فصل سوم: مفهوم مجموعه   بخش ۱ مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها

در ریاضی برخی از مفاهیم قابل تعریف نیستند و به آنها مفاهیم اولیه می‌گویند مثل نقطه، فضا. مجموعه هم یکی از مفاهیم اولیه است و قابل تعریف نیست. ولی برای اهمیت مجموعه در ریاضیات، مخصوصاً در مبانی ریاضی، برای مجموعه یک تعریف از کانتور به صورت زیر می‌آوریم:

مجموعه یک دسته معین و مشخص از اشیاء دو به دو متمایز است که دارای صفت یا صفاتی مشترک می‌باشند.

در این تعریف زیر برخی از کلمات که در تعریف مجموعه آمده است خط کشیده‌ایم و به برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

کلمه دسته هم‌معنی مجموعه است. در یک تعریف نباید از مفهومی که هم معنی آن است استفاده کرد (ممکن است بگوییم که بجای دسته از توده یا گروه یا ... استفاده کنیم بهتر است که این کلمات هم، هم‌معنی مجموعه هستند).

کلمات معین و مشخص در این تعریف به چه معنی است چه کسی آنها را معین و مشخص می‌کند.

کلمات اشیاء و دو به دو متمایز در این تعریف هم مشکل دارد زیرا مجموعه‌ای وجود دارد که دارای هیچ عضوی نیست (مجموعه خالی یا مجموعه تهی). کلمات صفت مشترک در این تعریف خیلی کلی است چه کسی این صفات را معین می‌کند.

با این وجود برای اینکه بدانیم با چه مفهومی کار می‌کنیم این تعریف را با همه مشکلاتش مبنای تعریف مجموعه قرار می‌دهیم.

مثال ۱: مجموعه تمامی صندلی‌های کلاس ۱۱۰ - مجموعه تمام دانشجویان رشته ریاضی در یک دانشگاه - مجموعه حروف a، b، c و d
مجموعه تمام قوانین خوابگاه‌های یک دانشگاه - مجموعه تمام اعداد طبیعی - مجموعه تمام اعداد گویا - مجموعه اعداد طبیعی زوج

تعریف: مجموعه‌ای که فقط شامل تعداد متناهی عضو باشد را مجموعه متناهی می‌گویند و مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه نامتناهی می‌نامیم.

در مثال ۱، مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد طبیعی زوج و مجموعه تمام اعداد گویا نامتناهی هستند و باقی مجموعه‌ها در مثال ۱ مجموعه متناهی هستند.

مثال ۲: مجموعه تمام اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ که با بازه $(0,1)$ نمایش داده می‌شود یک مجموعه نامتناهی است.

قرارداد: مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی A و B و C و ... نمایش می‌دهیم و اعضای یک مجموعه را با حروف کوچک انگلیسی a و b و c و ... نمایش می‌دهیم و وقتی که اعضای آن معلوم است از دو علامت آکولاد $\{\ \}$ برای نوشتن اعضای یک مجموعه استفاده می‌کنیم و اعضای مجموعه را در درون این دو نماد آکولاد قرار می‌دهیم.

برای مثال: $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{a,b,c\}$ و C = {م، ن، و، د}

مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را مجموعه خالی (یا مجموعه تهی) می‌نامیم و با علامت $\emptyset$ نمایش می‌دهیم.

در یک مجموعه مانند A اگر a عضو A باشد می‌نویسیم $a\in A$ و اگر a عضو A نباشد می‌نویسیم $a\notin A$. $a\in A$ می‌خوانیم a متعلق به A است و $a\notin A$ می‌خوانیم a متعلق به A نیست.

تعریف (دو مجموعه مساوی) دو مجموعه A و B را مساوی نامیم و می‌نویسیم $A=B$، هرگاه اعضای A و B یکی باشند

از نظر منطقی:
$$(A=B) \equiv \forall x(x\in A \Longleftrightarrow x\in B)$$

توجه: در نوشتن اعضای یک مجموعه، ترتیب خاصی رعایت نمی‌شود (ولی اگر اعضای یک مجموعه ترتیب داشته باشند بهتر است) مثلاً $\{a,b,c\}$ با $\{a,c,b\}$ یکی هستند.

تعریف (زیرمجموعه) اگر A و B دو مجموعه باشند اگر هر عضو مجموعه B عضوی از مجموعه A باشد گوییم که B زیرمجموعه A است و می‌نویسیم $B\subseteq A$ یا $A\supseteq B$.

همچنین اگر B زیرمجموعه A باشد ($B\subseteq A$) آنگاه A را ابرمجموعه B می‌نامیم.

از نظر منطقی
$$(B\subseteq A) \equiv \forall x(x\in B \Longrightarrow x\in A)$$

توجه: هر مجموعه A یک زیرمجموعه خودش $A\subseteq A$ و همچنین A یک ابرمجموعه A است. همچنین هرگاه $B\subseteq A$ و $B\neq A$ می‌نویسیم $A\supset B$ یا $B\subset A$ و می‌خوانیم B زیرمجموعه محض (یا سره) A است. به عبارت دیگر $B\subset A$ هرگاه هر عضو B عضوی از A باشد و عضوی در A وجود دارد که در مجموعه B نیست. و اگر B زیرمجموعه A نباشد می‌نویسیم $B\not\subseteq A$

قضیه ۱: مجموعه ϕ تهی زیرمجموعه هر مجموعه A است (به عبارت دیگر اگر A یک مجموعه باشد آنگاه $\phi\subseteq A$).

برهان: با انتفای مقدم گزاره شرطی $(x\in\phi)\Longrightarrow(x\in A)$ همیشه درست است پس $\phi\subseteq A$

قضیه ۲: اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ آنگاه $A\subseteq C$.

برهان: نشان می‌دهیم که $(x\in A)\Longrightarrow(x\in C)$:
$$x\in A \xRightarrow{A\subseteq B} x\in B \xRightarrow{B\subseteq C} x\in C$$
بنابراین به تنهایی $(x\in A\Longrightarrow x\in C)$

مثال ۳ (تمرین ۳ صفحه ۳۹) تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1,0,-1\}$ را بنویسید

حل: $\{1,0,-1\}$ و $\{0,1\}$ و $\{-1,1\}$ و $\{-1,0\}$ و $\{1\}$ و $\{0\}$ و $\{-1\}$ و ϕ

مثال ۴ (تمرین ۴ صفحه ۳۹) ثابت کنید که $(A\subseteq B \wedge B\subseteq A) \Longleftrightarrow (A=B)$ [تبصره: اغلب در ریاضیات بهترین راه برای نشان دادن $A=B$ آن است که نشان دهیم $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$]

حل:
$$(A=B) \equiv \forall x(x\in A \Longleftrightarrow x\in B) \equiv (x\in A \Longrightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Longrightarrow x\in A)$$
$$\equiv (A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$$

مثال ۵ (تمرین ۷ صفحه ۴۰) مثالی بیاورید از مجموعه‌ای که هر یک از عنصرهایش مجموعه باشد

حل: $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$، $B=\{\phi, Z, N, R\}$ و $C=\{\phi,\{\phi\},\{\{1\}\}\}$

مثال ۶ (تمرین ۵ صفحه ۴۰) ثابت کنید که $(A\subseteq\phi)\Longrightarrow(A=\phi)$

حل: فرض کنید که $A\subseteq\phi$. طبق قضیه ۱ داریم $\phi\subseteq A$ پس طبق تعریف تساوی دو مجموعه $A=\phi$.

بخش ۲ تصریح مجموعه‌ها

فرض کنید که A یک مجموعه دلخواه باشد. یک روش ساختن مجموعه جدید از روی مجموعه A این است که عضوهای از A انتخاب کنیم که در یک ویژگی خاص صدق کنند یا به عبارت دیگر شرطی مانند $p(x)$ در نظر بگیریم و سپس اعضای از مجموعه A انتخاب کنیم که در شرط $p(x)$ صدق می‌کنند مانند $B=\{x\in A \mid p(x)\}$. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱: دانشجویان کلاس مبانی ریاضی را به عنوان مجموعه A در نظر می‌گیریم و $p(x)$ را شرط عینکی بودن در نظر می‌گیریم در این صورت $B=\{x\in A \mid p(x)\}$ مجموعه دانشجویان کلاس مبانی ریاضی است که عینکی هستند. بدیهی است که $B\subseteq A$. حال اگر $q(x)$ شرط متأهل بودن در نظر بگیریم $C=\{x\in A \mid q(x)\}$ یعنی مجموعه دانشجویان کلاس مبانی ریاضی که متأهل هستند.

قاعده زیر به اصل تصریح مجموعه‌ها معروف است:

متناظر با هر مجموعه A و هر حکم $p(x)$ درباره $x\in A$ یک مجموعه $B=\{x\in A \mid p(x)\}$ وجود دارد که عضوهایش دقیقاً آن عضوهای A هستند که حکم $p(x)$ برای آنها درست است (یا در شرط $p(x)$ صدق می‌کنند). بنابراین $\{x\in A \mid p(x)\}$ یک مجموعه است و $\{x\in A \mid p(x)\}$ نماد سازنده مجموعه (نماد ریاضی مجموعه) نامیده می‌شود.

مثال ۲: $\mathbb{R}$ را مجموعه تمام اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در این صورت

الف) $\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+1=0\}$ و $\{x\in\mathbb{R} \mid x=x+1\}$ و $\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+2=0\}$ مجموعه تهی را معرفی می‌کنند.

ب) مجموعه $\{x\in\mathbb{R} \mid 2x^2-5x+3=0\}$ همان $\{1, \frac{3}{2}\}$ است.

ج) مجموعه $\{x\in\mathbb{R} \mid 2x^2-5x-3=0\}$ همان $\{-\frac{1}{2}, 3\}$ است.

تبصره: مجموعه‌های زیر در این درس و دیگر درسهای ریاضی کاربرد دارد و بارها تکرار می‌شود.

$\mathbb{R}=\{x \mid$ عدد حقیقی است $x\}=(-\infty,+\infty)$

$\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}=(0,+\infty)$

$\mathbb{Q}=\{x\in\mathbb{R} \mid$ گویا است $x\}=\{\frac{p}{q} \mid (p,q)=1 , p,q\in\mathbb{Z} , q\neq 0\}$

$\mathbb{Z}=\{x \mid$ عدد صحیح است $x\}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$

$\mathbb{N}=\{n \mid$ عدد طبیعی است $n\}=\{1,2,3,\dots\}$

$I=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\le x\le 1\}=[0,1]$

بدیهی است که $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}_+\subset\mathbb{R}$

تعریف: اگر A یک مجموعه باشد مجموعه تمام زیرمجموعه‌های A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و آن را مجموعه توانی A می‌نامیم.

مثال ۳: اگر $A=\{a,b\}$ آنگاه

$$P(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

مثال ۴: اگر $A=\{a\}$ و $B=\phi$ آنگاه $P(A)$ و $P(B)$ را بیابید.

حل:

$$P(A)=\{\phi,\{a\}\} \quad \text{و} \quad P(B)=P(\phi)=\{\phi\}$$

قضیه ۳: اگر A از n عنصر تشکیل شده باشد آنگاه مجموعه توانی A یعنی $P(A)$ دقیقاً 2^n عنصر دارد.

اثبات: دو روش در کتاب صفحه ۴۲ ذکر شده است که یکی روش شمارشی و دیگری استفاده از تمرین ۱۱ بخش قبل و تمرین ۳ فصل بخش استقرای ریاضی است. ما یک روش استقرای ریاضی این قضیه را ثابت می‌کنیم.

شروع استقرای ریاضی: $n=0$ پس $A=\phi$ در مثال ۴ دیدیم که $P(\phi)=\{\phi\}$ پس تعداد اعضای مجموعه $P(\phi)$ برابر با عدد $1=2^0$ است.

می‌توان شروع استقرای ریاضی را از $n=1$ شروع کرد. در این صورت $A=\{a\}$ پس $P(A)=\{\phi,\{a\}\}$ یعنی تعداد اعضای $P(A)$ برابر $2=2^1$ است.

فرض استقرای ریاضی: فرض کنید که $A=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ دارای $n=k$ عضو داشته باشد و تعداد اعضای $P(A)$ برابر با 2^k باشد.

حکم استقرای ریاضی: نشان می‌دهیم که اگر $B=\{a_1,a_2,\dots,a_k,a_{k+1}\}$ آنگاه تعداد اعضای $P(B)$ برابر با 2^{k+1} است.

اثبات حکم استقرای ریاضی: چون $B=A\cup\{a_{k+1}\}$ پس اعضای $P(B)$ را می‌توان به دو دسته به صورت زیر تقسیم کرد. الف) اعضایی از $P(B)$ که شامل a_{k+1} نیستند که این اعضا دقیقاً اعضای $P(A)$ هستند که طبق فرض استقرای ریاضی 2^k هستند.

ب) اعضایی از $P(B)$ که شامل a_{k+1} هستند و اگر a_{k+1} را به تمام اعضای $P(A)$ اضافه کنیم این مجموعه‌ها ساخته می‌شوند و بنابراین تعداد آنها طبق حالت الف) 2^k هستند.

بنابراین تعداد اعضای $P(B) = 2^k+2^k = 2\cdot 2^k = 2^{k+1}$

پس طبق اصل استقرای ریاضی تعداد اعضای مجموعه توانی هر مجموعه n عضوی برابر با 2^n است.

مثال ۵: با یک مثال اثبات قضیه ۳ را روشن سازید.

حل: فرض کنید که $A=\{1,2\}$ و $B=\{1,2,3\}=A\cup\{3\}$ باشد (یعنی $a_{k+1}=3$)

$$P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

$$P(B)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\},\phi\cup\{3\},\{1\}\cup\{3\},\{2\}\cup\{3\},\{1,2\}\cup\{3\}\}$$

$$=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

مثال ۶ (تمرین ۹ و ۱۰ صفحه ۴۴) آیا برای هر مجموعه A و B $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

و $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$ این دو تمرین با عنوان تمرین ۱۹ در صفحه ۱۵ هم تکرار شده است

حل: با مثال نقض نشان می‌دهیم که $P(A\cup B)\neq P(A)\cup P(B)$

$A=\{1\},\ B=\{2\}$

$P(A)=\{\phi,\{1\}\},\ P(B)=\{\phi,\{2\}\}\Rightarrow P(A)\cup P(B)=\{\phi,\{1\},\{2\}\}$ ①

$A\cup B=\{1,2\}\Rightarrow P(A\cup B)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ ②

ولی $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$ $\quad$ ①,② $\Rightarrow P(A\cup B)\neq P(A)\cup P(B)$

اثبات $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$؟

$\forall X\in P(A\cap B)\Leftrightarrow X\subseteq A\cap B\Leftrightarrow X\subseteq A\wedge X\subseteq B\Leftrightarrow X\in P(A)\wedge X\in P(B)$

$\Leftrightarrow X\in P(A)\cap P(B)$

بخش ۳ اجتماع و اشتراک

تعریف (اجتماع دو مجموعه) اجتماع دو مجموعه A و B را با $A\cup B$ نمایش می‌دهیم و $A\cup B$ مجموعه تمام عضوهایی است که حداقل به یکی از دو مجموعه A و B متعلق اند. با عبارت دیگر $x\in(A\cup B)$ یعنی $x\in A\vee x\in B$ و برعکس

از نظر منطقی $x\in(A\cup B)\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)$ یا $x\in(A\cup B)\equiv(x\in A\vee x\in B)$

تعریف (اشتراک دو مجموعه) اشتراک دو مجموعه A و B را با $A\cap B$ نمایش می‌دهیم و $A\cap B$ مجموعه تمام عضوهایی است که هم متعلق به A و هم متعلق به B است. با عبارت منطقی $x\in(A\cap B)\equiv(x\in A\wedge x\in B)$

اگر $A\cap B=\phi$ دو مجموعه A و B را مجزا می‌گویند.

توجه: $A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$ و $A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$

مثال ۱: اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{3,4,5\}$ آنگاه $A\cap B=\{3,4\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$

مثال ۲: طبق قرارداد بخش قبل $I\cap Z=\{0,1\}$ و $N\cap I=\{1\}$ و $Z\cup Q=Q$ و $Z\cap Q=Z$

$I\cup I=I$ و $I\cap I=I$ و $I\cap\mathbb{R}=I$ و $I\cap\mathbb{R}_+=(0,1]$ و $I\cup\mathbb{R}=\mathbb{R}$

دیدیم که $I=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}=[0,1]$

قضیه ۴: اگر X یک مجموعه و A و B و C زیرمجموعه‌هایی از X باشند آنگاه داریم:

الف) یکه‌ها $A\cup\phi=A$ و $A\cap\phi=\phi$

ب) قوانین خودتوانی $A\cup A=A$ و $A\cap A=A$

ج) قوانین جابجایی $A\cup B = B\cup A$ ، $A\cap B = B\cap A$

د) قوانین شرکت‌پذیری $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ ، $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

هـ) قوانین توزیع‌پذیری (پخش‌پذیری)

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

اثبات: همه قسمت‌های الف تا هـ با عضوگیری ثابت می‌شود (الف و ب و ج به عنوان تمرین)

اثبات (هـ)

$$\forall x\in[A\cup(B\cap C)] \overset{\text{تعریف}}{\underset{\text{اجتماع}}{\equiv}} x\in A \vee x\in B\cap C \overset{\text{تعریف}}{\underset{\text{اشتراک}}{\equiv}} x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C) \overset{\text{توزیع‌پذیری}}{\underset{\text{گزاره‌ها}}{\equiv}}$$
$$\equiv(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C) \overset{\text{تعریف}}{\underset{\text{اجتماع}}{\equiv}} x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C) \overset{\text{تعریف}}{\underset{\text{اشتراک}}{\equiv}} x\in[(A\cup B)\cap(A\cup C)]$$

پس $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ قسمت $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ بطور مشابه است

اثبات (د)

$$x\in[A\cap(B\cap C)] \equiv x\in A\wedge x\in(B\cap C) \equiv x\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C)$$
$$\equiv (x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C \equiv x\in(A\cap B)\wedge x\in C \equiv x\in[(A\cap B)\cap C]$$

همه از تعریف اشتراک و شرکت‌پذیری در گزاره‌ها کمک گرفتیم

قسمت دیگر (د) یعنی $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ بطریق مشابه است

مثال ۳ (تمرین ۱۲ صفحه ۴۷) : درستی و یا نادرستی دو عبارت زیر را تحقیق کنید.

الف) اگر $A\cup C = A\cup B$ آنگاه $B = C$ یعنی قانون حذف در اجتماع

ب) اگر $A\cap B = A\cap C$ آنگاه $B = C$ یعنی قانون حذف در اشتراک

جواب: هر دو نادرست است با مثال نقض نشان می‌دهیم

الف) $A = \{1,2\}$ و $B = \{1\}$ و $C = \{2\}$ در این صورت $A\cup C = A\cup B = \{1,2\}$ ولی $\{1\} = B \neq C = \{2\}$.

ب) $A = \{a\}$ و $B = \{a,b\}$ و $C = \{a,d\}$ در این صورت $A\cap B = A\cap C = \{a\}$

ولی $\{a,b\} = B \neq C = \{a,d\}$

مثال ۴ (تمرین ۸ صفحه ۴۷) ثابت کنید که اگر $A\subseteq B$ آنگاه $P(A)\subseteq P(B)$.

اثبات:

$$\forall X\in P(A) \overset{\text{تعریف}}{\Longrightarrow} X\subseteq A \xrightarrow[\text{فرض}]{A\subseteq B} X\subseteq B \overset{\text{تعریف}}{\Longrightarrow} X\in P(B)$$

بنابراین $P(A)\subseteq P(B)$

بخش ۴: مجموعه‌های متمم (تفاضل دو مجموعه)

تعریف (متمم) اگر A و B دو مجموعه باشند متمم B نسبت به A را با $A-B$ نمایش می‌دهیم. $A-B$ یک مجموعه است که به صورت $A-B=\{x\in A \mid x\notin B\}$ تعریف می‌شود.

به عبارت منطقی $x\in(A-B)\equiv x\in A\wedge x\notin B$

مثال ۱: اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{c,d,e,f\}$ آنگاه $A-B$ و $B-A$ را بیابید.

حل: $A-B=\{a,b\}$ و $B-A=\{e,f\}$

در مثال قبل $A-(A\cap B)$ و $B-(A\cap B)$ را بدست آورید و یک نتیجه بگیرید.

$A\cap B=\{c,d\}\Rightarrow A-(A\cap B)=\{a,b\}$ و $B-(A\cap B)=\{e,f\}=B-A$

نتیجه: برای محاسبه $A-B$ کافی است که اعضای $A\cap B$ را از مجموعه A حذف کنیم و برای محاسبه $B-A$ کافی است که اعضای $A\cap B$ را از B حذف کنیم.

مثال ۲: اگر $A=\{1,2,3,5\}$ و $B=\{2,5,4,6\}$ آنگاه $A-B$ و $B-A$ را بیابید.

حل: $A\cap B=\{2,5\}$ پس $A-B=\{1,3\}$ و $B-A=\{4,6\}$

قرارداد: تمام مجموعه‌هایی که از این به بعد در این درس آورده می‌شود زیر مجموعه‌هایی از مجموعه ثابت U در نظر گرفته و U را مجموعه مرجع یا جهانی می‌نامیم. (در بخش ۷ ثابت می‌کنیم که مجموعه جهانی (یعنی مجموعه همه مجموعه‌ها) وجود ندارد.)

مثال ۳: نشان دهید که اگر $A, B\subseteq U$ آنگاه $\boxed{A-B=A\cap B'}$ که در آن $B'=U-A$ است و B' را متمم مجموعه B نسبت به مجموعه مرجع U می‌نامیم.

نکته: از $A-B=A\cap B'$ در اثبات‌ها استفاده می‌کنیم.

حل: با عضوگیری ثابت می‌کنیم

$$x\in(A\cap B')\overset{\text{تعریف اشتراک}}{\equiv} x\in A\wedge x\in B'\overset{\text{تعریف } B'}{\equiv} x\in A\wedge(x\in U-B)\overset{\text{تعریف}}{\equiv} x\in A\wedge(x\in U\wedge x\notin B)$$

$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{\equiv}(x\in A\wedge x\in U)\wedge x\notin B\overset{\text{تعریف اشتراک}}{\equiv} x\in(A\cap U)\wedge x\notin B\equiv x\in A\wedge x\notin B\equiv x\in(A-B)$$

قضیه ۵) فرض کنید که A و B دو زیرمجموعه U باشند (U مجموعه مرجع) آنگاه

الف) $(A')'=A$ ب) $U'=\phi$ و $\phi'=U$

ج) $A\cap A'=\phi$ و $A\cup A'=U$

د) $A\subseteq B\iff B'\subseteq A'$

اثبات: الف) $x\in(A')'\equiv x\in(U-A')\equiv x\in U\wedge x\notin A'\equiv x\in U\wedge x\in A\equiv$

$x\in(U\cap A)\equiv x\in A$ می‌دانیم که $U\cap A=A$

ب) $U'=U-U=\phi$ و $\phi'=U-\phi=U$

ج) بدیهی است که A و A' دو مجموعه مجزا هستند پس $A\cap A'=\phi$، طبق نکته گذشته، در مثال ۳ هم می‌توان نشان داد که $A\cap A'=\phi$

$$A\cap A' = A - A = \phi$$

زیرا $A\subseteq U$:

$$A\cup A' = A\cup(U-A) = U$$

یا:

$$A\cup A' = A\cup(U-A) = A\cup(U\cap A') \overset{A\subseteq U}{=} A\cup U \underset{A\subseteq U}{=} U$$

د)

$$A\subseteq B \equiv [x\in A \longrightarrow x\in B] \underset{\text{عکس نقیض}}{\overset{\text{قانون}}{\equiv}} [x\notin B \longrightarrow x\notin A] \overset{\text{تعریف}}{\equiv} [x\in B' \longrightarrow x\in A'] \equiv B'\subseteq A'$$

پس: $A\subseteq B \Leftrightarrow B'\subseteq A'$

قضیه ۶: (قوانین دمورگان) اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند آنگاه:

الف) $(A\cup B)' = B'\cap A'$ ب) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

اثبات الف)

$$x\in(A\cup B)' \overset{\text{ت}}{\equiv} \sim(x\in A\cup B) \underset{\text{اجتماع}}{\overset{\text{ت}}{\equiv}} \sim(x\in A\vee x\in B) \underset{\text{منطق}}{\overset{\text{دمورگان در}}{\equiv}} [\sim(x\in A)\wedge\sim(x\in B)] \overset{\text{ت}}{\equiv} [x\notin A\wedge x\notin B] \overset{\text{ت}}{\equiv} x\in A'\wedge x\in B' \underset{\text{ت}}{\equiv} x\in(A'\cap B')$$

$$x\in(A\cap B)' \overset{\text{ت}}{\equiv} \sim(x\in A\cap B) \underset{\text{اشتراک}}{\overset{\text{ت}}{\equiv}} \sim(x\in A\wedge x\in B) \underset{\text{منطق}}{\overset{\text{دمورگان در}}{\equiv}} [\sim(x\in A)\vee\sim(x\in B)] \overset{\text{ت}}{\equiv} [x\notin A\vee x\notin B] \overset{\text{ت}}{\equiv} x\in A'\vee x\in B' \underset{\text{ت}}{\equiv} x\in(A'\cup B')$$

مثال ۴: سه مجموعه A و B و C مفروض هستند. تعیین کنید که آیا مجموعه $A\cap(B-C)$ با مجموعه $(A\cap B)-(A\cap C)$ مساوی هستند.

حل:

$$(A\cap B)-(A\cap C) \overset{\text{نکته مثال ۳}}{=} (A\cap B)\cap(A\cap C)' \overset{\text{دمورگان}}{=} (A\cap B)\cap(A'\cup C') \underset{\text{پذیری}}{\overset{\text{توزیع}}{=}}$$

$$[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C'] \underset{\text{وجابجایی}}{\overset{\text{شرکت پذیری}}{=}} [(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]$$

$$\overset{A\cap A'=\phi}{=} [\underbrace{\phi\cap B}_{\phi}]\cup[A\cap(B\cap C')] \underset{\text{قضیه ۵}}{=} A\cap(B\cap C') \underset{\text{در مثال ۳}}{\overset{\text{نکته}}{=}} A\cap(B-C)$$

پس $A\cap(B-C) = (A\cap B)-(A\cap C)$

مثال ۵ (تمرین ۵ صفحه ۵۰) ثابت کنید برای هر دو مجموعه A و B: $A'-B' = B-A$

اثبات:

$$A'-B' \underset{\text{در مثال ۳}}{\overset{\text{نکته}}{=}} A'\cap(B')' \underset{\text{قضیه ۵}}{=} A'\cap B \overset{\text{جابجایی}}{=} B\cap A' \underset{\text{در مثال ۳}}{\overset{\text{نکته}}{=}} B-A$$

مثال ۶ (تمرین ۱۲ صفحه ۵۰) ثابت کنید که $(A\cup B) = (A'\cap B')'$ و $A\cap B = (A'\cup B')'$

اثبات ج با قوانین دمورگان

$(A'\cap B')' \overset{\text{دمورگان}}{=} (A')' \cup (B')' \overset{\text{قضیه ۵}}{=} A\cup B$

$(A'\cup B')' \overset{\text{دمورگان}}{=} (A')' \cap (B')' \overset{\text{قضیه ۵}}{=} A\cap B$

مثال ۷ (تمرین ۱۶ صفحه ۵۱) اگر A و B دو مجموعه باشند ثابت کنید که $(A=B) \Leftrightarrow A\cap B' = \phi = A'\cap B$

حل:

$$\left.\begin{array}{l}(A=B) \equiv (A-B=\phi) \equiv A\cap B' = \phi \\ (A=B) \equiv (B-A=\phi) \equiv B\cap A' = \phi\end{array}\right\} \Rightarrow (A=B) \Leftrightarrow A\cap B' = \phi = B\cap A'$$

مثال ۸ (تمرین ۱۷ صفحه ۵۱) اگر A و B زیرمجموعه های از مجموعه X باشند، درستی یا نادرستی رابطه زیر را تحقیق کنید

$(X-A)\cap(X-B) = X-(A\cap B)$

حل: رابطه نادرست است مثال نقض

$X=\{1,2,3\}$ و $A=\{1\}$ و $B=\{2\}$

$X-A=\{2,3\}$ و $X-B=\{1,3\} \Rightarrow (X-A)\cap(X-B)=\{3\}$ (۱)

$A\cap B=\phi \Rightarrow X-(A\cap B) = X-\phi = X = \{1,2,3\}$ (۲)

(۱) و (۲) $\Longrightarrow (X-A)\cap(X-B) \neq X-A\cap B$

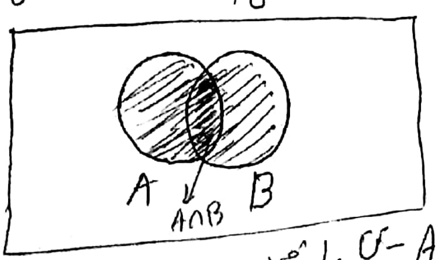
مثال ۹ (تمرین ۱۴ صفحه ۵۰) مجموعه های A و B چه شرطی باید داشته باشند تا $A-B=B-A$ برقرار باشد

جواب باید $A=B$ در این صورت $A-B=\phi=B-A$.

بخش ۵ نمودار ون (Venn diagram)

برای اینکه اعمال روی مجموعه ها را مشاهده کنیم (درستی و یا نادرستی آن را با چشم ببینیم) به معرفی نمودارهای که به نمودار ون معروف هستند می پردازیم. در این نمودارها مجموعه U (مجموعه مرجع یا جهانی) را با مستطیل و زیرمجموعه های U را با دایره ای در داخل مستطیل نشان می دهیم. برای نمونه

U شکل ۱

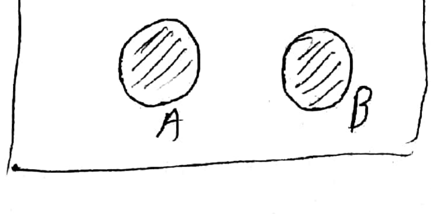


نمونه ۱. در شکل ۱، $A\cap B$ و $A\cup B$ دیده می شود

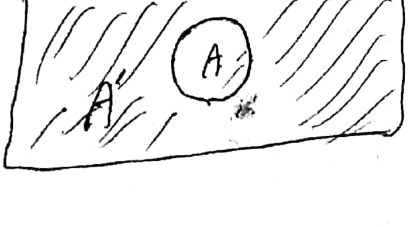
$A\cap B$ با رنگ قرمز (مشترک) و $A\cup B$ با رنگ آبی هاشور خورده است

نمونه ۲: در شکل ۲ مجزا بودن A و B را نشان می دهد و در شکل ۳ $U-A=A'$ را نشان می دهد

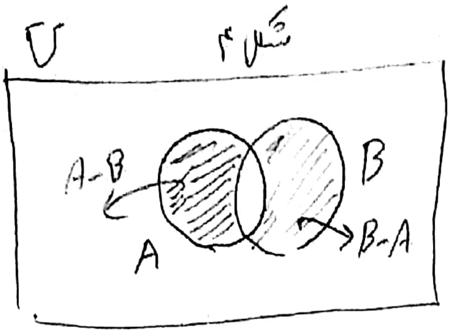
U شکل ۲

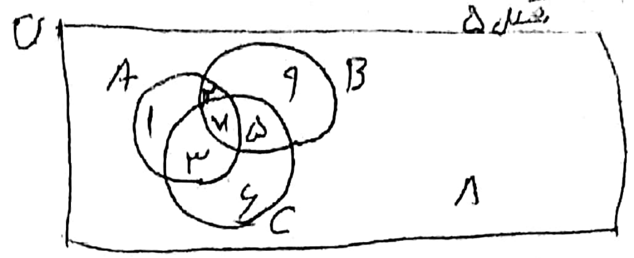


U شکل ۳



نمونه ۳: در شکل ۴ مجموعه $A-B$ را نشان می‌دهد و در شکل ۵ توجیه درستی قانون توزیع پذیری اشتراک روی اجتماع را نشان می‌دهد یعنی $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

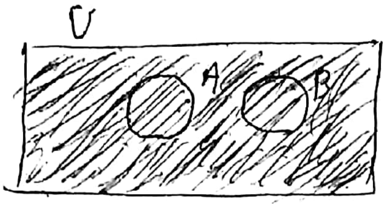


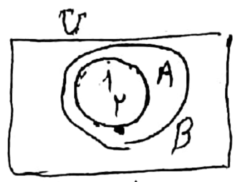


$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ و $A=\{1,2,3,7\}$ و $B=\{2,5,7,9\}$ و $C=\{3,5,6,7\}$

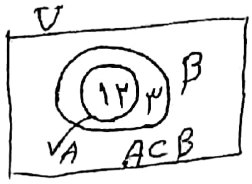
مثال: نمودارهای ون برای نمایش $A\subset B$ و $A\subseteq B$ و $A'\cup B'$ رسم کنید.

حل:





$A\subseteq B$



$A\subset B$

چون $A\cap B=\phi$ پس $A'\cup B'=U$

$A'=$ رنگ قرمز

$B'=$ رنگ آبی

توجه: از نمودار ون برای تدریس اعمال روی مجموعه‌ها در دبیرستان استفاده می‌شود، اگر چندین عملیات روی مجموعه‌ها صورت گیرد آنگاه نمودار ون پیچیده می‌شود و باعث سردرگمی دانش آموز می‌شود

در این درس کمتر از نمودار ون استفاده می‌شود.

بخش ۶ خانواده‌های مجموعه‌های اندیس دار

تعریف: یک خانواده دسته‌ای از اشیاء است که ممکن است اعضای آن از یکدیگر متمایز نباشند و هر یک از این اشیاء عضو خانواده نامیده می‌شود برای نمونه $\{a,a,b\}$ یک خانواده است چون عضو a دو بار تکرار شده است.

اگر به این خانواده به عنوان یک مجموعه نگاه کنیم باید عضو تکراری را یک بار بنویسیم یعنی مجموعه $\{a,b\}$. بنابراین هر مجموعه یک خانواده است ولی لزوماً هر خانواده یک مجموعه نیست (مگر عضو تکراری یک بار نوشته شود)

خانواده $\{a,a,a\}$ اگر به عنوان یک مجموعه به آن نگاه کنیم به مجموعه $\{a\}$ تبدیل می‌شود یعنی مجموعه تک عضوی.

مثال ۱: اگر در یک کلاس درس نام و نام خانوادگی سه دانشجو مثل هم باشد (یعنی سه نفر متفاوت) درست است که با یک مجموعه از دانشجویان سروکار داریم ولی برای تشخیص این سه دانشجو با مشکل مواجه هستیم و برای رفع مشکل کلاس را به عنوان یک خانواده در نظر می‌گیریم و برای تشخیص این سه دانشجو به آنها شماره (یا شماره دانشجویی) ۱ و ۲ و ۳ نسبت می‌دهیم. یعنی اعضای خانواده (در اینجا مجموعه) را شماره گذاری (یا در اصطلاح) اندیس گذاری می‌کنیم.

مثال ۲: در خانواده $\{a, b, a, b, a\}$ می‌توان $a = d_1$ و $b = d_2$ و $a = d_3$ و $b = d_4$ و $a = d_5$ را در نظر گرفت در این صورت با خانواده (مجموعه در اینجا) $\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$ سروکار داریم.

تعریف (خانوادهٔ مجموعه‌های اندیس‌دار) فرض کنید که Γ (می‌خوانیم گاما) یک مجموعه (مجموعه اندیس) باشد و با هر عضو γ از Γ یک مجموعه A_γ متناظر باشد در این صورت خانواده تمام مجموعه‌های نظیر A_γ را خانوادهٔ مجموعه‌های اندیس‌دار می‌نامیم و با $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ نمایش می‌دهیم که در آن Γ مجموعه اندیس است.

معمولاً خانواده‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی خطی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ و $\mathcal{E}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳ خانوادهٔ مجموعه‌های $\{1,2\}$ و $\{2,4\}$ و $\{3,6\}$ و ... را می‌توان به صورت زیر اندیس‌دار کرد.
مجموعه اندیس را مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ در نظر می‌گیریم و بنابراین $\mathcal{A} = \{\{n,2n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ خانواده اندیس‌دار شده $\{1,2\},\{2,4\},\{3,6\},\dots$ است یعنی $A_1=\{1,2\}$ و $A_2=\{2,4\}$ و $A_3=\{3,6\}$ و ....
بنابراین این خانواده را می‌توان به صورت $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ در نظر گرفت که $A_n = \{n, 2n\}$ است.

مثال ۴ خانواده $\mathcal{B} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{P}, \mathbb{N}\}$ را اندیس‌دار کنید.

حل: مجموعه $I = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ را به عنوان مجموعه اندیس در نظر می‌گیریم و

$$B_1=\emptyset,\ B_2=\mathbb{N},\ B_3=\mathbb{Z},\ B_4=\mathbb{Q},\ B_5=\mathbb{P},\ B_6=\mathbb{R},\ B_7=\mathbb{N}$$

در این صورت این خانواده $\mathcal{B}=\{A_i \mid i\in I\}$ است که اندیس‌دار شده است.

مثال ۵ اگر $A_n = (0, n)$ بازه باز باشد در این صورت $\mathcal{A} = \{(0,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ یا $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ که $A_n = (0,n)$ است یک خانواده اندیس‌دار است.

اکنون همانند مجموعه‌ها اجتماع و اشتراک خانواده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف (اجتماع خانواده) فرض کنید که $\mathcal{A}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌ها باشد اجتماع مجموعه‌های خانواده $\mathcal{A}$ (اجتماع این خانواده) مجموعه تمام عنصرهایی است که به یکی از مجموعه‌های خانواده $\mathcal{A}$ مثلاً A تعلق دارد. این اجتماع را با نماد $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ نمایش می‌دهیم

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x\in U \mid \exists A\in\mathcal{A}\ \ x\in A\}$$

اگر خانواده $\mathcal{A}$ با Γ به صورت $\mathcal{A} = \{A_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$ اندیس‌دار شده باشد آنگاه

$$\bigcup\mathcal{A} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x\in U \mid \exists\gamma\in\Gamma : x\in A_\gamma\}$$

و از نظر منطق یعنی $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \equiv \exists\gamma\in\Gamma\cdot x\in A_\gamma$) ($x\in\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \equiv \exists A\in\mathcal{A}\cdot x\in A$

تعریف (اشتراک خانواده) فرض کنید که $\mathcal{A}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌ها باشد اشتراک مجموعه‌های خانواده $\mathcal{A}$ (اشتراک این خانواده) مجموعه تمام عنصرهایی است که به تمام مجموعه‌های $\mathcal{A}$ تعلق دارد. این اشتراک را با نماد $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ یا $\bigcap\mathcal{A}$ نمایش می‌دهیم و بنابراین

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x\in U \mid \forall A\in\mathcal{A}\cdot x\in A\}$$

و اگر $\mathcal{A}=\{A_\gamma \mid \gamma\in M\}$ آنگاه $\bigcap \mathcal{A}=\bigcap_{\gamma\in M} A_\gamma=\{x\in U \mid \forall\gamma\in M,\ x\in A_\gamma\}$

توجه: اگر مجموعه اندیس متناهی باشد یعنی $M=\{1,2,3,\dots,n\}$ آنگاه

$$\bigcup_{\gamma\in M}A_\gamma=\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n \quad \text{و} \quad \bigcap_{\gamma\in M}A_\gamma=\bigcap_{i=1}^{n} A_i=A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n$$

مثال ۶. فرض کنید که $\mathcal{A}=\{\{1\},\{2,3\},\{3,4,5\},\dots,\{n,n+1,\dots,2n-1\}\}$ باشد آنگاه

الف) این خانواده را اندیس‌دار کنید.

ب) اجتماع و اشتراک این خانواده را بیابید.

حل الف) $M=\{1,2,3,\dots,n\}$ مجموعه اندیس در نظر گرفته و $A_i=\{i,i+1,\dots,2i-1\}$

بنابراین $\mathcal{A}=\{A_i \mid i\in M\}$

ب) $\bigcup\mathcal{A}=\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n=\{1,2,3,\dots,2n-1\}$

$\bigcap\mathcal{A}=\bigcap_{i=1}^{n} A_i=A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n=\phi$

مثال ۷. اگر $A_n=[0,n]$ و $\mathbb{N}$ مجموعه اندیس باشد و $\mathcal{A}=\{A_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ در این صورت $\bigcap\mathcal{A}$ و $\bigcup\mathcal{A}$ را حساب کنید.

حل:

$\bigcup\mathcal{A}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=[0,1]\cup[0,2]\cup\dots\cup[0,n]\cup\dots=[0,+\infty)$

تمرین ۲ صفحه ۶۰

$\bigcap\mathcal{A}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n=[0,1]\cap[0,2]\cap\dots\cap[0,n]\cap\dots=[0,1]$

مثال ۸ اگر $A_n=[0,\frac{1}{n}]$ و $\mathbb{N}$ مجموعه اندیس باشد و $\mathcal{A}=\{A_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ آنگاه $\bigcup\mathcal{A}$ و $\bigcap\mathcal{A}$ را حساب کنید.

حل:

$\bigcup\mathcal{A}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=[0,1]\cup[0,\frac{1}{2}]\cup\dots\cup[0,\frac{1}{n}]\cup\dots=[0,1]$

$\bigcap\mathcal{A}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n=[0,1]\cap[0,\frac{1}{2}]\cap\dots\cap[0,\frac{1}{n}]\cap\dots=\{0\}$

قضیه ۷: فرض کنید که $\{A_\gamma\mid\gamma\in M\}$ خانواده تهی از مجموعه‌ها است (یعنی مجموعه اندیس $M=\phi$)

آنگاه الف) $\bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma=\phi$ ب) $\bigcap_{\gamma\in\phi}A_\gamma=U$

اثبات الف) برای اثبات $\bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma=\phi$ هم ارز آن «برای هر $x\in U$ نشان می‌دهیم که $x\notin\bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma$» ثابت می‌کنیم

$$x\notin\bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma \equiv \sim\Big(x\in\bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma\Big) \overset{\text{تعریف}}{\underset{\text{اجتماع}}{\equiv}} \sim(\exists\gamma\in\phi : x\in A_\gamma) \equiv^{*}$$

$$\equiv(\exists\gamma\in\phi : x\notin A_\gamma)\equiv(\forall\gamma\in\phi\longrightarrow x\notin A_\gamma)$$

بدیهی است که $(\forall\gamma\in\phi\longrightarrow x\notin A_\gamma)$ یک گزاره شرطی همیشه درست است (زیرا مقدم نادرست است)

ادامه در صفحه بعد

⊛ در نقیض سورها دقت کنید که چون برای γ مجموعه مرجع $\mathcal{M}=\phi$ است پس نقیض $\forall\gamma\in\phi$ ؛ $\exists\gamma\in\phi$ تبدیل می‌شود ولی اگر $\phi=\mathcal{M}$ مجموعه مرجع برای γ نبود پس نقیض با علامت $\notin$ $\forall\gamma\notin\phi$.

اثبات (ب) ثابت می‌کنیم $\forall x\in U : x\in \bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma$

$$x\in \bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma \equiv (\forall\gamma\in\phi : x\in A_\gamma) \equiv (\gamma\in\phi \longrightarrow x\in A_\gamma)$$ گزاره شرطی همیشه درست

پس $U\subseteq \bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma$ و چون اعضا $\bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma \subseteq U$ پس $\bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma = U$

توضیح: قرار گرفتن صورت قضیه قبل در ذهن یادگیری این قضیه خیلی آسان نیست ولی طبق اثباتی که برای آن آمد واژ گزاره شرطی که مقدمش نادرست باشد نتیجه می‌شود که گزاره شرطی درست است کمک گرفتیم.

انتظار این است که اجتماع خانواده مجموعه‌ای بزرگ (از نظر اعضا) باشد و اشتراک خانواده مجموعه‌ای کوچک بشود ولی برعکس انتظار پیش آمده است یعنی چون $\bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma = \phi$ (اجتماع خانواده شده برابر با مجموعه ϕ) و مجموعه مرجع $\bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma = U$. واین بخاطر این است که $\phi=\mathcal{M}$ مجموعه اندیس خالی است.

قضیه ۸ (قوانین دمورگان برای خانواده‌ها) فرض کنید که $\{A_\gamma \mid \gamma\in\mathcal{M}\}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌ها است آنگاه الف) $\left(\bigcup_{\gamma\in\mathcal{M}} A_\gamma\right)' = \bigcap_{\gamma\in\mathcal{M}} A'_\gamma$ ب) $\left(\bigcap_{\gamma\in\mathcal{M}} A_\gamma\right)' = \bigcup_{\gamma\in\mathcal{M}} A'_\gamma$

این قضیه تعمیم قوانین دمورگان برای خانواده‌هاست:

اثبات الف)

$$x\in\left(\bigcup_{\gamma\in\mathcal{M}} A_\gamma\right)' \equiv \sim\left(x\in \bigcup_{\gamma\in\mathcal{M}} A_\gamma\right) \equiv \sim(\exists\gamma\in\mathcal{M} ; x\in A_\gamma) \equiv$$

$$\overset{⊛}{\equiv} \forall\gamma\in\mathcal{M} ; x\notin A_\gamma \equiv \forall\gamma\in\mathcal{M} ; x\in A'_\gamma \underset{\text{اشتراک خانواده}}{\overset{\text{تعریف}}{\equiv}} x\in \bigcap_{\gamma\in\mathcal{M}} A'_\gamma$$

⊛ در بالای صفحه توضیح داده‌ام که $\mathcal{M}$ مجموعه مرجع برای γ است

اثبات ب)

$$x\in\left(\bigcap_{\gamma\in\mathcal{M}} A_\gamma\right)' \equiv \sim\left(x\in \bigcap_{\gamma\in\mathcal{M}} A_\gamma\right) \equiv \sim(\forall\gamma\in\mathcal{M} ; x\in A_\gamma) \equiv$$

$$\overset{⊛}{\equiv} \exists\gamma\in\mathcal{M} ; x\notin A_\gamma \equiv \exists\gamma\in\mathcal{M} ; x\in A'_\gamma \equiv x\in \bigcup_{\gamma\in\mathcal{M}} A'_\gamma$$

مثال ۹ (تمرین ۴ صفحه ۷۰ قسمت ج) با توجه به مثال ۸ $\bigcap_{n=1}^{99} A_n$ را بیابید $A_n = [0, \frac{1}{n}]$

ادامه صفحه بعد

حل: $\bigcap_{n=1}^{99} A_n = [0,1]\cap[0,\frac{1}{2}]\cap\cdots\cap[0,\frac{1}{99}] = [0,\frac{1}{99}]$

مثال ۱۰ (تمرین ۳ صفحه ۶۰) اگر برای هر n در N، $A_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ آنگاه مجموعه‌های زیر را حساب کنید

الف) $\bigcup_{n\in N} A_n$ ب) $\bigcap_{n\in N} A_n$

حل:
$$\bigcup_{n\in N} A_n = (-1,1)\cup(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cup\cdots\cup(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\cup\cdots = (-1,1)$$

$$\bigcap_{n\in N} A_n = (-1,1)\cap(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cap\cdots\cap(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\cap\cdots = \{0\}$$

مثال ۱۱ (تمرین ۴ صفحه ۶۰) مطلوب است محاسبه الف) $\bigcup_{K\in N}(K,K+1]$

ب) $\bigcup_{K\in N}(-K,-K+1]$ ج) $\bigcup_{K\in N}[K,K+1)$ د) $\bigcup_{K\in N}[-K,K)$

حل: الف)
$$\bigcup_{K\in N}(K,K+1] = (1,2]\cup(2,3]\cup(3,4]\cup\cdots = (1,+\infty)$$

ب)
$$\bigcup_{K\in N}(-K,-K+1] = (-1,0]\cup(-2,-1]\cup(-3,-2]\cup\cdots = (-\infty,0]$$

ج)
$$\bigcup_{K\in N}[K,K+1) = [1,2)\cup[2,3)\cup[3,4)\cup\cdots = [1,+\infty)$$

د)
$$\bigcup_{K\in N}[-K,K) = [-1,1)\cup[-2,2)\cup[-3,+3)\cup\cdots = (-\infty,+\infty)$$

مثال ۱۲: اگر $A_n=[-n,n]$ و $B=[-n,n)$ آنگاه $\bigcap_{n\in N} A_n$ و $\bigcap_{n\in N} B_n$ را حساب کنید.

حل:
$$\bigcap_{n\in N} A_n = [-1,1]\cap[-2,2]\cap[-3,3]\cap\cdots = [-1,1]$$

$$\bigcap_{n\in N} B_n = [-1,1)\cap[-2,2)\cap[-3,3)\cap\cdots = [-1,1)$$

تمرین: نشان دهید که اگر $A_n=(0,\frac{1}{n})$ آنگاه $\bigcap_{n\in N} A_n$ را بدست آورید.

جواب (مجموعه تهی) اثبات کنید.