به نام خدا

اعداد مختلط

توسعه وگسترش مجموعه اعداد به تدریج صورت گرفته وبا توجه به نیاز در محاسبا ت موجب بکار گیری اعداد منفی واصم (گنگ)گردید. این نیاز در حل معادلات درجه دوم ،باعث پیدایش و معرفی اعداد موهومی ومختلط شد.معادله $x^2 + 1 = 0$ فاقد ریشه حقیقی است زیرا

$x^2 = -1$ (عدد حقیقی منفی جذر ندارد).

حال اگر فرض کنیم $i = \sqrt{-1}$ و $i^2 = -1$ در این صورت معادله $x^2 + 1 = 0$ دارای دو ریشه x=i و x=-i خواهد بود وبه همین صورت معادله $x^2 + 4 = 0$ دارای ریشه x=2i و x=-2i است. و به طور کلی تمام معادلات درجه 2

(یعنی $a\,x^2 + bx + c = 0$)که در آن $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ دارای دو ریشه

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ خواهند بود.

تعریف : i را واحد موهومی واعداد i+ و i- و 2i و2i- را اعداد موهومی می نامیم. وبه طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد عددهای bi و bi- را اعداد موهومی می نامیم ومجموعه I مجموعه اعداد موهومی می باشد که در آن $I = \{bi \mid b \in \mathbb{R} \ , i = \sqrt{-1}\}$

وهر عدد به صورت a+bi که در آن a و b دو عدد حقیقی هستند راعدد مختلط می نامیم ومجموعه اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می دهیم و بنابر این

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

مثال 1:معادله $x^2 + x + 1 = 0$ را حل کنید .

حل: $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3} \rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{b} \pm \sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}} \rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{-1 \pm \sqrt{-3}}}{\boldsymbol{2}} \rightarrow$

$$\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{-1 - \sqrt{3}i}}{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{-1 + \sqrt{3}i}}{\boldsymbol{2}} \rightarrow \boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{i}, \boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{i}$$

مثال 2: معادله $x^3 + 1 = 0$ را حل کنید.

حل :

$$x^3 + 1 = (x + 1)(\ x^2 - x + 1 = 0\ ) = 0 \Longrightarrow x + 1 = 0\ ,$$
$$x^2 - x + 1 = 0 \ \Longrightarrow$$

$$x = -1 \ \ , \boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{b} \pm \sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{1 \pm \sqrt{-3}}}{\boldsymbol{2}} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{1 - \sqrt{3}i}}{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{1 + \sqrt{3}i}}{\boldsymbol{2}} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{i}, \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{i}$$

,

تبصره : مجموعه اعداد حقیقی زیر مجموعه اعدادمختلط است یعنی $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ زیرا

$$\forall a \in \mathbb{R} \to a = (a + 0i) \in \mathbb{C}$$

تبصره : عدد مختلط z=a+bi از دو قسمت تشکیل شده است قسمت حقیقی وقسمت موهومی قسمت حقیقی را با a=R(z) وقسمت موهومی را با b=Im(z) نمایش می دهیم.

اعمال روی اعداد مختلط

تعریف :دو عدد مختلط z=a+bi و w=x+yiرا مساوی (برابر)نامیم هر گاه a=x و b=y یعنی قسمت حقیقی باهم برابر باشندو قسمت موهومی باهم برابر باشند.

تعریف (جمع وتفریق دو عدد مختلط) : اگر z=a+bi و w=x+yi آنگاه

Z+w=(a+x)+(b+y)i , z-w=(a-x)+(b-y)i

ضرب دو عدد مختلط : قبل از تعریف ضرب دو عدد مختلط توانهای i رابررسی می کنیم .

$$i^1 = \sqrt{-1} \ , i^2 = -1 \ , i^3 = -i \ , i^4 = 1 \ , i^5 = i \ , i^6 = -i \ , \ldots.$$

بنالراین اگر nعدد طبیعی و k غدد صحیح باشد آنگاه داریم.

$$\boldsymbol{i^n} = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{n=4k} \\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{n=4k+1} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{n=4k+2} \\ \boldsymbol{-i} & \boldsymbol{n=4k+3} \end{cases}$$

مثال3:مطلوب است محاسبه i^{75} و i^{62}

حل :چون $62 = 4 \times 15 + 2$, $75 = 4 \times 18 + 3$ پس طبق توانهای i داریم

$$i^{75} = i^{72}i^3 = 1 \times i^3 = -i \quad , \quad i^{62} = i^{60}i^2 = 1 \times i^2 = -1$$

تعریف (ضرب دو عدد مختلط): ضرب دو عدد مختلط z=a+bi و w=x+yi به صورت زیر تعریف می شود. Z.w=(a+bi).(x+yi)= (ax-by)+ (ay+bx)i

ضرب دو عدد مختلط همانند ضرب دو عبارت جبری است. زیرا

(a+bi).(x+yi)=ax+iay+ibx+by$i^2 = ax + iay + ibx - by = (ax - by) + i(ay + bx)$

مثال4: اگر z=2+i و w=-1+3i آنگاه z.w , z+w ,z-w راحساب کنید.

حل : z+w=1+4i ,z-w=3-2i ,z.w=(-2-3)+(6-1)i=-5+5i

مثال5: اگر $z=\frac{1}{2}+i\frac{3}{2}$ و w=1-i آنگاه z+w ,z-w , z.w راحساب کنید.

حل :

$$z+w=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i \quad ,z-w=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i \ ,z.w=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}\right)i=2+i$$

مثال6 : اگر z=1+i آنگاه z^2 و z^4 راحساب کنید.

حل : $z^2=(1+i)(1+i)=(1-1)+(1+1)i=2i$

$$z^4=(\,z^2\,)^2=(2i)^2=4i^2=-4$$

تعریف (مزدوج اعداد مختلط) اگر z= a+bi یک عدد مختلط باشد مزدوج آن را با $\bar{z}$ نمایش می دهیم و

$\bar{z}=a-ib$.مزدوج اعداد مختلط همانند مزدوج عبارت $a+b\sqrt{2}$ است

(یعنی $a-b\sqrt{2}$)به جای $\sqrt{2}$ در اعداد مختلط $i=\sqrt{-1}$قرار گرفته است.

مثال 7 :مزدوج اعداد z=2+3i و w=4+i و $v=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\,i$ را بیابید.

حل: $z=2+3i \to \bar{z}=2-3i \quad ,\ w=4+i \ \to \bar{w}=4-i$

$$v=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\,i \to \bar{v}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,i$$

توجه :اگرz=a+ib آنگاه $z\bar{z}=(a+ib\ )\ (a-ib\ \ )=a^2+b^2$ یعنی حاصل $z\bar{z}$ یک عدد حقیقی است.

مثال 8 : اگر z=1+i آنگاه $\bar{z}\ ,z\bar{z}\ ,z^3\ ,\bar{z}^3\ ,\overline{z^3}$ را بیابید.

حل :, $\bar{z}=1-i \ \ ,z\bar{z}=1^2+1^2=2 \ \ ,z^3=z^2z=(2i)z=-2+2i$

$$\bar{z}^3=(\bar{z})^2\bar{z}=(-2i)\bar{z}=-2-2i \ \ ,\overline{z^3}=-2-2i \Longrightarrow \bar{z}^3=\overline{z^3}$$

مثال 9:عبارتهای $x^2+25\ ,x^2+4\ ,x^2+y^2$ را تجزیه کنید.

حل :

$$x^2+y^2=x^2-(-1)(y)^2=x^2-i^2y^2=x^x-(iy)^2$$
$$=(x-iy\,)(x+iy\ \,)$$

$$x^2+4=(x-2i)(x+2i) \quad ,x^2+25=(x-5i)(x+5i)$$

تقسیم دو عدد مختلط : از گویا کردن عبارتهای کسری که درمخرج کسر عبارت رادیکالی مانند $a+b\sqrt{2}$ قرار گرفته کمک می گیریم وتقسیم دو عدد مختلط رابیان می کنیم.

فرض کنید که $z=a+ib\ ,z\neq 0$ در این صورت :

$$\boldsymbol{z^{-1}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{z}} = \frac{\bar{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{z\bar{z}}} = \frac{\boldsymbol{a-ib}}{\boldsymbol{a^2+b^2}} \rightarrow \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{z}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a^2+b^2}} - \boldsymbol{i}\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a^2+b^2}}$$

پس اگر w=c+id آنگاه

$$\frac{\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{z}} = \frac{\boldsymbol{w\bar{z}}}{\boldsymbol{z\bar{z}}} = \frac{\boldsymbol{(c+di)(a-bi)}}{\boldsymbol{a^2+b^2}} = \frac{\boldsymbol{(ac+bd)+(ad-bc)i}}{\boldsymbol{a^2+b^2}} = \frac{\boldsymbol{ac+bd}}{\boldsymbol{a^2+b^2}} + \frac{\boldsymbol{ad-bc}}{\boldsymbol{a^2+b^2}}\boldsymbol{i}$$

مثال10 : حاصل عبارت $z = \frac{1+i}{2+i}$ راساده کنید(به صورت یک عدد مختلط بنویسید)

حل : $z=\frac{1+i}{2+i} = \frac{1+i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{3+i}{4+1} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$

مثال 11 عبارتهای $w = \frac{1}{i}$, $z = \frac{3+i}{3-i}$ را ساده کنید.

حل: $z = \frac{3+i}{3-i} = \frac{3+i}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i} = \frac{8+6i}{9+1} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \quad , \ w = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i} = -i$

قدر مطلق(اندازه یا طول) عدد محتلط

اگر z=a+bi یک عدد مختلط باشد آنگاه قدر مطبق z را با |z|نمایش می دهیم و

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

توجه : $z\bar{z} = |z|^2 \rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

مثال 12 : اگر z=3+2iآنگاه $|z| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

تبصره :می توان عدد مختلط را به صورت زوج مرتب در نظر گرفت یعنی z=a+bi=(a,b)
در این صورت اگر z=a+bi=(a,b) و w=c+di=(c,d) آنگاه:

$$z = (a,b) = w = (c,d) \leftrightarrow a = c \ , b = d$$

Z+w=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) , z-w+(a-c,b-d) , z.w=(ac-bd,ad+bc)

بنابراین با در نظر گرفتن i=(1,0) آنگاه داریم $i^2 = (1,0)^2 = (-1,0) = -1$ و

0 =(0,0) بنابر این a+bi=a(1,0)+b(0,1)=(a,b)

تعبیر هندسی اعداد مختلط وصورت قطبی اعداد مختاط

اگر دردستکاه مختصات دکارتی x و y محور x رامحور حقیقی ومحورy رامحور موهومی(اعداد موهومی)در نظر به گیریم در این صورت هر نقطه (x,y) روی این صفحه نمایش یک عدد مختلط z=x+iy می باشد وبر عکس هر عددمختلط z=x+iy نمایش یک نقطه (x,y)در صفحه است.به این صفحه، صفحه اعداد مختلط می نامیم.

فرض کنید که نقطه M=x+iy در صفحه اعداد مختلط باشد.زاویه ای که OM باجهت مثبت محور x ها می سازد رابا θ نمایش می دهیم (و θ باتقریب $2k\pi$ مشخص می شود که در آن $k \in \mathbb{Z}$ ودلخواه است). زاویه θ را آرگومان عدد مختلط (Argument)یا شناسه یا آوند عدد

مختلط می نامیم و $\theta = argz$ بنابر این اگر z=x+iy آنگاه r=|z|= $\sqrt{x^2+y^2}$ و
$x=r\cos\theta$ و $y=rshn\,\theta$ و $tan\theta = \frac{y}{x}$ بنابر این **Z=r(cos $\boldsymbol{\theta + isin\theta}$)**

توجه :برای تعیین θ باید به علامت x و y توجه کرد یعنی نقطه (x,y) یاعدد مختلط z=x+iy در کدام ناحیه دستگاه مختصات قرار می گیرد تا مقدار صحیح θ به دست آید.

توجه :معادله Z=r(cos $\theta + isin\theta$) را صورت قطبی یا صورت مثلثاتی مختلط z می نامیم وآن را به صورت z=rcisθهم نوشته می شود که درآن حرف c علامت کسینوس و iواحدموهومی و s علامت سینوس است.

مثال 13 :ثابت کنید که $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ (این فرمول به فرمول اویلر معروف است)

اثبات :از سریهای توانی کمک می گیریم. می دانیم که :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , sinx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , cosx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \frac{(i\theta)^0}{0!} + \frac{(i\theta)^2}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^k}{k!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{(\theta)^2}{2!} + \frac{(\theta)^4}{4!} - \frac{(\theta)^6}{6!} + \cdots\right) \\ &+ i\left(\theta - \frac{(\theta)^3}{3!} + \frac{(\theta)^5}{5!} - \frac{(\theta)^7}{7!} + \cdots\right) = cos\theta + isin\theta \Longrightarrow e^{i\theta} \\ &= cos\theta + isin\theta \end{aligned}$$

زیرا $\sin\theta = \left(\theta - \frac{(\theta)^3}{3!} + \frac{(\theta)^5}{5!} - \frac{(\theta)^7}{7!} + \cdots\right)$ و

$$\cos\theta = \left(1 - \frac{(\theta)^2}{2!} + \frac{(\theta)^4}{4!} - \frac{(\theta)^6}{6!} + \cdots\right)$$

توجه :به کمک مثال 13(فرمول اویلر) می توان عدد مختاط z=x+iy رابه صورت

$z = |z|e^{(i\theta)}$نمایش داد زیرا $z = x + iy = |z|(cos\theta + isin\theta) = |z|e^{i\theta}$

همچنین چون

$$\left(e^{i\theta} \right)^n = (\cos\theta + isin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

$$= \cos(n\theta) + isin(n\theta)$$

پس $\boldsymbol{e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$

نتیجه : $\boldsymbol{e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta}$ **چون در** $\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

n=-1قرارمی دهیم

مثال 14 :صورت قطبی اعداد مختلط z=-4 و z=3i و z=2+2i و z=-i و z=1-i و z=-3-3i و z=-3+3i را بدست آورید.

حل : z=-4=-4+0i $\Longrightarrow x = -4 \ , y = 0 \Longrightarrow r = 4 \ , tan\theta = \frac{0}{-4} = 0 \Longrightarrow$

$$\theta = \pi \Longrightarrow z = 4e^{i\pi} \Longrightarrow z = -4 = 4(cos\pi + isin\pi)$$

$$z = 3i \Longrightarrow x = 0 \ , y = 3 \Longrightarrow r = 3 \ , \Longrightarrow tan\theta = \frac{3}{0} \Longrightarrow \ \theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad z = 3i = 3e^{\frac{\pi}{2}i} = 3\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z = 2 + 2i \Longrightarrow x = 2 \ , y = 2 \Longrightarrow r = 2 \ , \Longrightarrow tan\theta = \frac{2}{2} \Longrightarrow \ \theta = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow$$

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow \quad z = 2 + 2i = 2e^{\frac{\pi}{4}i} = 3\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = -i \Longrightarrow x = 0 \ , y = -1 \Longrightarrow r = 1 \ , \Longrightarrow tan\theta = \frac{-1}{0} \Longrightarrow$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow z = e^{i3\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow \quad z = -i = e^{3\frac{\pi}{2}i} = \left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= \ cos\frac{\pi}{2} - isin\frac{\pi}{2}$$

$$z = 1 - i \Longrightarrow x = 1 \ , y = -1 \Longrightarrow r = \sqrt{2} \ , \Longrightarrow tan\theta = \frac{-1}{1} \Longrightarrow \ \theta = \frac{7\pi}{4}$$
$$\Longrightarrow z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} \Longrightarrow \quad z = 1 - i = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$$
$$= \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} - isin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = -3 - 3i \Longrightarrow x = -3 \ , y = -3 \Longrightarrow r = 3\sqrt{2} \ , \Longrightarrow$$

$$tan\theta = \frac{-3}{-3} \Longrightarrow \ \theta = \frac{5\pi}{2} \Longrightarrow \quad z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \Longrightarrow \quad z = -3 - 3i$$
$$= 3\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} = 3\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right)$$
$$= 3\sqrt{2}\left(-cos\frac{\pi}{4} - isin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z=-3+3i \Rightarrow x=-3\,, y=3 \Rightarrow r=3\sqrt{2}\,, \Rightarrow tan\theta=\frac{3}{-3} \Rightarrow \ \theta=\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad z=3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow \ \ z=-3+3i=3\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$=3\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \ 3\sqrt{2}\left(-cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)$$

توجه :برای تعیین θ می توان از صفحه مختلط استفاده کرد یعنی عدد مختلط z=x+iy را در صفحه مختلط نمایش داد سپس از روی آن θ رایافت. برای مثال 14 به صورت زیر عمل می کنیم.

محاسبه حاصل ضرب دو عدد مختلط وتوانهای یک عدد مختلط به کمک نمایش قطبی

اگر $Z=|z|(\cos\theta+isin\theta)=|z|e^{i\theta}$ و

$w=|w|(\cos\varphi+isin\varphi)=|w|e^{i\varphi}$ آنگاه

$$\boxed{z.w=|z||w|e^{i(\theta+\varphi)}=|zw|(\cos(\theta+\varphi)+isin(\theta+\varphi))}$$

بنا بر این $\quad arg(zw)=argz+argw\pm 2k\pi \quad , \quad |zw|=|z||w|$

نتیجه :اگر $Z=r(\cos\theta+isin\theta)$ آنگاه چون $z=r|e^{i\theta}$ پس

$$\boxed{z^n=r^ne^{in\theta}=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\ ]}$$

مثال 15: مطلوب است محاسبه $z=(1+i)^{12}\left(2+i2\sqrt{3}\right)$

حل :→ $z_1=1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \to (1+i)^{12}=\left(\sqrt{2}\right)^{12}e^{\frac{12\pi}{4}i}$

$$(1+i)^{12}=2^6e^{3\pi i}=64[cos3\pi+isin3\pi]=-64$$

$$z_2=2+2\sqrt{3}i \to |z_2|=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4 \ \ ,$$

$$tan\theta=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \to \theta=\frac{\pi}{3} \quad ,|z_2|=4 \to z_2=4e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$z= \ (1+i)^{12}\left(2+i2\sqrt{3}\right)=(-64)\times 4e^{\frac{\pi}{3}i}=-256\left[cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$=-256\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]=-128[1+\sqrt{3}i]$$

مثال 16 : حاصل عبارت $w=(-1+i)^8(1+i)^{16}(\sqrt{3}+i)^6$ رابیابید.

حل :دیدیم که $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, -1+i=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\ ,\ \sqrt{3}+i=2e^{\frac{\pi}{6}i};$

$$[tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}]$$

$$w=(-1+i)^8(1+i)^{16}\left(\sqrt{3}+i\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^8\left(\sqrt{2}\right)^{16}2^6e^{\left(\frac{24\pi}{4}i+\frac{16\pi}{4}i+\frac{6\pi}{6}i\right)}$$

$$\rightarrow w=2^{18}e^{11\pi i}=2^{18}[\cos(10\pi+\pi)+isin(10\pi+\pi)]=2^{18}cos\pi=-2^{18}$$

تقسیم دو عدد مختلط به کمک صورت قطبی

اگر $z=|z|e^{i\theta}$ و $w=|w|e^{i\varphi}$ آنگاه $\frac{z}{w}=\frac{|z|e^{i\theta}}{|w|e^{i\varphi}}=\frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\varphi)}$ پس

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\varphi)}=\frac{|z|}{|w|}[\cos(\theta-\varphi)+isin(\theta-\varphi)]}}$$

نتیجه : اگر $z=|z|e^{i\theta}$ آنگاه

$$(\frac{1}{z})^n=z^{-n}=|z|^{-n}e^{-in\theta}=\frac{1}{|z|^n}[\cos(n\theta)-isin(n\theta)\ ]$$

مثال 17 : حاصل عبارت $z=(\frac{-1+i}{1+i})^{10}$ رابیابید.

حل :روش اول:

$$1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, -1+i=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\rightarrow\frac{-1+i}{1+i}=e^{\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)i}=e^{\frac{\pi}{2}i}=i$$

$$z=(\frac{-1+i}{1+i})^{10}=\ i^{10}=i^8i^2=-1$$

روش دوم

$$\frac{-1+i}{1+i}=\frac{-1+i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{(-1+1)+(2i)}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\rightarrow z=\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{10}=i^{10}=i^8i^2=-1$$

مثال 18 : حاصل عبارت $z=(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}})^{120}$ رابیابید.

حل:روش اول :, $1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi}{3}i}\ \ ,1-\sqrt{3}i=2e^{\frac{-\pi}{3}i}$

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{e^{\frac{\pi i}{3}}}{e^{\frac{-\pi i}{3}}}=e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)i}=e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$z = (\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}})^{120} = (e^{\frac{2\pi}{3}i})^{120} = e^{80\pi i} = \cos(80\pi)\ + isin(80\pi)\ = 1$$

روش دوم $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right) = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \times \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(1-3)+2\sqrt{3}i}{1+3} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$$z = (\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}})^{120} = (e^{\frac{2\pi}{3}i})^{120} = e^{80\pi i} = \cos(80\pi)\ + isin(80\pi)\ = 1$$

مثال19: حاصل عبارت $z = \frac{4}{cos\alpha + isin\alpha + 1}$ رابیابید. حل :

$$1 + cos\alpha + isin\alpha = (1 + cos\alpha) + isin\alpha = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right]$$

$$z = \frac{4}{cos\alpha + isin\alpha + 1} = \frac{4}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right]}$$
$$= 2\sec\frac{\alpha}{2}[\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}]$$

مثال 20:نشان دهید $\cos\theta = \cosh i\theta \quad , \quad \cos i\theta = \cosh\theta$

$$\sin i\theta = i\sinh\theta \quad , \quad \sinh i\theta = i\sin\theta$$

$$\begin{cases} e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta \\ e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta \end{cases}$$

$\to$ (جمع و تفریق کردن) $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cosh i\theta \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{1}{i}\sinh i\theta \end{cases}$

$$\to \quad \cos i\theta = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = \cosh\theta$$

$$\sin i\theta = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2} = -\frac{1}{i}\sinh i\theta = i\sinh i\theta \quad , \quad \sinh i\theta = i\sin\theta$$

ریشه های nام واحد(یعنی $\sqrt[n]{1}$)

حل معادله های $x^2 = 1$ و $x^3 = 1$ و...و $x^n = 1$ به یافتن ریشه های n ام واحد تبدیل می شود.یعنی محاسبه $\sqrt{1}$ و $\sqrt[3]{1}$ و $\sqrt[4]{1}$ و...و $\sqrt[n]{1}$

برای نمونه ریشه های دوم واحد عبارتند از 1و1- زیرا $x^2 = 1 \to x = 1\,, x = -1$

ریشه های سوم واحد عبارتند از x=1 و $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ زیرا

$$x^3+1=0 \to (x-1)(x^2+x+1)=0 \to x=1 \text{ و } x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ و }$$

$$x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

به همین صورت ریشه های چهارم واحد عبارتند از 1- و1 و i و i- زیرا

$$x^4=1 \to (x^2+1)(x^2-1)=0 \to x^2+1=0\ ,\ x^2-1=0$$

$$\to x=\pm i \text{ و } x=\pm 1$$

بنابر این ریشه های n ام واحد یعنی $\sqrt[n]{1}$ عبارت است از ریشه های معادله $x^n=1$

فرض کنید که $z=re^{i\theta}$ ریشه معادله $x^n=1$ باشد پس $1=z^n=r^ne^{in\theta}$
بنابر این

$$r=1\ .e^{in\theta}=1 \to \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=1 \to \begin{cases} \cos n\theta=1 \\ \sin(n\theta)=0 \end{cases} \to$$

$$n\theta=2k\pi \qquad k\in\mathbb{Z} \to$$

$$\theta=\frac{2k\pi}{n} \to z=e^{\theta i}=e^{\frac{2k\pi}{n}i} \quad : \quad k\in\mathbb{Z}$$

چون برخی از این جواب ها تکراری هستند پس ریشه هایn واحد عبارتند از :

$$\boxed{z_k=e^{\frac{2k\pi}{n}i}=\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad : k=0,1,2,\dots,(n-1)}$$

فرمول(*)

مثال : ریشه های پنجم واحد رابدست آورید (یا معادله $x^5=1$ را حل کنید.)

حل : طبق فرمول (*) داریم.

$$z_k=e^{\frac{2k\pi}{5}i}=\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right] \quad : k=0,1,2,3,4$$

$$k=0 \to z_0=e^{0i}=1 \quad ,k=1 \to z_1=e^{\frac{2\pi}{5}i}=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$,k=2 \to z_2=e^{\frac{4\pi}{5}i}=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$k=3 \to z_3 = e^{\frac{6\pi}{5}i} = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$
$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) + isin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - isin(\frac{\pi}{5})$$

$$k=4 \to z_4 = e^{\frac{8\pi}{5}i} = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$
$$= \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) + isin\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - isin(\frac{2\pi}{5})$$

بدیهی است که $z_4 = \overline{z_1} \quad , \quad z_3 = \overline{z_2}$

مثال 22: ریشه های چهارم واحد را به کمک فرمول(*) بیابید.

حل : طبق فرمول (*) داریم.

$$z_k = e^{\frac{2k\pi}{4}i} = \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{2k\pi}{4}\right)\right] \quad : k = 0,1,2,3$$

$$k=0 \to z_0 = e^{0i} = 1 \quad , k=1 \to z_1 = e^{\frac{2\pi}{4}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= i$$

$$, k=2 \to z_2 = e^{\frac{4\pi}{4}i} = e^{\pi i} = \cos(\pi) + isin(\pi) = -1$$

$$k=3 \to z_3 = e^{\frac{6\pi}{4}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

نکته :ریشه های nواحد روی دایره ای به مرکز (0و0) وشعاع یک قرار دارند واگر این نقاط را به ترتیب و به صورت پیوسته به هم وصل کنیم تشکیل یک n ضلعی منتظم می دهند.(برای $n \geq 3$).

مثلا" ریشه های چهارم واحد تشکیل یک مربع می دهند و ریشه های سوم واحد تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع می دهند .

ریشه های nام واحد عدد محتلط دلخواه w (یعنی حل معادله $z^n = w$)به عبارت دیگر $\sqrt[n]{w} = z$

فرض کنید کهw یک عدد دلخواه باشد می توان فرض کرد که $w = |w|e^{i\alpha}$ هدف یافتن عددهای مختلط $z = |z|e^{i\theta}$ است که در معادله $z^n = w$ صدق کنند .پس اگر داشته باشیم $z^n = w$ آنگاه

$$w=|w|e^{i\alpha}=|z|^n e^{in\theta}\rightarrow\begin{cases}|w|=|z|^n\\ e^{in\theta}=e^{i\alpha}\end{cases}$$
$$\rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt[n]{|w|}\\ \cos(n\theta)+isin(n\theta)=\cos(\alpha)+isin(\alpha)\end{cases}$$
$$\rightarrow\begin{cases}cosn\theta=cos\alpha\\ \sin(n\theta)=sin\alpha\end{cases}\rightarrow n\theta=2k\pi+\alpha\ :\ k\in\mathbb{Z}\rightarrow$$

$$\theta=\frac{2k\pi}{n}+\frac{\alpha}{n}:\quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین ریشه های nام واحد عدد محتلط دلخواه w عبارت است از

$$w_k=\sqrt[n]{|w|}e^{\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\alpha}{n}\right)i}=\sqrt[n]{|w|}e^{\frac{2k\pi}{n}i}e^{\frac{\alpha}{n}i}=\sqrt[n]{|w|}z_k e^{\frac{\alpha}{n}i}\quad : k\in\mathbb{Z}$$

با حذف ریشه های تکراری ریشه های nام واحد عدد محتلط دلخواه w عبارتند از

$$w_k=\sqrt[n]{|w|}z_k e^{\frac{\alpha}{n}i}\quad : k=0,1,2,\dots,(n-1)$$

فرمول (**)

مثال 23: ریشه های پنجم عدد مختلط w=4-4i را بدست آورید.

حل : $|w|=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\ ,\tan\alpha=\frac{-4}{4}=-1\rightarrow\alpha=\frac{7\pi}{4}$

ریشه های پنجم عدد w=4-4i عبارتند از $w_k=\sqrt[5]{\sqrt{32}}e^{\left(\frac{2k\pi}{5}+\frac{7\pi}{20}\right)i}\quad : k=0,1,2,3,4$

می دانیم $\sqrt[5]{\sqrt{32}}=\sqrt[10]{2^5}=\sqrt{2}$ بنابر این

$$k=0\rightarrow w_0=\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{20}i}=\sqrt{2}[\cos\left(\frac{7\pi}{20}\right)+isin\left(\frac{7\pi}{20}\right)]$$

$$k=1\rightarrow w_1=\sqrt{2}e^{\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{7\pi}{20}\right)i}=\sqrt{2}e^{\frac{15\pi}{20}i}=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left[\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$
$$=-1+i$$

$$k=2\rightarrow w_2=\sqrt{2}e^{\left(\frac{4\pi}{5}+\frac{7\pi}{20}\right)i}=\sqrt{2}e^{\frac{23\pi}{20}i}$$
$$=\sqrt{2}[\cos\left(\pi+\frac{3\pi}{20}\right)+isin\left(\pi+\frac{3\pi}{20}\right)]$$
$$=\sqrt{2}[-\cos\left(\frac{3\pi}{20}\right)-isin\left(\frac{3\pi}{20}\right)]$$

$$k=3 \rightarrow w_3=\sqrt{2}e^{(\frac{6\pi}{5}+\frac{7\pi}{20})i}=\sqrt{2}e^{\frac{31\pi}{20}i}$$
$$=\sqrt{2}[\ \cos\left(2\pi-\frac{9\pi}{20}\right)+isin\left(2\pi-\frac{9\pi}{20}\right)]$$
$$=\sqrt{2}[\cos\left(\frac{9\pi}{20}\right)-isin\left(\frac{9\pi}{20}\right)]$$

$$k=4 \rightarrow w_4=\sqrt{2}e^{\left(\frac{8\pi}{5}+\frac{7\pi}{20}\right)i}=\sqrt{2}e^{\frac{39\pi}{20}i}$$
$$=\sqrt{2}[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{20}\right)+isin\left(2\pi-\frac{\pi}{20}\right)]$$
$$=\sqrt{2}[\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)-isin\left(\frac{\pi}{20}\right)]$$

مثال 24: ریشه های پنجم عدد مختلط w=1+i را بدست آورید.

حل : $w=1+i \rightarrow |w|=\sqrt{2}\ \ ,\tan\alpha=\frac{1}{1}=1 \rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

$$w_k=\sqrt[5]{\sqrt{32}e^{\left(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)i}}\quad : k=0,1,2,3,4$$

$$w_k=\sqrt{2}[\cos\left(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)+isin\left(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)]\quad ;k=0,1,2,3,4$$

$$k=0 \rightarrow w_0=\sqrt{2}[\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)+isin\left(\frac{\pi}{20}\right)]$$

$$k=1 \rightarrow w_1=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)+isin\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}[\cos\left(\frac{9\pi}{20}\right)+isin\left(\frac{9\pi}{20}\right)]$$

$$k=2 \rightarrow w_2=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)+isin\left(\frac{4\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{20}\right)+isin\left(\frac{17\pi}{20}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}[-\cos\left(\frac{3\pi}{20}\right)+isin\left(\frac{3\pi}{20}\right)]$$

$$k=3\rightarrow w_3=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{6\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)+isin\left(\frac{6\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{25\pi}{20}\right)+isin\left(\frac{25\pi}{20}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}[-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}]$$

$$k=4\rightarrow w_4=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{8\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)+isin\left(\frac{8\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{33\pi}{20}\right)+isin\left(\frac{33\pi}{20}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\pi-\frac{7\pi}{20}\right)+isin\left(2\pi-\frac{\pi}{20}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}[\cos\left(\frac{7\pi}{20}\right)-isin\left(\frac{7\pi}{20}\right)]$$

مثال 25 : ریشه های سوم عدد مختلط w=-i را بدست آورید.

حل : $w=-i\rightarrow |w|=1\ \ ,\ \theta=\frac{3\pi}{2}$

$$w_k=e^{\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{3\pi}{6}\right)i}=e^{\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)i}$$
$$=[\cos\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)]\quad ;k=0,1,2$$

$$k=0\rightarrow w_0=e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)i}=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=i$$

$$k=1\rightarrow w_1=e^{\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)i}=\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$=\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+isin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]=\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$k=2\rightarrow w_2=e^{\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)i}=\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$=\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+isin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]$$
$$=\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

مثال 26 : معادله $z^4+4z^2+4=0$ را حل کنید.

حل :بافرض $w=z^2$ وجایگذاری در معادله به معادله $w^2+4w+4=0$ با $(w+2)^2=0$ می رسیم. پس باید معادله $w=z^2=-2$ را حل کنیم که با جذر گیری جوابهای آن عبارتند از $z=\sqrt{2}i \quad , z=-\sqrt{2}i$

مثال 27 : معادله $z^4+(1+i)z^2+i=0$ را حل کنید.

حل : بافرض $w=z^2$ وجایگذاری در معادله به معادله $w^2+(1+i)w+i=0$ می رسیم. پس باید این معادله درجه 2 را حل کنیم چون a=1 و c=i و b=a+c=1+i پس معادله درجه 2 دو ریشه w=-1 و $w=-\frac{c}{a}=-i$ دارد. پس باید دو معادله

$-1=z^2 \quad , -i=z^2$ را حل کنیم .

جواب معادله $-1=z^2$ عبارت است از i و-i

حل معادله $-i=z^2$ یعنی یافتن ریشه دوم عدد مختلط i- که چون $|z|=1 \ , \ \theta=\frac{3\pi}{2}$ پس

$$z_k=\sqrt{1}e^{\left(\frac{2k\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)i}=e^{\left(k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)i} \quad ; \quad k=0,1$$

$$k=0 \to z_0=e^{\frac{3\pi}{4}i}=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} k=1 \to z_1=e^{(\pi+\frac{3\pi}{4})i}=e^{\frac{7\pi}{4}i}&=\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \\ &=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-isin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

مثال 28 :معادله $1+z+z^2+z^3=0$ را حل کنید.

حل :می دانیم که $1+z+z^2+z^3=\frac{1-z^4}{1-z}=0$ بنا بر این باید معادله $z^4=1 \ , z\neq 1$ را حل کنیم . یعنی یاافتن ریشه های چهارم واحد بجزء $z=1$ پس جواب ها عبارتند از i- ,i ,1 -

تمرین

1-عبارات زیر را ساده کنید(به صورت a+ib بنویسید).

الف) (4+i)(3+2i)(1-i) ب) $\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$ پ) $\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}+i^{15}}$ ج)

$(2i-1)^2(\frac{4}{1-i}+\frac{4-i}{1+i})$ د) $3(\frac{1+i}{1-i})^2-2(\frac{1-i}{1+i})^2$

ر) $(\frac{1}{1-i}+1+i)^2(\frac{1}{1+i}+1+i)^2$

2-عبارات زیر را به صورت قطبی بنویسید(به صورت $Z=r(\cos\theta+isin\theta)$ یا $z=|z|e^{i\theta}$).

الف) 2-2i ب) $-1+\sqrt{3}i$ پ) $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ ج) -7i

د) $(2+2i)^3$ ر) $\frac{3}{(1-i)^4}$ ز) $(\frac{4}{-1+\sqrt{3}i)})^{12}$ ژ) $(\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i)\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+i\frac{3}{2}\right)$

3- حاصل عبارات زیر را معیین کنید.

الف) $(1+i)^{\frac{1}{3}}$ ب) $(2\sqrt{3}+2i)^{\frac{1}{3}}$ پ) $\sqrt[6]{i}$ ج) $\sqrt[4]{1-i}$

د) $\sqrt[5]{i+\sqrt{3}}$ ر) $\frac{\sqrt[3]{1-i}}{(1+\sqrt{3}i)^5}$ ز) $\sqrt[3]{1-i}\sqrt[5]{1+i}$

4-اگر u یکی از ریشه های n ام واحد غیر از یک باشد آنگاه حاصل عبارات زیر را معیین کنید. $s=z^4+z^3+z^2+z+1$.

5-معادلات زیر را حل کنید.

الف) $z^4-z^3+z^2-z+1=0$

ب) $1+2z+2z^2+\cdots+2z^{n-1}+2z^n=0$ پ) $z^3-z^2+z-1=0$

ج) $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=o$ د) $z^4-2z^2+4=0$

ر) $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=o$ ز) $z^6-(1+2i)z^3-1+i+0$

ژ) $(1+\frac{x}{n}i)^n=(1-\frac{x}{n}i)^n$

6-عدد مختلط z را طوری معیین کنید که سه عدد i و z وiz رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع باشد.

7- اگر$z=x+iy$ و $w=u+iv$ آنگاه از روی روابط زیرu و v رابر حسب x و y بنویسید وهمچنین x و y را بر حسب u و v بنویسید. الف) $w=\frac{-1}{z}$ ب) $w=\frac{z}{1+z}$

8-نشان دهید که اگرعدد مختلط z ریشه معادله $f(x)=0$ باشد آنگاه $\bar{z}$ هم ریشه این معادله است.

10-مکان هندسی نقاطی از صفحه را معیین کنید که در روابط زیر صدق کند.

الف) $az^3+bz^3+cz=a\bar{z}^3+b\bar{z}^2+c\bar{z}$ ب) $|z-1|=1$

پ) $|z-1|=|z+1|$ ج) $z+\bar{z}=|z|^2$

11-اگر α و β ریشه های معادله $z^2-2z+4=0$ باشد نشان دهید که $\alpha^n+\beta^n=2^{n+1}\cos(\frac{n\pi}{2})$ (n عدد طبیعی دلخواه است).

12- معادله $z^5-1-i=0$ را حل کنید.

13- معادله $\sin z=2$ را حل کنید.

14- اگر $z=-1+\sqrt{3}i$ آنگاه z^{50} حساب کنید.

15- اگر $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ آنگاه z^{50} حساب کنید.

16- اگر $z=x+iy$ ثابت کنید که $|\sin z|=\sqrt{(\sin x)^2+(\sinh y)^2}$

17- الف) ریشه های چهارم $z=-1+\sqrt{3}i$ رابیابید .ب) ریشه های سوم $z=2+2i$ رابیابید

ج) ریشه های دوم $z=1+\sqrt{3}i$ رابیابید

18-مطلوب است محاسبه $z=(\ -1+\sqrt{3}i\ )^{30}(\ 2+2i\ )^{20}(\ 1+\sqrt{3}i\ )^{30}$