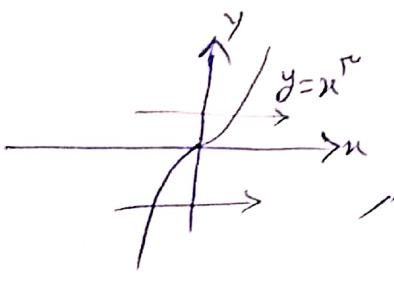
«به نام خدا»

فصل تابع وارون، توابع لگاریتمی و توابع وارون مثلثاتی

تعریف: تابع f را یک‌به‌یک نامیم هرگاه اگر $f(x_1)=f(x_2)$ آنگاه $x_1=x_2$ یا به عبارت دیگر:
اگر $x_1\neq x_2$ آنگاه $f(x_1)\neq f(x_2)$

نکته ۱: (آزمون خط افقی) تابع f یک‌به‌یک است اگر و فقط اگر هیچ خط افقی (موازی با محور xها) نمودار f را بیش از یک بار قطع نکند.

نکته ۲: هر تابع یکنوا (صعودی یا نزولی) یک‌به‌یک است بنابراین اگر همواره $f'(x)>0$ یا $f'(x)<0$ آنگاه تابع f یکنوا است پس یک‌به‌یک است.



از روی نمودار ①

مثال ۱) تابع $f(x)=x^3$ یک‌به‌یک است

حل: چون $f'(x)=3x^2\geq 0$ پس یک‌به‌یک است

همچنین طبق شکل ① تابع $f(x)=x^3$ یک‌به‌یک است

همچنین طبق تعریف

$$f(x_1)=x_1^3=f(x_2)=x_2^3 \Rightarrow x_1=x_2$$

یا
$$x_1\neq x_2 \Rightarrow x_1^3\neq x_2^3 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

تعریف: تابع یک‌به‌یک $f: A\longrightarrow B$ که A دامنه تابع f و B برد تابع f است دارای تابع وارون است و این تابع وارون را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و $f^{-1}: B\longrightarrow A$.

همچنین برای هر عضو y در B داریم
$$f(x)=y \Longleftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

توجه: در مثال (۱) تابع وارون $f(x)=x^3$ عبارت است از $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ زیرا

$$f^{-1}(y)=f^{-1}(x^3)=(x^3)^{\frac{1}{3}}=x$$

نکته ۳: (هشدار) $f^{-1}(x)\neq \frac{1}{f(x)}$ زیرا $(f(x))^{-1}=\frac{1}{f(x)}$ که با تابع وارون متفاوت است

نکته ۴: چگونه تابع وارون f را پیدا کنیم:

گام اول: از یک‌به‌یک بودن f مطمئن شویم. گام دوم: از معادله $y=f(x)$ مقدار x را برحسب y را پیدا می‌کنیم و با $x=f^{-1}(y)$ نشان می‌دهیم. گام سوم: در $x=f^{-1}(y)$ نقش x و y را با هم عوض می‌کنیم یعنی

$$y=f^{-1}(x)$$

مثال ۲) تابع وارون $f(x)=x^3+2$ را پیدا کنید.

حل ۱) چون $f'(x)=3x^2 \geq 0$ پس تابع f صعودی و بنابراین یک‌به‌یک است (گام اول)

گام دوم: $y=f(x)=x^3+2 \Rightarrow x^3=y-2 \Rightarrow x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y-2}$

گام سوم: تعویض نقش x و y یعنی $y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$ تابع وارون $f(x)$ است

نکته ۴) اگر تابع f دارای تابع وارون باشد و f^{-1} تابع وارون f باشد آنگاه خواص زیر برقرار است

الف) $y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$

ب) $R_f=D_{f^{-1}}$ و $D_f=R_{f^{-1}}$

ج) نمودار تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن است (یعنی نمودار f^{-1} را با قرینه کردن نمودار f نسبت به خط $y=x$ بدست می‌آید)

د) $\begin{cases} f\circ f^{-1}(x)=x \\ \forall x\in D_{f^{-1}} \end{cases}$ و $\begin{cases} f^{-1}\circ f(x)=x \\ x\in D_f \end{cases}$

ه) هر تابع صعودی دارای معکوس صعودی است و هر تابع نزولی دارای معکوس نزولی است.

ز) اگر تابع f روی بازه I یک‌به‌یک و پیوسته باشد، آنگاه تابع وارونش یعنی f^{-1} هم روی بازه I پیوسته است

س) اگر f تابعی یک‌به‌یک و مشتق‌پذیر با تابع وارون f^{-1} باشد و $f'(f^{-1}(a))\neq 0$

آنگاه این تابع وارون یعنی f^{-1} در a مشتق‌پذیر است و

$$(f^{-1})'(a)=\frac{1}{f'(f^{-1}(a))} \quad (*)$$

در دستور * می‌توان به جای a متغیر x را قرار داد و

در این صورت
$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(y)}$$

توجه: اگر از مشتق‌پذیری f با اطلاع باشیم به کمک مشتق ضمنی می‌توان با سادگی $(f^{-1})'(x)$ را به صورت زیر بدست آورد. از معادله $x=f(y)$ نسبت به x مشتق ضمنی می‌گیریم (y تابعی از x است) یعنی

$$f'(y)\frac{dy}{dx}=1 .$$

بنابراین
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} .$$

مثال ۳: الف) اگر $f(x)=2x+\cos x$ آنگاه $(f^{-1})'(1)$ را پیدا کنید

ب) بدون محاسبه تابع وارون $f(x)=x^3+2$ مطلوب است محاسبه $(f^{-1})'(x)$.

صفحه ۳

حل: الف) چون $f'(x)=2-\sin x>0$ (زیرا $-1\le \sin x\le 1$) پس تابع f صعودی (پس یک‌به‌یک)
و بنابراین معکوس دارد. طبق دستور * داریم

$$f(0)=1 \Rightarrow f^{-1}(1)=0$$

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(f^{-1}(1))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2-\sin 0}=\frac{1}{2}$$

ب) در مثال ۲ دیدیم که $f'(x)=3x^2\geq 0$ ، پس تابع f دارای تابع وارون است
بنابراین طبق دستور * داریم

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x-2})^2}$$

یا به عبارت دیگر

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}}$$

(توجه $y=\sqrt[3]{x-2}$ زیرا نقش x و y عوض شد)

مثال ۴: (تمرین ۱۴ صفحه ۲۹۰) فرض کنید که اگر تابع وارون تابع f باشد و $f(4)=5$ و $f'(4)=\frac{2}{3}$ آنگاه $(f^{-1})'(5)$ را پیدا کنید.

جواب: طبق دستور * داریم

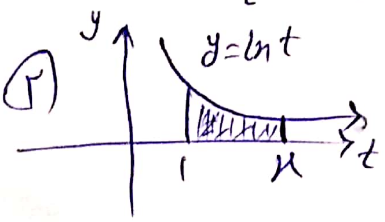
$$(f^{-1})'(5)=\frac{1}{f'(f^{-1}(5))}=\frac{1}{f'(4)}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

توجه: در این فصل برای توابع ای که (جدید) تعریف می‌کنیم سعی می‌کنیم تمام نکات آنها را یکجا بررسی و رعایت کنیم.

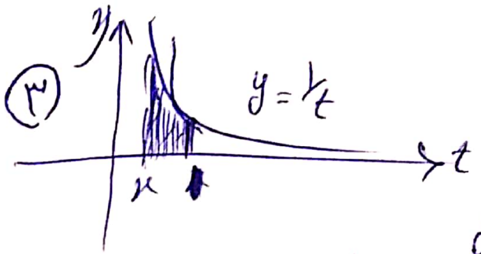
تعریف (تابع لگاریتم طبیعی) تابع لگاریتم طبیعی تابعی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$y=\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t} \quad , x>0$$

توجه: اگر $x>1$ آنگاه $\ln x$ مساحت ناحیه محصور بین محورها $t=1$ و $y=\frac{1}{t}$ را نشان می‌دهد شکل (۲)



و اگر $0<x<1$ آنگاه $\ln x = -$ مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y=\frac{1}{t}$ و محور tها و خطوط $t=1$ و $t=x$ شکل (۳)



خواص تابع $y=\ln x$

۱) $\ln(1)=\int_1^1 \frac{dt}{t}=0$

۲) $y'=\frac{1}{x}$ و $y''=\frac{-1}{x^2}$

۴) $D_{\ln x}=(0,+\infty)$

۵) برای هر دو عدد a و b مثبت: الف) $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

ب) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ ج) $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln b$

۶) برای $x>0$ و عدد گویای r داریم: $\ln(x^r)=r\ln x$

توجه: طبق ۳، تابع $\ln x$ صعودی است زیرا $y'=\frac{1}{x}>0$ پس یک به یک و بنابراین تابع وارون دارد و وارون تابع $y=\ln x$ را با $y=\exp(x)=e^x$ نمایش می دهیم و در جلسه بعد به آن می پردازیم.

مثال ۵) طبق خاصیت ۵ و ۶ الف) $\ln\left(\frac{(x^2+5)^4\sin x}{x^3+1}\right)$ را بسط دهید.

ب) $\ln a+\frac{1}{2}\ln b$ را به شکل تک لگاریتم بنویسید.

حل الف)

$$\ln\left(\frac{(x^2+5)^4\sin x}{x^3+1}\right)=\ln(x^2+5)^4+\ln\sin x-\ln(x^3+1)=4\ln(x^2+5)+\ln\sin x-\ln(x^3+1)$$

ب)

$$\ln a+\frac{1}{2}\ln b=\ln a+\ln b^{\frac{1}{2}}=\ln(ab^{\frac{1}{2}})$$

توجه: خواص های دیگر تابع لگاریتم طبیعی x

۷) الف) $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ب) $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

۸) اگر $y=\ln(u)$ (u تابعی از x است) آنگاه $y'=\frac{u'}{u}$

مثال ۶) از توابع الف) $y=\ln(\sin x)$ و ب) $y=\sqrt{\ln x}$ مشتق بگیرید.

حل الف) $y'=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$ ب) $y'=\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

تبصره: یکی از کاربردهای تابع $\ln x$ گرفتن مشتق از توابع جبری و توابعی است که مشتق آنها طولانی و محاسبه آن سخت است. که مراحل آن به صورت زیر است

۱) از دو طرف تابع $y=f(x)$ لگاریتم طبیعی بگیریم (با فرض $f(x)>0$) یعنی $\ln y=\ln f(x)$

۲) از $\ln y=\ln f(x)$ نسبت به x مشتق ضمنی بگیریم

۳) از تساوی بدست آمده y' را حساب می کنیم.

مثال ۷: (مثال ۱۴ صفحه ۵۳۳) اگر $y=\frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ آنگاه y' را حساب کنید.

«پایان جلسه اول»

صفحه ۱

جلسه سوم (توابع وارون مثلثاتی)

توابع مثلثاتی $\sin x$ ، $\cos x$ و $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot g x=\frac{1}{\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x}$ و $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ و $\csc x=\frac{1}{\sin x}$ یک به یک نیستند بنابراین تابع وارون ندارند ولی بدلیل اهمیت و کاربرد آنها در ریاضی و مهندسی با محدود کردن دامنه توابع مثلثاتی برای این توابع، توابع وارون (تابع آرک arc) تعریف می‌کنیم

در جدول های زیر توابع وارون مثلثاتی و دامنه و برد آنها و مشتق و مقدار آنها و انتگرال های وابسته به آنها بیان شده است

جدول ①

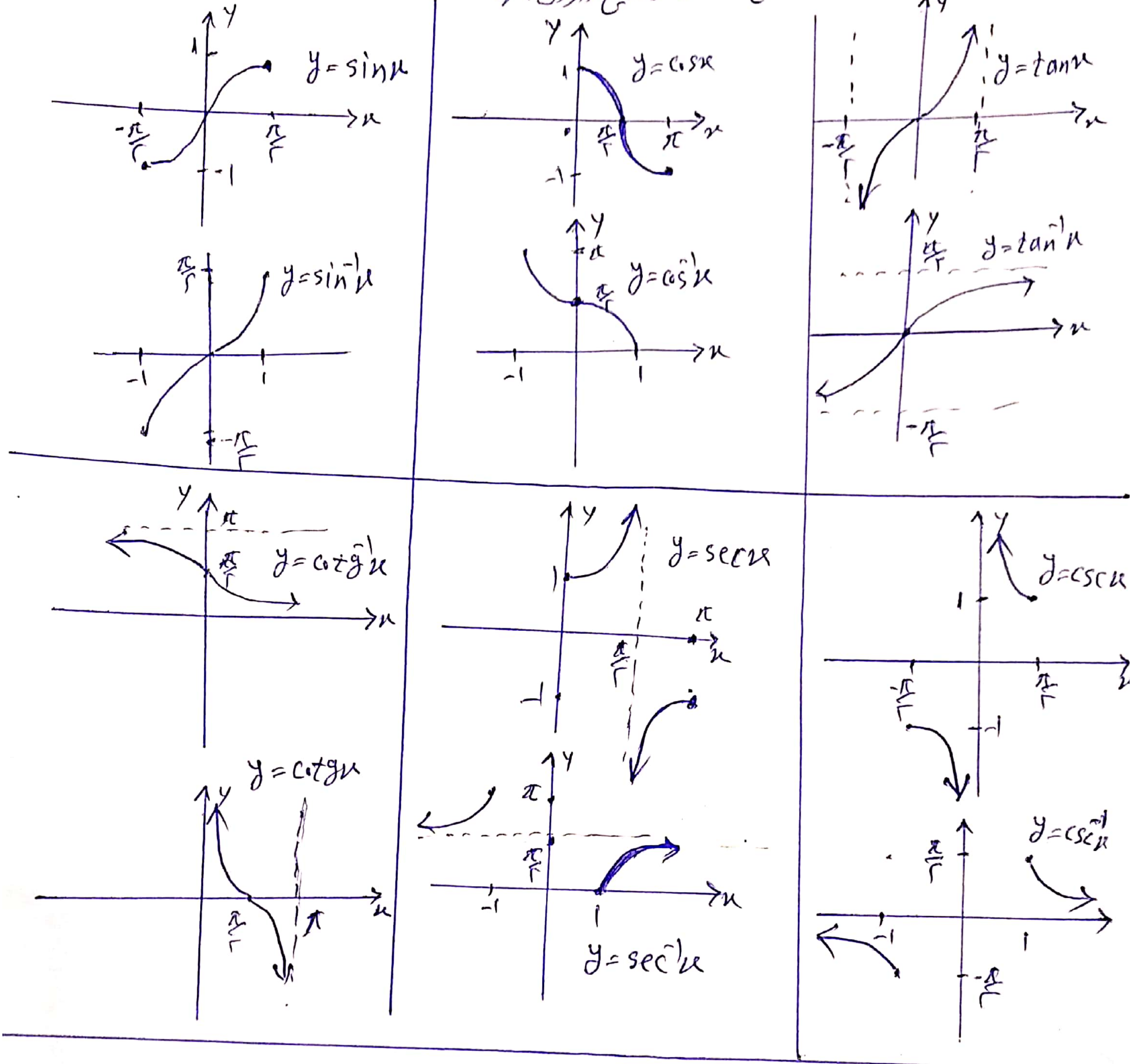
تابع مثلثاتی D= دامنه تابع R= برد تابع	تابع وارون مثلثاتی D= دامنه تابع R= برد تابع	مشتق تابع وارون مثلثاتی
$y=\sin x$ $D=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $R=[-1,1]$	$y=\sin^{-1}x=\arcsin x$ $D=[-1,1]$ $R=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\cos x$ $D=[0,\pi]$ $R=[-1,1]$	$y=\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$ $D=[-1,1]$ $R=[0,\pi]$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\tan x$ $D=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $R=(-\infty,+\infty)$	$y=\tan^{-1}x=\arctan x$ $D=(-\infty,+\infty)$ $R=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=\cot g x=\frac{1}{\tan x}$ $D=(0,\pi)$ $R=(-\infty,+\infty)$	$y=\cot g^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$ $D=(-\infty,+\infty)$ $R=(0,\pi)$	$y'=\frac{-1}{1+x^2}$
$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ $D=[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3\pi}{2})$ $R=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$y=\sec^{-1}x=\cos^{-1}(\frac{1}{x})$ $D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ $R=[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3\pi}{2})$	$y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$ $D=(0,\frac{\pi}{2}]\cup(\pi,\frac{3\pi}{2}]$ $R=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$y=\csc^{-1}x=\sin^{-1}(\frac{1}{x})$ $D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ $R=(0,\frac{\pi}{2}]\cup(\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$y'=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

توجه: دامنه توابع مثلثاتی $\sec x$ و $\underbrace{\csc x}_{\text{برای تعریف}}$ معکوس آن می‌توان به صورت زیر انتخاب کرد:

$y=\sec x \;:\; D=[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]=R_{\sec^{-1}x}$

$y=\csc x \;:\; D=[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]=R_{\csc^{-1}x}$

جدول ۲ نمودارهای توابع مثلثاتی و توابع وارون آنها



جدول ۳ انتگرال‌های وابسته

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + C = -\cos^{-1}x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + C = -\cot^{-1}x + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}|x| + C = -\csc^{-1}|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a>0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a>0)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C \quad (a>0)$$

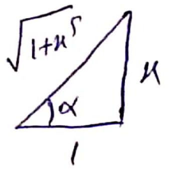
جدول ۴ روابط تابع مثلثاتی و وارون آن

$$\begin{cases} \sin(\sin^{-1}x)=x \; : x\in D_{\sin^{-1}x} \\ \sin^{-1}(\sin x)=x \; ; x\in D_{\sin x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\cos^{-1}x)=x \; : x\in D_{\cos^{-1}x} \\ \cos^{-1}(\cos x)=x \; : x\in D_{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(\tan^{-1}x)=x \; : x\in D_{\tan^{-1}x} \\ \tan^{-1}(\tan x)=x \; : x\in D_{\tan x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cot(\cot^{-1}x)=x \; : x\in D_{\cot^{-1}x} \\ \cot^{-1}(\cot x)=x \quad x\in D_{\cot x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sec(\sec^{-1}x)=x \; : x\in D_{\sec^{-1}x} \\ \sec^{-1}(\sec x)=x \; : x\in D_{\sec x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \csc(\csc^{-1}x)=x \; : x\in D_{\csc^{-1}x} \\ \csc^{-1}(\csc x)=x \; : x\in D_{\csc x} \end{cases}$$

مثال ۱: عبارت $\cos(\tan^{-1}x)$ را ساده کنید.



حل: فرض کنید که $\tan^{-1}x=\alpha$ پس $\tan\alpha=x$ یک مثلث قائم الزاویه مقابل

بنابراین هدف محاسبه $\cos\alpha$ است که برابر است با $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

مثال ۲ (تمرین ۳۹ صفحه ۵۷۳) اگر $g(x)=x\sin^{-1}(\frac{x}{4})+\sqrt{16-x^2}$ آنگاه $g'(2)$ را بیابید.

حل: می دانیم که طبق قاعده زنجیری اگر $y=\sin^{-1}u$ آنگاه $y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ پس

$$g'(x)=\sin^{-1}(\frac{x}{4})+x\left(\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}}\right)+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}\right)=\sin^{-1}(\frac{x}{4})+\cancel{\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}}-\cancel{\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}}=\sin^{-1}(\frac{x}{4})$$

$$g'(2)=\sin^{-1}(\frac{2}{4})=\sin^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}$$ (زیرا $\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$)

مثال ۳ مشتق توابع الف) $y=\frac{1}{\sin^{-1}x}$ و ب) $y=x\tan^{-1}\sqrt{x}$ را حساب کنید.

حل الف)

$$y=\frac{1}{\sin^{-1}x}\longrightarrow y'=\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\sin^{-1}x)^2}=\frac{-1}{(\sin^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

ب)

$$y=x\tan^{-1}\sqrt{x}\Rightarrow y'=\tan^{-1}\sqrt{x}+x\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}\right)=\tan^{-1}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

مثال ۴. مطلوب است محاسبه $\sin^{-1}(\sin\pi)$.

حل: چون π در دامنه محدود شده برای $\sin$ قرار ندارد بنابراین نباید زود قضاوت کرد و نتیجه گرفت $\sin^{-1}(\sin\pi)=\pi$.

جواب عبارت است از

$$\sin^{-1}(\sin\pi)=\sin^{-1}(0)=0$$