $\vec{N}=\vec{PQ}\times\vec{PR}$

$$\vec{N}=\vec{PQ}\times\vec{PR}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(8+4)\vec{i}-(-4-16)\vec{j}+(-2+16)\vec{k}=12\vec{i}+20\vec{j}+14\vec{k}$$

برای نوشتن معادله صفحه از نقطه $P(1,3,2)$ استفاده می‌کنیم:

$$12(x-1)+20(y-3)+14(z-2)=0 \Rightarrow 6(x-1)+10(y-3)+7(z-2)=0$$

$$\Rightarrow 6x+10y+7z=6+30+14 \Rightarrow \boxed{6x+10y+7z=50}$$



مثال ۱۰) محل برخورد خط با معادله پارامتری $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-4t \\ z=5+t \end{cases}$ و صفحه $4x+5y-2z=18$ را پیدا کنید.

حل: با جایگذاری داریم:

$$4(2+3t)+5(-4t)-2(5+t)=18 \Rightarrow -10t=20$$

$$\Rightarrow \boxed{t=-2} \Rightarrow (x,y,z)=(2-6,\ 8,\ 5-2)=(-4,8,3)$$

دو صفحه S_1 و S_2 با بردار قائم به ترتیب $\vec{N_1}$ و $\vec{N_2}$ موازی هستند هرگاه $\vec{N_1}$ و $\vec{N_2}$ موازی باشند.

مثال ۱۱) دو صفحه $x+2y-3z=4$ و $2x+4y-6z=3$ موازی هستند زیرا $\vec{N_1}=(1,2,-3)$ و $\vec{N_2}=(2,4,-6)$ موازی هستند زیرا $\vec{N_2}=2\vec{N_1}$

زاویه بین دو صفحه

اگر دو صفحه موازی نباشند آنگاه یکدیگر را در خطی راستی (فصل مشترک دو صفحه) قطع می‌کنند و زاویه حاده میان بردارهای قائمشان تعریف می‌کنیم. یا عبارت دیگر

$$\cos\theta=\frac{\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}}{|\vec{N_1}||\vec{N_2}|} \quad \text{و} \quad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}}{|\vec{N_1}||\vec{N_2}|}\right)$$

مثال ۱۲) زاویه بین دو صفحه $x+y+z=1$ و $x-2y+3z=1$ را پیدا کنید.

حل:

$$\vec{N_1}=(1,1,1),\ \vec{N_2}=(1,-2,3) \Rightarrow \cos\theta=\frac{1-2+3}{\sqrt{3}\times\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{42}} \Rightarrow \theta=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)\simeq 72^\circ$$

در ادامه این فصل به یافتن فصل مشترک دو صفحه، فاصله یک نقطه تا صفحه، فاصله دو صفحه موازی می‌پردازیم.

محاسبهٔ فصل مشترک دو صفحه: فصل مشترک دو صفحه S_1 و S_2 با بردارهای قائم به ترتیب $\vec{N_1}$ و $\vec{N_2}$ یک خط راست است. برای محاسبهٔ فصل مشترک دو صفحه می‌توان از دو روش زیر استفاده کرد.

روش اول: در مرحله اول بردار موازی با فصل مشترک دو صفحه (خط) یعنی $\vec{u} = \vec{N_1} \times \vec{N_2}$ را می‌یابیم. سپس یک نقطه مانند $P(x_0, y_0, z_0)$ روی هر دو صفحه (فصل مشترک) می‌یابیم. در نهایت معادله خط را می‌نویسیم.

روش دوم: اگر معادله S_1 و S_2 به ترتیب به صورت $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ و $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ باشد در این صورت با حل دستگاه دو معادله و سه مجهول

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$$

معادله خط (فصل مشترک دو صفحه) را می‌یابیم.

مثال ۱۳) فصل مشترک دو صفحه $x+y+z=1$ و $x-2y+3z=1$ را بیابید.

حل: روش اول:

$$\vec{N_1}=(1,1,1),\quad \vec{N_2}=(1,-2,3) \Longrightarrow \vec{u}=\vec{N_1}\times\vec{N_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=(3+2)\vec{i}-(3-1)\vec{j}+(-2-1)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{u}=(5,-2,-3)}$$

$$\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \xRightarrow{\boxed{z=0}} \begin{cases} x-2y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow 3y=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$P(1,0,0),\quad \vec{u}=(5,-2,-3) \quad \frac{x-1}{5}=\frac{y+0}{-2}=\frac{z-0}{-3} \Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-3}}$$

روش دوم: حل دستگاه

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=1 \end{cases} \xRightarrow{z=c} \begin{cases} x+y=1-c \\ x-2y=1-3c \end{cases} \underset{\text{تفریق کردن}}{\Rightarrow} 3y=1-c-(1-3c) \Rightarrow 3y=2c \rightarrow \boxed{y=\frac{2}{3}c}$$

$$\Rightarrow x=1-c-y=1-c-\frac{2}{3}c=1-\frac{5}{3}c \Rightarrow \boxed{x=1-\frac{5}{3}c}$$

پس معادله پارامتری خط عبارت است از:

$$\begin{cases} x=1-\frac{5}{3}c \\ y=\frac{2}{3}c \\ z=c \end{cases} \quad (c \text{ دلخواه})$$

مثال ۱۴) (تمرین ۷۵ صفحه ۱۰۱) معادله‌های متقارن خط برخورد صفحه‌های $5x-2y-2z=1$ و $4x+y+z=6$ را پیدا کنید. حل (روش اول) حل دستگاه. با فرض $x=a$ داریم

$$\begin{cases} 5x-2y-2z=1 \\ 4x+y+z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y-2z=1-5a \\ y+z=6-4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y-2z=1-5a \\ 2y+2z=12-8a \end{cases} \Rightarrow$$ جمع کردن

$$13-13a = 13a=13 \Rightarrow a=1 \Rightarrow \boxed{x=a=1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2y-2z=1-5 \\ y+z=6-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y-2z=-4 \\ y+z=2 \end{cases} \Rightarrow y+z=2 \Rightarrow \boxed{y=2-z}$$

با فرض $z=c$ داریم $y=2-c$ پس معادله پارامتری خط عبارت است از

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2-c \\ z=c \end{cases}$$

و معادلات متقارن خط عبارت است از

$$\begin{cases} x=1 \\ \dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1} \end{cases}$$

روش دوم: (محاسبه بردار موازی خط)

$\vec{u}=\vec{N_1}\times\vec{N_2}$ و $\vec{N_1}=(5,-2,-2)$

$\vec{N_2}=(4,1,1)$

$$u=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0)\vec{i}-(13)\vec{j}+13\vec{k}$$

با فرض $z=0$ داریم $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 4x+y=6 \end{cases}$ و با جمع کردن $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 8x+2y=12 \end{cases}$ داریم $13x=13$

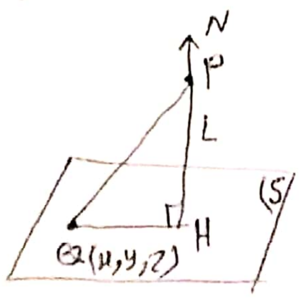
پس $x=1$ و $5x-1=2y$ یعنی $2y=4$ ... پس $\boxed{y=2}$ و بنابراین

$P(1,2,0)$ یک نقطه روی خط است پس معادله متقارن خط عبارت است از

$$\begin{cases} x=1 \\ \dfrac{y-2}{-13}=\dfrac{z}{13} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=1 \\ \dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1} \end{cases}$$

<u>فاصله یک نقطه تا صفحه</u>: فاصله نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ تا صفحه S با معادله $ax+by+cz+d=0$ عبارت است از:

$$L=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



$$L=|comp_{\vec{N}}\vec{PQ}|=\frac{|\vec{PQ}\cdot\vec{N}|}{|\vec{N}|}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\vec{PQ}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0),\quad \vec{PQ}\cdot\vec{N}=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) \Rightarrow$$

$$|a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)|=|\underbrace{ax+by+cz}_{-d}-(ax_0+by_0+cz_0)|=|ax_0+by_0+cz_0+d|$$

مثال ۱۵) فاصله نقطه $P(2,1,3)$ از صفحه $3x-4y+5z=7$ را بیابید.

حل: $$3x-4y+5z-7=0 \Rightarrow L=\frac{|3\times2-4\times1+5\times3-7|}{\sqrt{9+16+25}}=\frac{|6-4+15-7|}{\sqrt{50}}=\frac{10}{\sqrt{50}}$$

مثال ۱۶) (تمرین ۷۰ صفحه ۱۰۵۱) فاصله نقطه $P(-6,3,5)$ از صفحه $x-2y-4z=8$ را بیابید.

حل: $$x-2y-4z-8=0 \Rightarrow d=\frac{|1\times(-6)-2\times(3)-4\times(5)-8|}{\sqrt{1+4+16}}=\frac{|-6-6-20-8|}{\sqrt{21}}=\frac{40}{\sqrt{21}}$$

مثال ۱۷) نشان دهید که دو صفحه $10x+2y-2z=5$ و $5x+y-z=1$ موازی هستند و سپس فاصله بین این دو صفحه را پیدا کنید.

حل:
$$\begin{aligned}\vec{N_1}&=(10,2,-2)\\ \vec{N_2}&=(5,1,-1)\end{aligned} \Rightarrow \vec{N_1}=2\vec{N_2}$$
: دو صفحه موازی هستند زیرا

برای یافتن فاصله دو صفحه موازی کافی است فاصله یک نقطه که روی صفحه S_1 قرار دارد را تا صفحه S_2 پیدا کنیم. در صفحه $10x+2y-2z=5$ اگر $z=0$ و $y=0$ در نظر بگیریم آنگاه $x=\frac{1}{2}$ پس نقطه $P(\frac{1}{2},0,0)$ روی صفحه $10x+2y-2z=5$ قرار دارد.

$$L=\frac{|5\times\frac{1}{2}+1\times0-1\times0-1|}{\sqrt{25+1+1}}=\frac{|\frac{5}{2}-1|}{\sqrt{27}}=\frac{3}{2\sqrt{27}}=\frac{3}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

مثال ۱۸) (تمرین ۷۲ صفحه ۱۰۵۱) فاصله میان دو صفحه موازی $6z=4y-2x$ و $9z=1-3x+6y$ را بیابید.

حل:
$$\begin{cases}-2x+4y-6z=0\\ 3x-6y+9z=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-2y+3z=0 \to \vec{N_1}=(1,-2,3)\\ 3x-6y+9z=1 \to \vec{N_2}=(3,-6,9)\end{cases} \Rightarrow \vec{N_2}=3\vec{N_1}$$
موازی بودن دو صفحه

نقطه $(0,0,0)$ روی صفحه $x-2y+3z=0$ قرار دارد. پس فاصله نقطه $(0,0,0)$ از صفحه $3x-6y+9z=1$ را پیدا می‌کنیم.

$$L=\frac{|3\times0-6\times0+9\times0-1|}{\sqrt{9+36+81}}=\frac{|-1|}{\sqrt{126}}=\frac{1}{\sqrt{126}}$$

نتیجه: فاصله بین دو صفحه موازی $ax+by+cz=d_1$ و $ax+by+cz=d_2$ عبارت است از:

$$L=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

* مثال ۱۷ و ۱۸ را طبق نتیجه بالا حل کنید. جواب در صفحه بعد

حل (*) مثال ۱۷ معادله صفحه S_1 ، $5x+y-z=1$ و معادله S_2 (تقسیم بر ۲) $5x+y-z=\frac{5}{2}$

$d_1=1$ و $d_2=\frac{5}{2}$ پس

$$L=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{25+1+1}}=\frac{|1-\frac{5}{2}|}{\sqrt{27}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{27}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

در مثال ۱۸ معادله صفحه S_1 ، $-3x+6y-9z=-1$ و معادله صفحه S_2 (تقسیم بر ۲ و ضرب در ۳) $-3x+6y-9z=0$

پس $d_1=-1$ و $d_2=0$ بنابراین

$$L=\frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{9+36+81}}=\frac{|-1-0|}{\sqrt{126}}=\frac{1}{\sqrt{126}}$$

حل چند تمرین از کتاب صفحه ۱۰۴۹

۲۹) معادله صفحه‌ای که از نقطه $(4,-2,3)$ می‌گذرد و با صفحه $3x-7z=12$ موازی است را بیابید.

حل: بردار عمود بر صفحه $\vec{N}=(3,0,-7)$ است (چون با صفحه $3x-7z=12$ موازی است)

بنابراین معادله صفحه مورد نظر عبارت است از

$$3(x-4)-2(y-0)-7(z-3)=0 \Rightarrow 3x-2y-7z=-9$$

۳۰- معادله صفحه‌ای که خط $\begin{cases}x=3+2t\\ y=t\\ z=8-t\end{cases}$ را دربردارد و با صفحه $2x+4y+8z=17$ موازی است را بیابید.

حل: بدیهی است که $\vec{u}\cdot\vec{N}=0$ زیرا $\vec{u}=(2,1,-1)$ بردار موازی خط و $\vec{N}=(2,4,8)$ بردار عمود بر صفحه است پس نقطه $P(3,0,8)$ (به ازای $t=0$) روی خط روی صفحه مورد نظر است و

بنابراین معادله صفحه مورد نظر عبارت است از

$$2(x-3)+4(y-0)+8(z-8)=0 \Rightarrow 2x+4y+8z=72$$

۳۱- معادله صفحه‌ای که از نقطه $(1,2,3)$ می‌گذرد و خط $\begin{cases}x=3t\\ y=1+t\\ z=3-t\end{cases}$ را دربردارد را بیابید.

حل: کافی است که بردار عمود صفحه یعنی $\vec{N}$ را بیابیم، همچنین اگر $\vec{N}=(a,b,c)$ باشد آنگاه $\vec{u}=(3,1,-1)$

$$\vec{N}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow 3a+b-c=0$$

برای محاسبه $\vec{N}$ کافی است سه نقطه از صفحه را مشخص کنیم مانند P و Q و R و پس $\vec{N}=\vec{PR}\times\vec{PQ}$

$t=0 \Rightarrow P(0,1,3) \Rightarrow \vec{PR}=(1,1,0)$, $\vec{PQ}=(3,1,-1)$ $\Rightarrow \vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&0\\3&1&-1\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

$t=1 \Rightarrow Q(3,2,2)$

$R(1,2,3)$

معادله صفحه $-1(x-1)+1(y-2)-2(z-3)=0$

$$\boxed{-x+y-2z=-3}$$