«مبانی علوم ریاضیات»

جزوه حاضر که در قالب ۳۱ صفحه تهیه گردیده (دو فصل) از درس مبانی علوم ریاضیات می باشد که برای دانشجویان رشته ریاضی دانشگاه فرهنگیان تنظیم شده است.

این جزوه از طریق آموزش دانشگاه فرهنگیان بندرعباس در اختیار دانشجویان قرار می گیرد و هدف از تهیه آن برای جبران تعطیلی کلاسهای درس است که بخاطر مقابله با ویروس کرونا بوجود آمده است منبع اصلی این درس کتاب نظریه مجموعه ها و کاربردهای آن. ترجمه عمید رسولیان است و برای راحتی دانشجویان برخی از مطالب این کتاب در قالب فصل اول یعنی منطق ریاضی و جبر گزاره ها و همچنین فصلی به نام فصل ۲ که در آن به برخی از روشهای اثبات قضیه ها و احکام ریاضی پرداخته شده است.

سعی شده مطالب به صورت خودخوان نوشته شود و نیازی به کلاس درس نباشد. باقی مطالب کتاب در کلاس درس در سال ۱۳۹۹ تدریس می گردد.

«محمودرضا غلامی»

فصل اول درس مبانی علوم ریاضیات

بخش ۱ «منطق ریاضی و جبر گزاره ها»

در این فصل مطالبی از منطق ریاضی که برای مطالعه بقیه فصل های این درس لازم است ارائه می شود. منطق بررسی اصول و روشهایی است که برای تمیز دادن استدلالهای درست از استدلالهای نادرست بکار می روند. در این فصل به اصول و روشهایی که در هر مرحله برهان (اثبات) بکار می رود می پردازیم. بنابراین این فصل به منزله زبان ریاضی است که هر دانشجوی ریاضی باید آن را به خوبی یاد بگیرد و بتواند بکار بگیرد.

تعریف (گزاره): گزاره جمله‌ای است خبری که قطعاً درست یا قطعاً نادرست است (نمی تواند در عین حال هم درست و هم نادرست باشد هر چند که درستی یا نادرستی آن برای ما معلوم نباشد).

مثال ۱: جملات زیر گزاره هستند:

الف) امروز شنبه است — د) حاصل جمع ۲ و ۱ برابر ۵ است

ب) ۵ عددی زوج است — ه) شیراز شهری در استان فارس است

ج) دو هزار و پانصدمین رقم عدد π مساوی ۵ است. و) عدد ۲ عددی اول است.

مثال ۲: جملات زیر گزاره نیستند

الف) خدانگهدار. — د) حال شما چطور است؟

ب) حالت چطوره؟ — ه) آسمان غمی است.

ج) اکبر کتاب را بردار — و) به مهمانی ما بیا!

توجه: جملات سوالی و جملات امری گزاره نیستند. همچنین برخی از جملات خبری که برای بعضی درست و برای بعضی نادرست است (جملاتی که خبر از مفهوم کیفی می دهد) گزاره نیستند.

مثال ۳: جملات خبری زیر گزاره نیستند

الف) حسن خوش اخلاق است — ج) مس فلزی گرانبها است

ب) این پرتقال شیرین است

تعریف (گزاره ساده و مرکب): گزاره‌ای که از یک جمله ی ساده تشکیل شده باشد (یا شامل یک خبر باشد) را گزاره ساده می نامیم و گزاره مرکب گزاره‌ای است که ترکیب چند گزاره ساده است.

مثال ۴: تمام گزاره های مثال ۱ گزاره ساده هستند و گزاره های زیر گزاره مرکب هستند

الف) امروز شنبه است یا امروز دوشنبه است. ب) ۲ یک عدد زوج است و ۲ یک عدد اول است

ج) اگر ۳ عددی اول باشد آنگاه 3^2 عددی فرد است.

د) چنین نیست که زهرا مرد است یا رضا ضیدان است.

تعریف (ارزش گزاره) ارزش گزاره را ارزش درستی یا نادرستی گزاره گوییم. یعنی اگر گزاره درست باشد گوییم ارزش درستی یا ارزش «د» (درست) دارد و در غیر این صورت ارزش نادرستی یا ارزش «ن» (نادرست) دارد. (می‌توان به جای «د» از حرف T و به جای «ن» از حرف F استفاده کرد.)

برای هر گزاره یک جدول ارزشی در نظر می‌گیریم که حالت‌های درستی و نادرستی آن را بیان می‌کند مانند

p
د
ن

ترکیب گزاره‌ها (رابطه‌های گزاره‌ای)

معمولاً برای ترکیب گزاره‌ها از پنج رابطه به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

الف) «چنین نیست که» که با علامت ~ مشخص می‌شود (یعنی نفی گزاره)

ب) «و» که با علامت $\wedge$ معین می‌گردد (عاطف)

ج) «یا» که با علامت $\vee$ معین می‌گردد (فاصل)

د) «اگر ... آنگاه ...» که با علامت $\rightarrow$ نمایش می‌دهیم.

ه) «... اگر و فقط اگر ...» که با علامت $\leftrightarrow$ نمایش می‌دهیم.

هر یک از پنج رابطه بالا را به صورت زیر شرح می‌دهیم.

(I) رابطه گزاره‌ای چنین نیست که (یا رابطه گزاره‌ای نه) را نقیض یک گزاره می‌نامیم و اگر p یک گزاره آنگاه $\sim p$ نیز یک گزاره است و آن را نقیض گزاره p می‌نامیم و ارزش گزاره $\sim p$ برعکس نقیض p است طبق جدول مقابل:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

توجه: $\sim p$ خوانده می‌شود چنین نیست که p (یا خوانده می‌شود نه p). همچنین رابطه گزاره‌ای «~» بر یک عمل می‌کند و سمت چپ گزاره قرار می‌گیرد.

مثال ۵: نقیض ۲ یک عدد زوج است عبارت است چنین نیست که ۲ یک عدد زوج است و به زبان محاوره‌ای می‌خوانیم ۲ یک عدد زوج نیست (که معنی آن ۲ عددی فرد است می‌باشد)

نقیض گزاره حسن مسلمان است عبارت است چنین نیست که حسن مسلمان است و به زبان محاوره‌ای می‌خوانیم حسن مسلمان نیست

نقیض گزاره $5<4$ عبارت است چنین نیست که $5<4$ که معادل آن ۵ کوچکتر از ۴ نیست (یا به صورت $5 \nless 4$ نوشته می‌شود).

(II) رابطه گزاره‌ای «و» یا عاطف یا $\wedge$: اگر p و q دو گزاره باشند در این صورت $p \wedge q$ نیز یک گزاره است و آن را ترکیب عطفی p و q می‌نامیم.

گزاره عطفی $p \wedge q$ زمانی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند در غیر این صورت $p \wedge q$ نادرست است. بنابراین جدول ارزشی آن به صورت مقابل است

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

توجه: همانطور که برای ترکیب دو گزاره برای هر گزاره چهار حالت یعنی 2^2 حالت در نظر می‌گیریم و همانطور که برای ترکیب n گزاره در جدول ارزشی 2^n حالت در نظر می‌گیریم.

مثال ۶: الف) ۲ زوج است و ۲ عدد اول است، یک ترکیب عطفی است که ارزش آن درست است.

ب) گزاره عطفی ۲ فرد است و ۳ زوج است که ارزش آن نادرست است

ج) $5<4$ و $3<2$ یک گزاره عطفی است و ارزش آن نادرست است

(III) رابطه گزاره‌ای «یا» یا فاصل یا $\vee$: اگر p و q دو گزاره باشند در این صورت $p \vee q$ یک گزاره است و آن را ترکیب فصلی p و q می‌نامیم. گزاره فصلی $p \vee q$ زمانی نادرست است که هر دوی p و q نادرست باشند در غیر این صورت ارزش گزاره $p \vee q$ درست است

جدول ارزشی $p \vee q$ به صورت مقابل است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

توجه: $p \wedge q$ خوانده می‌شود p و q
$p \vee q$ خوانده می‌شود p یا q

مثال ۷: الف) امروز باران می‌بارد یا برف می‌بارد یک گزاره فصلی است. ارزش آن به امروز بستگی دارد که باران، برف بیارد یا نبارد

ب) گزاره ۲ زوج است یا ۲ اول است یک گزاره فصلی است که ارزش آن درست است.

ج) $\sqrt{2}$ عددی گویا است یا ۲ عددی فرد است یک گزاره فصلی است که ارزش آن نادرست است

تبصره: در زبان فارسی وقتی بین دو عبارت حرف «یا» قرار می‌گیرد (مثال: شیر یا خط در پرتاب سکه) فقط یکی از عبارت‌ها درست باشد ارزش آن دو عبارت با هم. (یعنی $p \veebar q$) درست است. این

«$\veebar$» را یای مانعة الجمع می‌نامیم و با «$\vee$» فرق دارد

مثال ۸: نتیجه پرتاب یک سکه شیر یا خط است (پشت یا رو)

تولد یک فرد در دو شهر نخواهد بود (سین احمد در شیراز یا اصفهان به دنیا آمده است. اگر در شیراز به دنیا آمدن را با p و در اصفهان به دنیا آمدن را با q نمایش دهیم در زبان فارسی از $p \veebar q$ استفاده می‌کنیم

تعریف: دو گزاره دلخواه (ساده یا مرکب) p و q که در هر یک از حالات منطقی ارزشش درستی داشته باشند را هم ارزش می‌نامیم. و می‌نویسیم $p \equiv q$ به عبارت دیگر دو گزاره را هم ارزش می‌نامیم هرگاه جدول ارزشی آنها یکسان باشند.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$
د	د	ن	ن	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	ن	د	ن

هم ارزش هستند

مثال ۹: $(p \vee q) \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ زیرا

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

هم ارزش هستند

مثال ۱۰: $\sim(\sim p) \equiv p$ زیرا

IV) رابطه گزاره‌ای ⟵ (اگر ... آنگاه ...) اگر p و q دو گزاره باشند آنگاه $p \to q$ یک گزاره است که آن را گزاره شرطی می‌نامیم و می‌خوانیم اگر p آنگاه q.
گزاره $p \to q$ فقط وقتی نادرست است که (مقدم p) درست و (تالی q) نادرست باشد در غیر این صورت گزاره $p \to q$ درست است

جدول ارزشی $p \to q$ به صورت مقابل است

p	q	$p \to q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

مثال ۱۱: $(p \to q) \equiv (q \vee \sim p) \equiv \sim(p \wedge \sim q)$

زیرا

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim q$	$q \vee \sim p$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
د	د	د	ن	ن	د	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن	د	ن
ن	د	د	د	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	د	ن	د

توجه: در گزاره شرطی $p\to q$ وقتی مقدم p نادرست باشد ارزش گزاره شرطی $p\to q$ درست است و به ارزش
تالی q کاری نداریم که درست است یا نادرست. به مثال زیر توجه کنید

مثال ۱۲: اگر ۲ عددی فرد باشد آنگاه π عددی صحیح است (الف

اگر ۲ عددی فرد باشد آنگاه π عددی اصم (گنگ) است (ب

چون مقدم نادرست است ارزش هر دو گزاره شرطی درست است.

دقت کنیم که در گزاره شرطی $p\to q$ ، مقدم p را فرض و تالی q را نتیجه در نظر نمی‌گیریم. حال اگر مقدم p را فرض و تالی q را نتیجه در نظر بگیریم در این صورت نتیجه گزاره الف (یعنی q) نادرست و کل گزاره $p\to q$ را نادرست می‌دانیم و در گزاره ب: نتیجه گزاره q درست است و کل گزاره $p\to q$ درست می‌نامیم درصورتی که هم گزاره الف و هم گزاره ب هر دو درست هستند

به عبارت دیگر ارزش گزاره شرطی $p\to q$ را با ارزش تالی آن q خلط نکنید — ولی در استلزام (صفحه بعد) می‌توان مقدم p را فرض و تالی q را نتیجه در نظر گرفت چون با گزاره همیشه درست سروکار داریم.

تبصره ۱: برای اینکه در بخش‌های بعد بهتر بتوانیم در اثبات‌ها از هم‌ارزی گزاره $p\to q$ استفاده کنیم هم‌ارزی $(p\to q)\equiv(q\vee\sim p)$ را به عنوان یک تعریف در نظر می‌گیریم.

تبصره ۲: در گزاره شرطی $p\to q$ ، مقدم p را شرط کافی برای تالی q و همچنین تالی q را شرط لازم برای مقدم p می‌دانیم. بنابراین گزاره «اگر p آنگاه q» را می‌توان با هر یک از عبارات زیر بیان کرد.

q شرط لازم برای p است. شرط لازم برای p آن است که q

p شرط کافی برای q است. شرط کافی برای q آن است که p.

مثال ۱۳: معادل‌های گزاره شرطی اگر ۲ عددی فرد باشد آنگاه ۲ عددی اول است را طبق تبصره ۲ بنویسید

حل: p را ۲ عددی فرد است در نظر می‌گیریم و q را ۲ عددی اول است در نظر می‌گیریم بنابراین،

اول بودن عدد ۲ شرط لازم برای فرد بودن عدد ۲ است

شرط لازم برای فرد بودن عدد ۲ آن است که عدد ۲ اول باشد

فرد بودن عدد ۲ شرط کافی برای اول بودن عدد ۲ است

شرط کافی برای اول بودن عدد ۲ آن است که ۲ عددی فرد باشد

به تمرین ۱۷ و ۱۸ صفحه ۱۲ کتاب نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن (لین) رجوع کنید.

(۷) رابطه گزاره‌ای «اگر و فقط اگر یا» $\longleftrightarrow$ ، گزاره دوشرطی ، (شرط لازم و کافی)

رابطه $\longleftrightarrow$ که رابطه دوشرطی (ترکیب دوشرطی) نامیده می‌شود

گزاره مرکب $p\longleftrightarrow q$ که بین دو گزاره p و q قرار گیرد را یک گزاره دوشرطی می‌نامیم و خوانده می‌شود p اگر و فقط اگر q و همچنین می‌خوانیم

شرط لازم و کافی بودن p برای q آن است که ... گزاره $p\leftrightarrow q$ معادل گزاره $(p\to q)\wedge(q\to p)$ است. بنابراین گزاره دوشرطی $p\leftrightarrow q$ وقتی درست است که هر دوی p و q هم ارزش باشند.

p	q	$p\leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

جدول $p\leftrightarrow q$ به صورت مقابل است.

بنابراین:

p	q	$p\to q$	$q\to p$	$p\leftrightarrow q$	$(p\to q)\wedge(q\to p)$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

*

مثال ۱۴: ۲ عدد اول است اگر و فقط اگر ۳ فرد باشد یک گزاره دوشرطی است و معادل آن طبق جدول * به صورت «اگر ۲ عدد اول باشد آنگاه ۳ فرد است و برعکس» می‌باشد.

همچنین معادل گزاره دوشرطی «در مثلث ABC، $AB=AC$ اگر و فقط اگر $\hat{B}=\hat{C}$» به صورت زیر است:

در مثلث ABC، اگر $AB=AC$ آنگاه $\hat{B}=\hat{C}$ و برعکس.

تعریف: گزاره‌ای که در هر حالت منطقی درست باشد را گزاره راستگو (یا گزاره همیشه درست) می‌نامیم و گزاره شرطی $p\to q$ را یک استلزام می‌نامیم هرگاه همیشه درست باشد. به عبارت دیگر گزاره شرطی همیشه درست را یک استلزام می‌نامیم و با $p\Longrightarrow q$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۵: گزاره‌های زیر همیشه درست هستند چون گزاره شرطی هم هستند آنها استلزام می‌باشند.

الف) $p\to p$ ب) $(p\wedge q)\to(p\wedge q)$

ج) $p\to(p\wedge p)$ د) $p\wedge q\to p$

زیرا

p	$p\to p$
د	د
ن	د

p	$p\to p\wedge p$
د	د
ن	د

p	q	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to(p\wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

توجه ۱: در مثال قبل $p\to p \equiv p\vee\sim p$ همیشه درست است.

توجه ۲: گزاره دوشرطی همیشه درست را یک هم‌ارزی می‌نامیم و با $p\Longleftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم پس $p\Longleftrightarrow q$ معادل $(p\equiv q)$ است.

توجه ۳: در استلزام (گزاره شرطی همیشه درست) را می‌توان مقدم p را مفروض و تالی q را نتیجه در نظر گرفت.

قضیه ها در منطق ریاضی

در منطق و ریاضیات قضیه به معنی گزاره همیشه درست است و برهان قضیه، اثبات درستی آن قضیه است.

در بحث استدلال قیاسی (استدلال استنتاجی) تعاریف و قضیه ها (مخصوصاً قضیه های اسم دار) از اهمیت خاصی برخوردار هستند و به خاطر سپردن صورت آنها (و یا دیگر اثبات آن) مهم است.

قضیه ۱: فرض کنید که p و q دو گزاره هستند. آنگاه قوانین زیر برقرارند

الف) قانون جمع (قانون ادخال فاصل) $p \Longrightarrow (p \vee q)$

ب) قانون اختصار (قانون ساده کردن)

$$\begin{cases} (p \wedge q) \Longrightarrow p \\ (p \wedge q) \Longrightarrow q \end{cases}$$

ج) قانون رفع مؤلفه

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Longrightarrow q$$

برهان به کمک جدول ارزشی گزاره ها

الف)

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

ب)

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$	$(p \wedge q) \to q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	د

ج)

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \to q$
د	د	ن	د	ن	د
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	د

قضیه ۲: فرض کنید که p و q دو گزاره باشند آنگاه:

الف) قانون نفی مضاعف (نفی نقیض) $\sim(\sim p) \equiv p$

ب) قانون جابجایی $p \wedge q \equiv q \wedge p$ و $p \vee q \equiv q \vee p$

ج) قانون خودتوانی

$$\begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$$

د) قانون عکس نقیض: $(p \longrightarrow q) \equiv (\sim q \longrightarrow \sim p)$

اثبات (د) قانون عکس نقیض با کمک جدول ارزشی گزاره‌ها

p	q	$p\to q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q\to\sim q$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

قضیه ۳: (قوانین دمورگان) فرض کنید که p و q دو گزاره باشند آنگاه

الف) $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$ ب) $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

اثبات با کمک جدول ارزشی گزاره‌ها

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p\wedge\sim q$	$\sim p\vee\sim q$	$\sim p$	$\sim q$
د	د	د	د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	ن	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د	د	د	د	د
				۲	۱	۱	۲		

قضیه ۴: فرض کنید که p و q و r سه گزاره هستند، آنگاه

الف) قانون شرکت‌پذیری

$$\begin{cases} p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r \\ p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r \end{cases}$$

ب) قانون توزیع‌پذیری یا پخش‌پذیری

$$\begin{cases} p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r) \\ p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r) \end{cases}$$

ج) قانون تعدی

$$[(p\to q)\wedge(q\to r)]\Longrightarrow(p\to r)$$

اثبات (ج) با کمک جدول ارزشی

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$(p\to r)$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	$[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن	د
د	ن	د	ن	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د	د	د

قضیه ۵. فرض کنید که p و q و r و s چهار گزاره باشند آنگاه

الف) قیاس ذوالوجهین موجب (برهان قاطع دووجهی ساختنی)

$$[(p\to q)\wedge(r\to s)]\Rightarrow[(p\vee r)\to(q\vee s)]$$

$$[(p\to q)\wedge(r\to s)]\Rightarrow[(p\wedge r)\to(q\wedge s)]$$

ب) قیاس ذوالوجهین منفی (برهان قاطع دووجهی مخرب)

$$[(p\to q)\wedge(r\to s)]\Rightarrow[(\sim q\vee\sim s)\to(\sim p\vee\sim r)]$$

$$[(p\to q)\wedge(r\to s)]\Rightarrow[(\sim q\wedge\sim s)\to(\sim p\wedge\sim r)]$$

برهان: (تمرین به کمک جدول ارزشیابی)

قضیه ۶. فرض کنید p و q دو گزاره باشند، آنگاه

الف) قانون استثنایی (قانون انتزاع) $\quad [(p\to q)\wedge p]\Longrightarrow q$

ب) قیاس دفع (نقیض قانون انتزاع) $\quad [(p\to q)\wedge\sim q]\Longrightarrow\sim p$

ج) برهان خلف $\quad (p\to q)\Longleftrightarrow[(p\wedge\sim q)\to(q\wedge\sim p)]$

اثبات (ب) (به کمک جدول ارزشیابی)

p	q	$p\to q$	$\sim q$	$(p\to q)\wedge\sim q$	$[(p\to q)\wedge\sim q]\to\sim p$	$\sim p$
د	د	د	ن	ن	د	ن
د	ن	ن	د	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د

بنابراین $[(p\to q)\wedge\sim q]\Longrightarrow\sim p$ یک گزاره شرطی همیشه درست یعنی یک استلزام است

اثبات الف و ج (تمرین)

تعریف: گزاره‌ای که در هر حالت منطقی نادرست باشد را گزاره دروغگو یا تناقض (گزاره همیشه نادرست) می‌نامیم. گزاره تناقض را با c نمایش می‌دهیم.

توجه: اگر گزاره راستگو را با t نمایش دهیم در این صورت $\sim t$ یک گزاره تناقض می‌باشد.

قضیه ۷. با فرض اینکه c و t به ترتیب گزاره‌های تناقض و راستگو باشند برای هر گزاره دلخواه p داریم

الف) $\begin{cases}(p\wedge t)\Longleftrightarrow p\\(p\vee t)\Longleftrightarrow t\end{cases}$

ب) $\begin{cases}(p\vee c)\Longleftrightarrow p\\(p\wedge c)\Longleftrightarrow c\end{cases}$

ج) $\begin{cases}c\Rightarrow p\\p\Rightarrow t\end{cases}$

اثبات الف)

p	t	$p\wedge t$	$(p\wedge t)\leftrightarrow p$
د	د	د	د
ن	د	ن	د

p	t	$p\vee t$	$(p\vee t)\leftrightarrow t$
د	د	د	د
ن	د	د	د

Scanned by CamScanner

اثبات ب)

p	c	$p\vee c$	$(p\vee c)\leftrightarrow p$
د	ن	د	د
ن	ن	ن	د

p	c	$p\wedge c$	$(p\wedge c)\leftrightarrow c$
د	ن	ن	د
ن	ن	ن	د

اثبات ج)

p	t	c	$p\Rightarrow t$	$c\Rightarrow p$
د	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د

استدلال قیاسی (استدلال استنتاجی)

یکی از روش های اثبات احکام ریاضی بخصوص قضیه ها در منطق استدلال قیاسی یا روش استدلال استنتاجی است. در این روش با کمک تعریف و قضایای اثبات شده (۱۷ قضیه‌ای که در صفحات قبل یعنی قضیه های ۱ تا ۷ که بررسی شدند) یک حکم ریاضی خواسته شده را ثابت می کنیم.

مثال ۱۶: قانون عکس نقیض یعنی $(p\to q)\equiv(\sim q\to\sim p)$ را با روش استدلال قیاسی ثابت کنید.

اثبات: روش اول

$$(p\to q)\overset{\text{تعریف}}{\equiv} q\vee\sim p \underset{\text{نفی نقیض}}{\equiv}\sim(\sim q)\vee\sim p \underset{\text{جابجایی}}{\equiv}\sim p\vee\sim(\sim q)\overset{\text{تعریف}}{\equiv}(\sim q\to\sim p)$$

روش دوم

$$(p\to q)\overset{\text{تعریف}}{\equiv}\sim(p\wedge\sim q)\overset{\text{جابجایی}}{\equiv}\sim(\sim q\wedge p)\overset{\text{نفی نقیض}}{\equiv}\sim[\sim q\wedge\sim(\sim p)]\overset{\text{تعریف}}{\equiv}(\sim q\to\sim p)$$

مثال ۱۷: قانون رفع مؤلفه یعنی $[(p\vee q)\wedge\sim p]\Longrightarrow q$ را با استدلال قیاسی ثابت کنید.

اثبات:

$$[(p\vee q)\wedge\sim p]\overset{\text{جابجایی}}{\equiv}[\sim p\wedge(p\vee q)]\overset{\text{توزیع پذیری}}{\equiv}[\underbrace{(\sim p\wedge p)}_{c}\vee(\sim p\wedge q)]\equiv c\vee(\sim p\wedge q)\underset{\text{جابجایی}}{\equiv}$$

$$\equiv(\sim p\wedge q)\vee c\overset{\text{قضیه ۷}}{\equiv}\sim p\wedge q\overset{\text{اختصار}}{\Longrightarrow}q$$

مثال ۱۸: قانون انتزاع را ثابت کنید یعنی $[p\wedge(p\to q)]\Longrightarrow q$

اثبات

$$[p\wedge(p\to q)]\underset{\text{تعریف}}{\equiv}p\wedge(q\vee\sim p)\underset{\text{توزیع پذیری}}{\equiv}(p\wedge q)\vee\underbrace{(p\wedge\sim p)}_{c}\equiv(p\wedge q)\vee c\underset{\text{جابجایی}}{\equiv}$$

$$\equiv c\vee(p\wedge q)\underset{\text{قضیه ۷}}{\equiv}p\wedge q\underset{\text{قانون اختصار}}{\Longrightarrow}q$$

مثال ۱۹: ثابت کنید که $[p\to(q\wedge r)]\Longrightarrow(p\to r)$

اثبات:

$$[p\to(q\wedge r)]\overset{\text{تعریف}}{\equiv}(q\wedge r)\vee\sim p\overset{\text{جابجایی}}{\equiv}\sim p\vee(q\wedge r)\underset{\text{پذیری}}{\overset{\text{توزیع}}{\equiv}}(\sim p\vee q)\wedge(\sim p\vee r)\underset{\text{قانون ساده کردن}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow(\sim p\vee r)\overset{\text{تعریف}}{\equiv}(p\to r)$$

مثال ۲۰: قانون تفکیک دو مقدم (قانون صدور) را اثبات کنید یعنی

$$[(p\wedge q)\to r]\equiv[p\to(q\to r)]$$

اثبات:

$$[p\to(q\to r)]\overset{\text{تعریف}}{\equiv}p\to(r\vee\sim q)\overset{\text{تعریف}}{\equiv}(r\vee\sim q)\vee\sim p\underset{\text{پذیری و جابجایی}}{\overset{\text{شرکت}}{\equiv}}r\vee(\sim p\vee\sim q)\underset{\text{دمورگان}}{\overset{\text{قانون}}{\equiv}}$$

$\equiv r\vee\sim(p\wedge q)\overset{\text{تعریف}}{\equiv}[(p\wedge q)\to r]$

مثال ۲۱. ثابت کنید که

$[(p\to r)\vee(q\to s)]\equiv[(p\wedge q)\to(r\vee s)]$

اثبات:

$[(p\to r)\vee(q\to s)]\overset{\text{طبق}}{\underset{\text{تعریف}}{\equiv}}[(r\vee\sim p)\vee(s\vee\sim q)]\overset{\text{جابجایی}}{\underset{\text{شرکت پذیری}}{\equiv}}[(r\vee s)\vee(\sim p\vee\sim q)]\overset{\text{جابجایی}}{\underset{\text{و قانون دمورگان}}{\equiv}}$

$[\sim(p\wedge q)\vee(r\vee s)]\overset{\text{تعریف}}{\equiv}[(p\wedge q)\to(r\vee s)]$

مثال ۲۲: به کمک جدول ارزش‌ها نشان دهید (تمرین ۶ صفحه ۱۸ کتاب لیش)

$(p\to q)\Rightarrow[(p\wedge r)\to(q\wedge r)]$

اثبات:

p	q	r	$p\to q$	$p\wedge r$	$q\wedge r$	$(p\wedge r)\to(q\wedge r)$	$(p\to q)\Rightarrow[(p\wedge r)\to(q\wedge r)]$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	ن	د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	د	ن	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	ن	د	ن	ن	د	د

مثال ۲۳. به کمک مثال ۲۲ قضیه ۵ را ثابت کنید. (قسمت الف قسمت دوم) یعنی

$[(p\to q)\wedge(r\to s)]\Rightarrow[(p\wedge r)\to(q\wedge s)]$

اثبات: طبق مثال ۲۲ داریم:

$(p\to q)\underset{1}{\Longrightarrow}[(p\wedge r)\to(q\wedge r)]$ و $(r\to s)\underset{2}{\Longrightarrow}[(r\wedge q)\to(s\wedge q)]$

$[(p\to q)\wedge(r\to s)]\overset{\text{طبق 1}}{\underset{\text{و 2}}{\Longrightarrow}}[(p\wedge r)\to(q\wedge r)]\wedge[(r\wedge q)\to(s\wedge q)]\overset{\text{تعدی}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow[(p\wedge r)\to(s\wedge q)]$

مثال ۲۴: قضیه ۵ قسمت الف (قسمت اول) و قسمت ب (هر دو قسمت) را ثابت کنید.

اثبات: الف) قسمت اول

$[(p\to q)\wedge(r\to s)]\overset{\text{قانون}}{\underset{\text{اختصار}}{\Longrightarrow}}[p\to q]\overset{\text{قانون}}{\underset{\text{ادخال فاصل}}{\Longrightarrow}}[(p\vee r)\to(q\vee s)]$

ب) قسمت اول:

$[(p\to q)\wedge(r\to s)]\overset{\text{طبق الف}}{\underset{\text{قسمت دوم}}{\Longrightarrow}}[(p\wedge r)\to(q\wedge s)]\overset{\text{قانون}}{\underset{\text{عکس نقیض}}{\equiv}}[\sim(q\wedge s)\to\sim(p\wedge r)]\overset{\text{دمورگان}}{\equiv}$

$\equiv[(\sim q\vee\sim s)\to(\sim p\vee\sim r)]$

قسمت دوم:

$[(p\to q)\wedge(r\to s)]\overset{\text{طبق الف}}{\underset{\text{قسمت اول}}{\Longrightarrow}}[(p\vee r)\to(q\vee s)]\overset{\text{قانون}}{\underset{\text{عکس نقیض}}{\equiv}}[\sim(q\vee s)\to\sim(p\vee r)]\overset{\text{دمورگان}}{\equiv}$

$\equiv[(\sim q\wedge\sim s)\to(\sim p\wedge\sim r)]$

مثال ۲۵ . (تمرین ۲۰ صفحه ۲۳) ثابت کنید یعنی

$$[(p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(\sim q\vee\sim s)]\Longrightarrow(\sim p\vee\sim r)$$

اثبات :

$$[(p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(\sim q\vee\sim s)] \xRightarrow[\text{قسمت ب}]{\text{قضیه ۵}} [(\sim q\vee\sim s)\to(\sim p\vee\sim r)]\wedge(\sim q\vee\sim s) \xRightarrow[\text{استنتاج}]{\text{قانون}} (\sim p\vee\sim r)$$

مثال ۲۶ : تمرین ۱۹ صفحه ۲۳ را ثابت کنید یعنی

$$[(p\to q)\wedge(p\to r)]\wedge p\Longrightarrow(q\wedge r)\ ,$$

اثبات :

$$[(p\to q)\wedge(p\to r)]\wedge p \xRightarrow[\text{قسمت الف}]{\text{قضیه ۵}} [(p\wedge p)\to(q\wedge r)]\wedge p \overset{\text{خودتوانی}}{\equiv} [p\to(q\wedge r)]\wedge p \xRightarrow[\text{استنتاج}]{\text{قانون}} (q\wedge r)$$

مثال ۲۷ : تمرین ۱۲ صفحه ۲۳ را ثابت کنید یعنی

$$[(p\to q)\vee(p\to r)]\Longleftrightarrow[p\to(q\vee r)]$$

اثبات :

$$[(p\to q)\vee(p\to r)] \overset{\text{طبق مثال}}{\underset{۲۱}{\equiv}} [(p\wedge p)\to(q\vee r)] \overset{\text{خودتوانی}}{\equiv} [p\to(q\vee r)]$$

بخش ۲ «گزاره‌نما و سورها و قواعد تسویر»

عالم سخن یا حوزه سخن مجموعه‌ای است از اشیا که از اعضای آن سخن می‌گوییم و با U نمایش می‌دهیم.

مثال ۱: الف) تمام انسان‌ها میرا هستند (می‌میرند)، عالم سخن مجموعه تمام انسان‌ها است.

ب) برخی از مارها سمی هستند، عالم سخن مجموعه همه مارها است.

ج) برخی از دانشجویان باهوش و پرکار هستند، عالم سخن مجموعه تمام دانشجویان است.

تعریف (گزاره‌نما) گزاره‌نما عبارتی است که شامل یک یا چند متغیر است و هرگاه به جای این متغیرها عضوی از عالم سخن قرار دهیم تبدیل به یک گزاره می‌شود.

مثال ۲: الف) عبارت $x+3=2$ یک گزاره نیست ولی اگر به جای x عضوی از مجموعه اعداد صحیح به عنوان عالم سخن قرار دهیم به یک گزاره تبدیل می‌شود. برای نمونه $x=5$ به یک گزاره نادرست می‌رسیم و $x=-1$ به یک گزاره درست می‌رسیم. پس $x+3=2$ یک گزاره‌نما است.

ب) x یک عدد اول است یک گزاره‌نما است و عالم سخن مجموعه اعداد طبیعی است.

ج) x نویسنده کتاب بینوایان است یک گزاره‌نما است و عالم سخن مجموعه تمام انسان‌ها است.

د) x یک مثلث قائم‌الزاویه است یک گزاره‌نما است و عالم سخن مثلث‌های واقع در صفحه است.

قرارداد و نمادگذاری: عالم سخن را با U نمایش می‌دهیم و گزاره‌نمایی که شامل یک متغیر است را با $P(x)$ و همچنین گزاره‌نمایی که شامل دو متغیر است را با $P(x,y)$ و $q(x,y)$ نمایش می‌دهیم.
بنابراین برای $x=a\in U$، $P(a)$ یک گزاره است و برای $a,b\in U$، $P(a,b)$ یک گزاره است.

مجموعه جواب (یا مجموعه درستی) یک گزاره‌نما. فرض کنید که $P(x)$ یک گزاره‌نما با عالم سخن U باشد. مجموعه جواب یا مجموعه درستی $P(x)$ عبارت است از مجموعه همه عناصری از U که به ازای هر یک از آن‌ها $P(x)$ به یک گزاره درست تبدیل می‌شود. اگر D مجموعه جواب (درستی) $P(x)$ باشد می‌نویسیم $D=\{x\in U \mid P(x)\}$.

مثال ۳: مجموعه جواب گزاره‌نمای $x+1<5$ با مجموعه (عالم سخن) $\mathbb{N}$ عبارت است از $D=\{1,2,3\}$
اگر عالم سخن را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیریم در این صورت $D=\{3,2,1,0,-1,-2,\dots\}$ است
و اگر عالم سخن را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم در این صورت $D=(-\infty,4)$ است.

تعریف (سور) عبارت‌های «برای هر» و «وجود دارد» را سور می‌نامیم و به ترتیب آن‌ها را با $\forall$ و $\exists$ نمایش می‌دهیم.

سورها را به دو دسته تقسیم‌بندی می‌کنیم: سور عمومی و سور وجودی.

سور عمومی: اگر U عالم سخن باشد، «به ازای هر x در عالم سخن U» را سور عمومی می‌نامیم و با $\forall x$ نمایش می‌دهیم.

سور وجودی: اگر U عالم سخن باشد، «حداقل یک x از عالم سخن U وجود دارد بطوریکه» را سور وجودی می‌نامیم و با نماد $\exists x$ نمایش می‌دهیم.

در حالت کلی: گزاره‌نمای $\forall x \in U : P(x)$ بیان می‌دارد که $P(x)$ برای همه xها در U را سور عمومی می‌نامیم.

و گزاره‌نمای $\exists x \in U : P(x)$ بیان می‌دارد که $P(x)$ برای بعضی از اعضای U را سور وجودی می‌نامیم.

تبصره ۵: عبارات «برای همه» و «برای هر» و «به ازای هر» و «هر» و «برای تمام» معادل هستند و عبارات «وجود دارد» و «هست» و «یافت می‌شود» و «برای برخی مقادیر» معادل هستند.

مثال ۴: الف) همه انسانها فانی هستند (سور عمومی)

ب) همه اعداد زوج بر ۲ قابل قسمت هستند (سور عمومی)

ج) حداقل یک نفر است که فانی است (سور وجودی)

د) وجود دارد یک x که فرد است و از ۳ بزرگتر است (سور وجودی)

تبصره: در ریاضیات مقدماتی معمولاً از سورها ($\forall x$ و $\exists x$) صرف نظر می‌شود و از روی ظاهر آن با یک کمی اطلاعات ریاضی می‌توان تشخیص داد که سور عمومی است یا سور وجودی

مثال ۵: الف) $x^2-1=(x-1)(x+1)$ (اتحاد مزدوج) یک سور عمومی است و $\forall x \in \mathbb{R}$ برقرار است.

ب) $x+1=2x+3$ (معادله است) یک سور وجودی است و برای $x=-2$ درست است سپس $\underbrace{\exists x \in \mathbb{R}}$: $x+1=2x+3$ مورد نظر است

قوانین نقض سورها: فرض کنید که $P(x)$ یک گزاره‌نما باشد و U عالم سخن $P(x)$ باشد آنگاه

الف) نقیض سور عمومی

$$\sim(\forall x \in U : P(x)) \equiv \exists x \in U : \sim P(x)$$

ب) نقیض سور وجودی

$$\sim(\exists x \in U : P(x)) \equiv \forall x \in U : \sim P(x)$$

مثال ۶: نقیض گزاره همه مارها سمی هستند عبارت است از بعضی از مارها سمی نیستند یا وجود دارد ماری که سمی نیست یا حداقل یک مار هست که سمی نیست.

مثال ۷: نقیض گزاره حداقل یک انسان است که فانی است عبارت است از همه انسانها فانی نیستند.

توجه: (۱) در بیان سورها وقتی مجموعه مرجع (عالم سخن) معلوم است و U عالم سخن است معمولاً به جای $x\in U$ می‌نویسیم $\forall x$ برای سور عمومی و $\exists x$ برای سور وجودی.
بنابراین در نقیض سورهای عمومی و وجودی به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\sim(\forall x: p(x)) \equiv \exists x: \sim p(x) \quad \text{و} \quad \sim(\exists x: p(x)) \equiv \forall x: \sim p(x)$$

(۲) در ترکیب سورها عطفی و فصلی به صورت زیر از قانون دمورگان استفاده می‌کنیم

$$\sim(\forall x: q(x)\wedge p(x)) \equiv \exists x: \sim q(x) \vee \sim p(x)$$

$$\sim(\exists x: q(x)\vee p(x)) \equiv \forall x: \sim q(x) \wedge \sim p(x)$$

مثال ۷: اگر عالم سخن $U=\mathbb{R}$ باشد نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید:

الف) $\forall x \ (x^2 \geq 0$ و $|x|<0)$

ب) $\exists x \ (x+1=0$ یا $x-1=0)$

حل، الف) $\exists x \ (x^2<0$ یا $|x|\geq 0)$

ب) $\forall x \ (x+1\neq 0$ و $x-1\neq 0)$

(۳) برای نقیض سورهای عمومی و وجودی که گزاره‌های $p(x)$ به صورت شرطی یا دوشرطی هستند باید معادل گزاره شرطی (یعنی $p\to q \equiv q\vee\sim p$) و معادل گزاره دوشرطی نوشت و سپس از توجه (۲) کمک گرفت.

$$\boxed{(p\leftrightarrow q) \equiv (p\to q)\wedge(q\to p)}$$

مثال ۸: نقیض گزاره $\forall \varepsilon \ \exists \delta \ \forall x \ (|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)|<L)$ را بنویسید

حل. در مرحله اول معادل $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<L$ را می‌نویسیم که می‌شود.

$$(|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<L) \equiv \sim(|x-a|<\delta) \vee (|f(x)-f(a)|<L)$$

سپس آن را نقیض می‌کنیم:

$$\exists \varepsilon \ \forall \delta \ \exists x \ (|f(x)-f(a)|\geq L \ \wedge \ |x-a|\geq \delta)$$

مثال ۹: نقیض گزاره اگر من درس مبانی ریاضی را بخوانم آنگاه موفق می‌شوم را بنویسید.

جواب: درس مبانی ریاضی را خواندن $=p$ و موفق شدن را q در نظر می‌گیریم

$$\sim(p\to q) \equiv \sim(q\vee\sim p) \equiv \sim q\wedge p$$

پس

بنابراین نقیض گزاره به صورت زیر است:

من درس مبانی ریاضی را خوانده‌ام و موفق نشده‌ام.

تمرین: نقیض سورهای زیر را بنویسید.

۱) هر که آمد عمارتی نو ساخت ۲) هر چیزی اگر کلاغ است آنگاه سیاه است

۳- هر مسلمان راستگو است ۴) چیزی است که سیاه است و کلاغ نیست

۵) شرط لازم برای شناخت خدا شناخت خود می‌باشد.

۶) هیچ گلی بی خار نیست ۷) هر مربی کودک را دوست دارد.

۸)

$$\forall x \; \exists y \, (p(x) \wedge q(y))$$

۹)

$$\exists x \; \forall y \, (p(x) \vee q(y))$$

توجه: معمولاً سوری که شامل هیچ عضوی از عالم سخن نمی‌شود را سور صفری می‌نامند و این سور با هیچ شروع می‌شود. برای اینکه بتوان نقیض آن نوشت معادل آن یک سور عمومی است.
مثلاً هیچ کودکی مدرسه نمی‌رود معادل همه کودکان راه نمی‌روند است (یعنی هر کودکی که انتخاب کنیم راه نمی‌رود)
هیچ گلی بی خار نیست یعنی همه گل‌ها خار دارند.

بخش ۳

برهان درستی

یکی از مهمترین وظایف یک منطق دان، آزمون حکم ها است. یک حکم تصدیق این است که گزاره ای به نام نتیجه از گزاره های دیگری به نام مفروضات یا مقدمات، بدست می آید.

یک حکم، درست تلقی می شود هرگاه ترکیب عطفی مفروضات نتیجه را ایجاب کند. به عبارت دیگر اگر گزاره های p و q و r مفروضات باشند و نتیجه s باشد آیا $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s$ یک حکم است (گزاره همیشه درست یا استلزام است)

در کتاب نظریه مجموعه ها و کاربردهای آن ((الین)) حکم $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s$ را به صورت ستونی مانند مقابل نوشته می شود

مفروضات
$$\left.\begin{array}{l} \text{ف ۱} : p \\ \text{ف ۲} : q \\ \text{ف ۳} : r \end{array}\right\}$$
$$\overline{\text{ن} : s}$$
نتیجه

در بخش های قبل دو روش برای درستی حکم بیان شد که یکی استفاده از جدول ارزشی گزاره ها بود و دیگری روش استدلال قیاسی (یا روش استنتاجی) بود که به هر دوی آن بطور کامل پرداختیم. در این بخش روش سومی که به برهان درستی معروف است می پردازیم.

همانطور که در پاراگراف اول بیان گردید برهان درستی روشی برای درستی یک حکم است.

در این روش برای بیان برهان درستی، فرض ها و گزاره هایی که از فرض ها نتیجه می شود در یک طرف می نویسیم و در هر مرحله دلیل (یا توجیه) آن را کنارش ذکر می کنیم. در هر مرحله توجیه مشخص می کند که گزاره این مرحله از کدام گزاره های قبلی و چه قانون (یا قاعده ای) بدست آمده است و در آخرین مرحله نتیجه را با خطی کج مانند / از فرض ها جدا می کنیم.

مثال ۱: حکم زیر را به صورت نمادین بنویسید:

اگر او پزشکی می خواند آنگاه درآمد خوبی در انتظارش است

اگر به تحصیل هنر می پردازد، آنگاه زندگانی خوبی در انتظارش است

اگر درآمد خوبی در انتظارش است یا زندگانی خوبی در انتظارش است، شهریه ای که به دانشگاه می پردازد به هدر نرفته است

شهریه دانشگاه او به هدر رفته است.

بنابراین او نه پزشکی می‌خواند و نه هنر تحصیل می‌کند

حل: اگر پزشکی می‌خواند را با P و درآمد خوبی در انتظارش است را با D و با تحصیل هنر می‌پردازد را با T و زندگانی خوبی در انتظارش است را با Z و شهریه دانشگاه او به هدر رفته است را با S نمایش می‌دهیم

بنابراین می‌توان نوشت:

فرض ۱	$P \to D$	مستقیم
فرض ۲	$T \to Z$	
فرض ۳	$D \vee S \to \sim S$	
ف ۴	S	
نتیجه	$\sim P \wedge \sim T$	

ردنفی

$$\{(P\to D)\wedge(T\to Z)\wedge[(D\vee S\to \sim S]\wedge S\} \Longrightarrow (\sim P\wedge \sim T)$$

قبلاً مسئله آن را به صورت جدول ارزشیابی و استدلال قیاسی را بررسی کرده‌ایم؟

حال برهان صوری درستی حکم بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

۱) $P\to D$ (ف)

۲) $T\to Z$ (ف)

۳) $D\vee Z\to \sim S$ (ف)

۴) $S \;/\; \therefore \sim P\wedge\sim T$ (ف/ن)

۵) $\sim(D\vee Z)$ طبق ۳ و ۴ و قیاس رفع

۶) $\sim D\wedge\sim Z$ طبق ۵ و دمورگان

۷) $\sim D$ طبق ۶ و اختصار

۸) $\sim Z$ طبق ۶ و اختصار

۹) $\sim P$ طبق ۱ و ۷ و قیاس رفع

۱۰) $\sim T$ طبق ۲ و ۸ و قیاس رفع

۱۱) $\sim P\wedge\sim T$ طبق ۹ و ۱۰ و قانون عطف

ف ۱	p	$(P\to D)$
ف ۲	q	$(T\to Z)$
ن $\therefore$	$p\wedge q$	$(P\to D)\wedge(T\to Z)$

توضیح: در مرحله ۱۱، حکم مقابل که با روش منطقی معتبر است و قانون عطف خوانده می‌شود به کار برده‌ایم (یعنی $p\wedge q$)

توجه: برهان درستی یک حکم داده شده، دنباله‌ای از گزاره‌ها است که هر یک یا فرض حکم است یا از گزاره‌های قبلی یا حکمی که درستی آن شناخته شده است به دست آمده است و با نتیجه حکم ختم می‌شود. این برهان درستی را برهان مستقیم می‌نامیم. یک روش دیگر برهان، روش برهان غیرمستقیم یا روش برهان خلف است که در این روش برای اثبات یک حکم مفروض، نقیض نتیجه را با مفروضات حکم می‌افزاییم و سپس

یک تناقض بدست می آوریم. با بدست آوردن تناقض برهان کامل می شود.

مثال ۲: یک برهان غیرمستقیم برای درستی حکم زیر بیاورید

$p \vee q \to r$
$s \to p \wedge u$
$q \vee s \;/\therefore r$

برهان: روش برهان خلف (غیرمستقیم)

برای صرفه جویی در کاغذ در سه ستون می نویسیم:

1) $p \vee q \to r$
2) $s \to p \wedge u$
3) $q \vee s \;/\therefore r$
4) $\sim r$ برهان خلف

5) $\sim(p \vee q)$ ف ۱ و ۴ و قیاس رفع
6) $\sim p \wedge \sim q$ ف ۵ و دمورگان
7) $\sim p$ ف ۶ و اختصار
8) $\sim q$ ف ۶ و اختصار
9) s ف ۳ و ۸ و رفع مؤلفه

10) $p \wedge u$ ف ۲ و ۹ و قیاس استثنایی
11) p ف ۱۰ و اختصار
12) $p \wedge \sim p$ عطف ۷ و ۱۱ و قانون عطف

گزاره $p \wedge \sim p$ در مرحله ۱۲ یک تناقض است. پس برهان غیرمستقیم درستی کامل است

توجه و نکته: تا اکنون در این درس چهار روش برای برهان یک حکم ریاضی بیان کرده ایم که عبارتند از

۱) روش استفاده از جدول ارزشی گزاره ها ۳) برهان مستقیم (برهان درستی)
۲) روش استدلال قیاسی ۴) برهان غیرمستقیم (برهان خلف)

آیا روش های دیگری هم وجود دارد؟

جواب مثبت است. علاوه بر چهار روش قبل روش های دیگری هم برای اثبات یک حکم ریاضی (تحلیل - ترکیب) وجود دارد که برخی از آنها عبارتند از

۵) روش استقرای ریاضی (اصل استقرای ریاضی) ۶- روش مثال نقض ۷- یا روش انتفای مقدم
۸) روش تساوی عکس نقیض ۹- روش رسم شکل ۱۰) روش جدول (نظام دار) ۱۱) روش الگویابی
۱۲) روش زیر مسئله، ۱۴) روش معادله ۱۵- مسئله را دانسته فرض کردن.

بخش ۴

استقرای ریاضی

برای اثبات درستی یک حکم ریاضی $P(n)$ مربوط به عدد طبیعی n، روشی بنام اصل استقرای ریاضی وجود دارد که به صورت زیر شرح می دهیم:

استقرای ریاضی: اگر گزاره $P(n)$ که شامل عدد طبیعی n است طوری باشد که

(۱) $P(1)$ درست باشد (شروع استقرای ریاضی)

(۲) به ازای هر عدد طبیعی K،

$$\underbrace{P(K)}_{\text{فرض استقرای ریاضی}} \Rightarrow \underbrace{P(K+1)}_{\text{حکم استقرای ریاضی}}$$

آنگاه $P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

توجه: در روش اصل استقرای ریاضی $P(1)$ شروع استقرای ریاضی را بررسی می کنیم (گاهی وقت ها لازم است که $P(2)$ هم ثابت کنیم) و $P(K)$ را به عنوان فرض استقرای ریاضی درنظر می گیریم و به اثبات حکم ریاضی می پردازیم یعنی $P(K+1)$ را ثابت می کنیم سپس طبق اصل استقرای ریاضی $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

مثال ۱: ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n،

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

اثبات: به روش استقرای ریاضی روی n،

$$P(n): 1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

شروع استقرای ریاضی: $P(1)$ درست است زیرا

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=1 .$$

فرض استقرای ریاضی: فرض کنید که $P(K)$ درست باشد (یعنی برای $n=K$ درست است) پس

$$P(K): 1+2+3+\dots+K=\frac{K(K+1)}{2}$$

حکم استقرای ریاضی: نشان می دهیم که $P(K+1)$ (برای $n=K+1$) درست است

$$P(K+1): 1+2+3+\dots+K+(K+1)=\frac{K(K+1)}{2}+(K+1)=\frac{K(K+1)+2(K+1)}{2}=\frac{(K+1)((K+1)+1)}{2}$$

پس: طبق اصل استقرای ریاضی برای هر $n\in\mathbb{N}$ درست است.

تبصره: در استقرای ریاضی می توان بجای شروع استقرای ریاضی یعنی $n=1$ از $n=0$ یا $n=m$ شروع کرد که در این صورت $P(n)$ برای اعداد حسابی $\{0, 1, 2, \dots\}$ ثابت می شود یا $P(n)$ برای مجموعه $\{m, m+1, \dots\}$ که زیر مجموعه ای از اعداد طبیعی است ثابت می شود.

توجه: مثال ۱ را می‌توان با کمک روش دیگر که با روش دانسته فرض کردن مسئله معروف است حل کرد.

در روش دانسته فرض کردن مسئله (حل مثال ۱) فرض کنید که (*) $1+2+3+\cdots+n = S$ باشد

(**) $n+(n-1)+\cdots+2+1 = S$

رابطه * را یکبار اعداد را تا n را با صورت نزولی جمع می‌کنیم

این دو رابطه (*) و (**) را با هم جمع می‌کنیم در این صورت $\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n \text{ بار}} = 2S$

بنابراین $2S = n.(n+1)$ یعنی $1+2+3+\cdots+n = S = \frac{n(n+1)}{2}$

در روش مسئله را دانسته فرض کردن: فرض می‌کنیم که مسئله طریقی که خواسته شده است درست فرض می‌کنیم سپس به کمک اعمال ریاضی قابل قبول به جواب و حل مسئله می‌رسیم.

مثال ۲: ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n
$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$
یعنی مجموعه n عدد طبیعی فرد از آن (2n-1) برابر n^2 است.

حل: به روش استقرای ریاضی: $P(n): 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

شروع استقرای ریاضی (n=1) درست است زیرا $P(1): 2\times1-1 = 1 = (1)^2$

فرض استقرای ریاضی: فرض کنید که P(K) درست باشد یعنی $P(K): 1+3+5+\cdots+(2K-1) = K^2$

حکم استقرای ریاضی: نشان می‌دهیم که P(K+1) درست است یعنی $1+3+5+\cdots+(2K-1)+(2K+1) = (K+1)^2$

اثبات حکم استقرای ریاضی: $1+3+5+\cdots+(2K-1)+(2K+1) \underset{\text{فرض استقرا}}{\overset{\text{طبق}}{=}} K^2+(2K+1) = (K+1)^2$

پس طبق اصل استقرای ریاضی P(n) برای هر n برقرار است.

روش دوم برای مثال ۲ (روش دانسته فرض کردن مسئله) فرض کنید که $1+3+5+\cdots+(2n-1) = S$ (*)

بنابراین $S = 1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1)$ (**)

با جمع طرفین تساوی * و (**) با هم داریم. $\underbrace{2n+2n+\cdots+2n}_{n \text{ بار}} = 2S$

بنابراین $n\times 2n = 2S$ یعنی $2n^2 = 2S$ پس $1+3+5+\cdots+(2n-1) = S = n^2$

مثال ۳: ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۳، $2^n > 2n+1$

اثبات: با روش استقرای ریاضی نشان می‌دهیم برای $n \geq 3$: $P(n): 2^n > 2n+1$

شروع استقرای ریاضی P(3) درست است زیرا $8 = 2^3 > 2\times3+1 = 5$ ($8 > 5$ درست است)

فرض استقرای ریاضی: فرض کنید که $P(k)$ درست باشد $(k\geq 3)$ $\quad P(k):\ 2^k > 2\times k+1$

حکم استقرای ریاضی: نشان می‌دهیم که $P(k+1)$ درست است یعنی $\quad 2^{k+1} > 2(k+1)+1$

اثبات حکم استقرای ریاضی: طبق فرض داریم که $2^k > 2k+1$ و چون $2^k > 2$ برای هر $k\in \mathbb{N}$ درست است پس
با جمع کردن طرفین این دو نامساوی داریم $\quad 2^k+2^k > 2+2k+1 = 2k+3 = 2(k+1)+1$

پس $2^{k+1} = 2\times 2^k > 2(k+1)+1$ بنابراین طبق اصل استقرای ریاضی $P(n)$ برای $n\geq 3$ برقرار است.

مثال ۴: برای هر $n\geq 5$ ثابت کنید که $2^n > n^2$ برای $n\geq 5$.

اثبات: با کمک استقرای ریاضی روی n مسئله را ثابت می‌کنیم $\quad P(n):\ 2^n > n^2,\ n\geq 5$

شروع استقرای ریاضی: $P(5)$ درست است زیرا $\quad 32 = 2^5 > 5^2 = 25$

فرض استقرای ریاضی: فرض کنید که $P(k)$ برای $k\geq 5$ درست باشد یعنی، $\quad 2^k > k^2$

حکم استقرای ریاضی: نشان می‌دهیم که $P(k+1)$ درست است یعنی، $\quad 2^{k+1} > (k+1)^2$

اثبات حکم استقرای ریاضی. طبق فرض برای هر $k\geq 5$ داریم $2^k > k^2$ و طبق مثال قبل داریم $2^k > 2k+1$ برای $k\geq 3$ چون $2^k > 2k+1$ برای $k\geq 5$ هم برقرار است پس با جمع دو نامساوی $2^k > 2k+1$ و $2^k > k^2$ داریم: $\quad 2^k+2^k > 2k+1+k^2$

پس $\quad 2^{k+1} = 2\times 2^k > (k+1)^2$.

بنابراین طبق اصل استقرای ریاضی $P(k+1)$ برقرار است، یعنی $\quad \forall n\geq 5:\ 2^n > n^2$

تبصره: به روش استقرای ریاضی می‌توان برخی از اشیای ریاضی را تعریف کرد. (روی مجموعه اعداد طبیعی)

مثال ۵: (تعریف توان‌های یک متغیر یا مجهول). فرض کنید که x یک متغیر یا مجهول باشد در این صورت

① $x^1 = x$ و برای هر عدد طبیعی n قرار می‌دهیم ② $x^{n+1} = x^n\cdot x$

با دو تساوی ① و ② تمام توان‌های طبیعی معین می‌گردد. پس $x\cdot x = x^2$ و $x^2\cdot x = x^3$ و ...

مثال ۶: تعریف $n!$، طبق روش استقرای ریاضی: ① $0! = 1$ ، $1! = 1$ ② $n! = n(n-1)!$

تساوی ① و ② تعریف $n!$ را می‌دهد بنابراین: $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \cdots = n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$

به عبارت دیگر $n! = 1\times 2\times 3\times \cdots \times (n-1)\times n$.

مثال ۷. تعریف نماد $C(n,r)$ که معمولاً در آمار و احتمال با $\binom{n}{r}$ (که در ترکیب استفاده می‌کنیم) نمایش داده می‌شود.

برای هر عدد طبیعی دلخواه n و عدد صحیح r نماد $C(n,r)$ به صورت مقابل تعریف می‌شود.

$$① \begin{cases} C(0,0)=1 \\ C(0,r)=0 \quad r\neq 0 \end{cases}$$

$$② \quad C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$$

به عبارت دیگر $① \; C(0,r)=\begin{cases} 0 & r\neq 0 \\ 1 & r=0 \end{cases}$ و $② \; C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,n-1)$

دو تساوی ① و ② نماد $C(n,r)$ برای هر عدد طبیعی n و عدد صحیح r تعریف می‌شود.

قضیه: اگر n و r اعداد صحیح باشند که $0\le r\le n$ آنگاه $C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

اثبات: به روش استقرای ریاضی روی n

شروع استقرای ریاضی $n=0$ بنابراین $0\le r\le 0$ (یعنی $r=0$) طبق مثال ۷ داریم $n=0, r=0: \; C(0,0)=1$

از طرفی $1=\frac{1}{1}=\frac{0!}{0!(0-0)!}$ پس $C(0,0)=\frac{0!}{0!(0-0)!}$.

می‌توان شروع استقرای ریاضی را از $n=1$ شروع کرد. در این صورت $0\le r\le 1$ پس $r=0$ و $r=1$.

$$n=1, r=0 \Rightarrow C(1,0)=C(1-1,0)+C(1-1,0-1)=C(0,0)+C(0,-1)=1+0=1$$

حال چون $1=\frac{1!}{0!(1-0)!}$ پس $C(1,0)=\frac{1!}{0!(1-0)!}$.

$$n=1, r=1 \Rightarrow C(1,1)=C(1-1,1)+C(1-1,1-1)=C(0,1)+C(0,0)=0+1=1$$

از طرفی $1=\frac{1}{1}=\frac{1!}{1!(1-1)!}$ پس $C(1,1)=\frac{1!}{1!(1-1)!}$.

فرض استقرای ریاضی $n=k$: فرض کنید که $C(k,k)=\frac{k!}{r!(k-r)!}$ که $0\le r\le k$

حکم استقرای ریاضی $n=k+1$ ثابت می‌کنیم که $C(k+1,r)=\frac{(k+1)!}{r!(k+1-r)!}$ که $0\le r\le k+1$

اثبات حکم استقرای ریاضی:

$$C(k+1,r)=C(k+1-1,r)+C(k+1-1,r-1)=$$

$$=C(k,r)+C(k,r-1)=\frac{k!}{r!(k-r)!}+\frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!}=\frac{k!}{r!(k-r)!}\times\frac{(k+1-r)}{(k+r-1)}+$$

$$+\frac{k!}{(r-1)!(k+1-r)!}\times\frac{r}{r}=\frac{k!(k+1-r)}{r!(k+1-r)!}+\frac{r\times k!}{r!(k+1-r)!}=\frac{k![k+1-r+r]}{r!(k+1-r)!}=$$

$$=\frac{k!(k+1)}{r!(k+1-r)!}=\frac{(k+1)!}{r!(k+1-r)!}$$

بنابراین طبق اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی و هر عدد صحیح r که $0\le r\le n$ رابطه $C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ برقرار است.

قضیه (دو جمله ای) اگر x و y دو متغیر و n عددی طبیعی باشد آنگاه:

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + \cdots + C(n,r)x^{n-r}y^r + \cdots + C(n,n)y^n$$

اثبات: با روش استقرای ریاضی روی n

شروع استقرای ریاضی $n=1$ بدیهی است که:

$$(x+y)^1 = x+y = 1x+1y = C(1,0)x + C(1,1)y$$

زیرا طبق قضیه قبل $C(1,1)=\frac{1!}{1!(1-1)!}=\frac{1}{1}=1$ و $C(1,0)=\frac{1!}{0!(1-0)!}=\frac{1}{1}=1$

فرض استقرای ریاضی: فرض کنید که برای $n=k$ داشته باشیم:

$$(x+y)^k = C(k,0)x^k + C(k,1)x^{k-1}y + \cdots + C(k,2)x^{k-2}y^2 + \cdots + C(k,k)y^k$$

حکم استقرای ریاضی: نشان می دهیم که برای $n=k+1$ داریم:

$$(x+y)^{k+1} = C(k+1,0)x^{k+1} + C(k+1,1)x^k y + \cdots + C(k+1,2)x^{k+1-2}y^2 + \cdots + C(k+1,k+1)y^{k+1}$$

اثبات حکم استقرای ریاضی:

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k \xlongequal[\text{فرض استقرا}]{\text{طبق}} (x+y)\big[C(k,0)x^k + C(k,1)x^{k-1}y + C(k,2)x^{k-2}y^2 + \cdots + C(k,r)x^{k-r}y^r + \cdots + C(k,k-1)xy^{k-1} + C(k,k)y^k\big] =$$

$$= \big[C(k,0)x^{k+1} + C(k,1)x^k y + C(k,2)x^{k-1}y^2 + \cdots + C(k,r)x^{(k-r+1)}y^r + \cdots + C(k,k+1)x^2y^{k-1} + C(k,k)xy^k\big] + \big[C(k,0)x^k y + C(k,1)x^{k-1}y^2 + C(k,2)x^{k-2}y^3 + \cdots + C(k,r)x^{k-r}y^{r+1} + \cdots + C(k,k-1)xy^k + C(k,k)y^{k+1}\big] =$$

(طبق تمرین ۲ کتاب که بعد از قضیه حل شده است

$$\begin{cases} C(k,0)=C(k+1,0)=1 \\ C(k,k)=C(k+1,k+1)=1 \end{cases}$$

$$= C(k+1,0)x^{k+1} + [C(k,1)+C(k,0)]x^k y + [C(k,2)+C(k,1)]x^{k-1}y^2 + \cdots + [C(k,r)+C(k,k-1)]x^{(k-r+1)}y^r + \cdots + [C(k,r)+C(k,r-1)]xy^k + C(k+1,k+1)y^{k+1} = C(k+1,0)x^{k+1} + C(k+1,1)x^k y + \cdots + C(k+1,r)x^{(k+1-r)}y^r + \cdots + C(k+1 \quad + C(k+1,k+1)y^{k+1} =$$ طرف دوم حکم

پس طبق اصل استقرای ریاضی حکم خواسته شده در قضیه برقرار است.

مثال ۶: (تمرین ۲ کتاب): نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n، $C(n,0)=1=C(n,n)$

حل: طبق قضیه داریم:

$$C(n,n)=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!\times 0!}=\frac{1}{1}=1$$

$$C(n,0)=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=\frac{1}{1}=1$$

$$\Rightarrow C(n,0)=C(n,n)=1 \quad \forall n\in N$$

مثال (روش دیگری برای حل تمرین ۳ کتاب) ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n

$$C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n)=2^n$$

حل: طبق قضیه دوجمله‌ای اگر $x=y=1$ انتخاب کنیم در این صورت

$$(1+1)^n=C(n,0)1^n+C(n,1)1^{n-1}\times 1+\cdots+C(n,n)1^n$$

$$\Rightarrow 2^n=C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\cdots+C(n,n)$$

روش دیگر برای اثبات این مسئله روش استقرای ریاضی است که به عنوان تمرین در نظر گرفته شده است.

فصل دوم

روشهای اثبات قضیه های ریاضی:

قضیه های ریاضی از نظر نوع به دو دسته تقسیم می‌شوند. ۱) قضیه های کلی ۲) قضیه های جزئی.

قضیه های کلی همانند سورهای عمومی احکام درستی هستند که برای همه اعضای عالم سخن برقرار هستند.

قضیه های جزئی احکام درستی هستند که برای بعضی از اعضای عالم سخن برقرار هستند.

مثال ۱: برای هر دو عدد حقیقی نامنفی x و y نامساوی $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$ برقرار است.

یک قضیه کلی است. $\frac{x+y}{2}$ = میانگین حسابی بین دو عدد x و y و $\sqrt{xy}$ میانگین هندسی دو عدد x و y است

این قضیه بیان می‌کند که برای هر دو حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) میانگین حسابی $\ge$ میانگین هندسی

مثال ۲: سه عدد صحیح مانند x و y و z موجودند بطوری که مجموع و حاصل ضرب آنها با هم مساوی است. یعنی

$$x+y+z=xyz$$

یک قضیه جزئی است.

روشهای اثبات قضیه های کلی و قضیه های جزئی با هم فرق دارند. در مثال ۱: دو عدد نامنفی x و y به دلخواه انتخاب می‌کنیم ولی پس از انتخاب آنها را ثابت فرض می‌کنیم و برای اثبات نامساوی دلیل می‌آوریم مثلاً برای نمونه

چون $(x-y)^2\ge 0$ پس $x^2-2xy+y^2\ge 0$ پس $x^2+y^2\ge 2xy$ چون x و y نامنفی هستند می‌توانیم به طرفین نامساوی $2xy$ اضافه کنیم پس: $(x+y)^2\ge 4xy$ حال از طرفین جذر می‌گیریم و به $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ می‌رسیم و بنابراین $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$.

برای مثال ۲ که قضیه جزئی است کافی است سه عدد $x=1$ و $y=2$ و $z=3$ انتخاب کرد و دید که $1+2+3=1\times2\times3$
بنابراین حکم محقق می‌شود.

برای رد کردن یک قضیه کلی می‌توان از مثال نقض کمک گرفت (زیرا نقیض قضیه کلی یک قضیه جزئی است که با یک مثال محقق می‌شود. این روش که برای رد کردن قضیه کلی است را روش مثال نقض می‌نامیم.

مثال ۳: حکم هر عدد طبیعی مجموع سه مربع کامل است یک حکم کلی است برای رد کردن این حکم کافی است که یک عدد طبیعی پیدا کنیم که (مانند عدد ۷) که نمی‌تواند مجموع سه مجذور باشد پس حکم کلی رد می‌شود.

تبصره ۵: چون بیشتر قضیه‌ها به یکی از دو صورت شرطی یا دوشرطی هستند می‌توان به صورت زیر روش اثبات انتخاب کرد.

برای قضیه‌هایی که به صورت شرطی (استلزام $P \Rightarrow Q$) هستند می‌توان روشهای زیر را انتخاب کرد
روش برهان خلف - روش عکس نقیض - روش به انتفای مقدم - روش استدلال قیاسی - روش استقرای ریاضی - مسئله را دانسته فرض کردن

برای قضیه‌های دوشرطی (هم ارزی $P \Leftrightarrow Q$) می‌توان از معادل آن $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ کمک گرفت و بنابراین می‌توان روش استدلال قیاسی را انتخاب کرد. و چون باید هم $P \Rightarrow Q$ و هم $Q \Rightarrow P$ را ثابت کنیم می‌توان برای هر یک از $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ یکی از روشهای بالا که در استلزام منطقی پیشنهاد شد انتخاب کرد.

در پایان این فصل به اثبات چند قضیه ریاضی می‌پردازیم تا با روشهای اثبات آشنا شویم.

نمونه ۱: برای حکم زیر سه روش اثبات (برهان) مختلف می‌آوریم.
اگر $x^2-3x+2<0$ آنگاه نشان دهید که $x>0$

حل: چون حکم بالا یک استلزام (گزاره شرطی همیشه درست است) سه برهان (روش اثبات) می‌آوریم

برهان اول: (استدلال قیاسی) فرض کنید که $x^2-3x+2<0$ پس $3x>x^2+2\geq 2$ (زیرا $x^2\geq 0$) بنابراین $x>\frac{2}{3}>0$ پس $x>0$.

برهان دوم (عکس نقیض) عکس نقیض آن یعنی اگر $x\leq 0$ باشد آنگاه $x^2-3x+2\geq 0$ را ثابت می‌کنیم پس فرض کنید که $x\leq 0$ در این صورت $x-2\leq 0$ و $x-1\leq 0$ با ضرب این دو نامساوی در هم داریم
$(x-1)(x-2)=x^2-3x+2\geq 0$.

برهان سوم (برهان خلف) فرض کنید که $x^2-3x+2<0$ و $\underbrace{x\leq 0}_{\text{فرض خلف}}$ در این صورت
$x^2<3x-2\leq -2<0$ یعنی $x^2<0$ که یک تناقض است.

Scanned by CamScanner

نمونه ۲: در فصل مجموعه‌ها داریم که مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است، یعنی اگر A یک مجموعه دلخواه باشد آنگاه $\phi \subseteq A$.

اثبات: با روش انتفای مقدم، می‌دانیم که $(\phi \subseteq A) \equiv (x\in\phi \to x\in A)$

چون $x\in\phi$ مقدم گزاره شرطی $(x\in\phi \to x\in A)$ نادرست است پس کل گزاره شرطی درست است.

نمونه ۳: برای هر عدد حقیقی x اگر $|x|<1$ آنگاه $x<1$.

اثبات روش اول (طبق تعریف $|x|$ یعنی استدلال قیاسی) داریم $|x|<1 \iff -1<x<1$

بنابراین اگر $|x|<1$ آنگاه طبق تعریف داریم $-1<x<1$ پس $x<1$

روش دوم (برهان خلف) فرض کنید که $|x|<1$ ۱ و $x\geq 1$ (فرض خلف) ۲ پس $x>0$ و بنابراین $|x|=x$ و طبق ۲ داریم $|x|\geq 1$ که متناقض با $|x|<1$ است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود

نمونه ۴: برای هر عدد طبیعی n، عدد $2^{2^n}+1$ یک عدد اول است را در نظر بگیرید.
حل این گزاره در حالت کلی درست نیست از مثال نقض استفاده می‌کنیم و آن را رد می‌کنیم

$$n=5 \Rightarrow 2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 4294967297 = 641\times 6700417$$

یعنی $2^{2^5}+1$ حاصل ضرب دو عدد است پس اول نیست.

نمونه ۵: اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه n^2+n+1 یک عدد فرد است.

اثبات: با روش در نظر گرفتن حالت‌های مختلف برای n

اگر n زوج باشد آنگاه $n=2k$ بنابراین $n^2+n+1=(2k)^2+2k+1=4k^2+2k+1=2k(2k+1)+1$

چون $2k(2k+1)$ برای هر عدد طبیعی k زوج است پس $2k(2k+1)+1$ فرد است پس n^2+n+1 فرد است

اگر n فرد باشد آنگاه $n=2k+1$ بنابراین $n^2+n+1=(2k+1)^2+(2k+1)+1=(2k+1)(2k+1+1)+1=2(k+1)(2k+1)+1$

چون $2(k+1)(2k+1)$ زوج است برای هر عدد طبیعی k پس $n^2+n+1=2(k+1)(2k+1)+1$ فرد است

توجه: در نظر گرفتن حالت‌های ممکن برای یک متغیر یکی از روش‌های اثبات یک مسئله است

نمونه ۶: برای هر عدد طبیعی n عدد n^2+n زوج است.

اثبات: با روش گرفتن حالت‌های مختلف برای n مانند نمونه ۵

نمونه ۷: فرض کنید که A و B دو زیرمجموعه مجموعه U باشند. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای اینکه $A\subseteq B$ این است که $B'\subseteq A'$ (به عبارت دیگر $(A\subseteq B \iff B'\subseteq A')$ (عکس نقیض دو شرطی)

اثبات (با روش استدلال قیاسی): می‌دانیم که B' متمم B است و $B'=U-B$ و $B'\cap B=\phi$.

$$(A\subseteq B)\equiv(x\in A\to x\in B) \underset{\text{نقیض}}{\overset{\text{عکس}}{\equiv}} \sim(x\in B)\to\sim(x\in A)\equiv x\in B' \ldots$$

درنمونه ۷ می‌توان نشان داد که $A\subseteq B \Rightarrow B'\subseteq A'$ و همچنین $A'\subseteq B' \Rightarrow A\subseteq B$

اثبات $A\subseteq B \Rightarrow B'\subseteq A'$ حکم $B'\subseteq A'$ و $A\subseteq B$ فرض است پس بنابراین اگر $x\in B'$ پس $x\notin B$ چون $A\subseteq B$ پس $x\notin A$ بنابراین $x\in A'$ پس نشان دادیم که $B'\subseteq A'$

اثبات $B'\subseteq A' \Rightarrow A\subseteq B$

پس $B'\subseteq A'$ ؛ $B'\subseteq A'$ فرض است و $A\subseteq B$ حکم می‌باشد

بنابراین $x\in A \Rightarrow x\notin A' \xrightarrow[B'\subseteq A']{\text{چون}} x\notin B' \Rightarrow x\in B$. $A\subseteq B$

در فصل‌های نظریه مجموعه‌ها و توابع و رابطه با مثال‌های بیشتر برای اثبات احکام ریاضی می‌پردازیم.

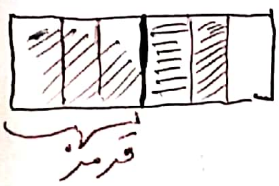
توضیح: در دبستان و دبیرستان برای حل یک مسئله و اثبات مسائل معمولاً از روش‌های حل معادله - رسم شکل - جدول نظام دار - روش الگویابی - روش زیر مسئله - روش آزمایش و خطا - روش مسئله ساده‌تر و روش مسائل کمکی و مرتبط استفاده می‌شود.

۱- رسم شکل: رسم شکل هم یکی از روش‌های حل مسئله است و هم در روش‌های دیگر حل مسئله نقش اساسی دارد رسم شکل در تفهیم صورت مسئله و شکل‌گیری طرح اثبات یک مسئله از اهمیت خاصی برخوردار است.

برخی از مسائل کتاب‌های دوره ابتدایی و متوسط فقط با رسم شکل حل می‌شوند.

مثال ۱: در کیسه‌ای نصف مهره‌ها قرمز و $\frac{1}{3}$ مهره‌ها سبز و باقی صورتی است چه کسری از مهره‌ها صورتی است؟

حل: با رسم شکل جواب بدیهی می‌شود. یک مستطیل برای همه رسم می‌کنیم و نصف آن را رنگ می‌کنیم و $\frac{1}{3}$ مستطیل یعنی $\frac{2}{6}$ باقی مانده را رنگ می‌زنیم حال اگر مستطیل با شش قسمت تقسیم کنیم $\frac{5}{6}$ آن رنگ (هاشور) زده‌ایم و ما بقی یعنی $\frac{1}{6}$ آن سفید و رنگ نخورده است که مربوط به مهره‌های صورتی است.

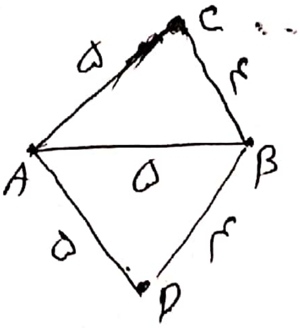


روش دوم: به کمک حل معادله

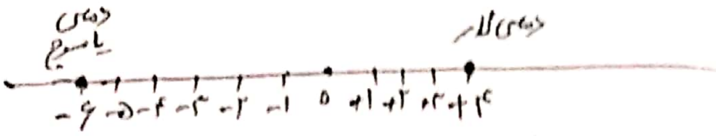
$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+x \Rightarrow x=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{6-3-2}{6}=\cancel{\frac{6-5}{6}}=\frac{1}{6}$$

مثال ۲: دو نقطه A و B را با فاصله ۵ سانتی‌متر انتخاب کنید تمام نقاطی را معین کنید که از A ۴ سانتی‌متر و از B ۵ سانتی‌متر داشته باشد

حل: با رسم شکل داریم (جواب دو نقطه)



مثال ۳: دمای هوای شهر یاسوج ۶ درجه زیر صفر است و دمای هوای شهر لار ۱۵ درجه گرم‌تر از دمای هوای شهر یاسوج است دمای هوای شهر لار چند درجه است.



حل: رسم شکل جواب +۴

$-6+15=+4$

از روش جمع جبری

۲ـ روش حل معادله: برای برخی از مسائل می‌توان یک یا چند معادله نوشت و از حل آن جواب مسائل بدست می‌آید.

مثال ۴: مجموع نصف و ربع چه عددی ۳۶ است

حل: اگر x عدد خواسته شده باشد پس می‌توان معادله مقابل نوشت $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=36$

$$\frac{2+1}{4}x=36 \Rightarrow \frac{3}{4}x=36 \Rightarrow x=\frac{4\times36}{3}=4\times12=48$$

مثال ۵: مجموع سن علی و برادرش ۳۶ سال است اگر علی ۸ سال از برادرش بزرگتر باشد. سن هر کدام چقدر است؟

حل: اگر سن برادر علی را x در نظر بگیریم بنابراین سن علی x+8 است و بنابراین $(8+x)+x=36$

پس $8+2x=36 \Rightarrow 2x=36-8 \Rightarrow x=\frac{28}{2}=14$

پس سن برادر علی ۱۴ و سن علی ۲۲ = ۸ + ۱۴ سال است

۳ـ روش آزمایش و خطا (روش حدسی) در این روش برای جواب مسئله با حدس زدن و آزمایش و خطا به جواب واقعی می‌رسیم.

مثال ۴ را می‌توان با روش آزمایش و خطا حل کرد.

۴ـ روش الگویابی: در این روش با استفاده از داده‌ها یک رابطه یا فرمول به عنوان الگو بین داده‌ها پیدا می‌کنیم و این رابطه در واقع جواب مسئله است و یافتن این رابطه (الگو) هدف اصلی در حل مسئله است.

مثال ۶: مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی منتظم چند درجه است.

حل: به کمک محاسبه مجموع زاویه‌های داخلی مثلث و مربع و پنج ضلعی منتظم به جواب $(n-2)\times180°$ می‌رسیم.

مثال ۷: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی را پیدا کنید.

حل: با کمک محاسبه زیرمجموعه‌های مجموعه‌های ۲ عضوی و ۳ عضوی و چهار عضوی و نمایش آنها به جواب 2^n می‌رسیم.

۵ـ روش جدول نظام دار: در این روش به کمک جدول یک نظم بین داده‌ها پیدا می‌کنیم و این نظم را برای جواب مسئله بکار می‌بریم. مثال ۶ و ۷ را می‌توان به کمک روش جدول نظام دار حل کرد.

۶- روش زیر مسئله: در مسائل ترکیبی از روش زیر مسئله استفاده می‌شود. در این روش مسئله را به چندین مسئله کوچکتر (با عنوان زیر مسئله) تقسیم می‌کنیم و از حل آنها، مسئله اصلی حل می‌شود.

مثال ۸: مساحت مربعی به ضلع ۱۲ متر با مساحت مستطیلی به طول ۱۶ متر برابر است، عرض مستطیل را بدست آورید.

حل: زیر مسئله اول: مساحت مربع را حساب می‌کنیم ۱۴۴ = ۱۲×۱۲ = مساحت مربع

زیر مسئله دوم: مساحت مربع مساوی مساحت مستطیل قرار می‌دهیم. اگر عرض مستطیل x باشد، داریم:

مساحت مستطیل = ۱۶x = ۱۴۴

بنابراین $x = \frac{۱۴۴}{۱۶} = ۹$ پس عرض مستطیل = ۹ متر است.

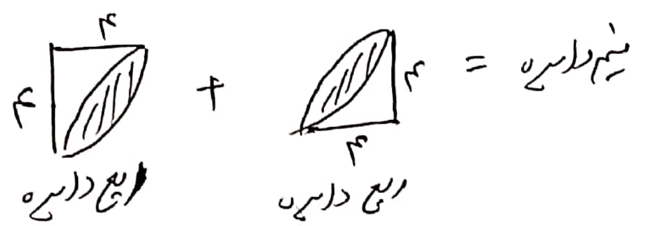
مثال ۹: مساحت قسمت هاشور خورده شکل زیر (که یک مربع است) را بیابید. (داخل مربع دو کمان از دایره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر زده شده است.)

حل: زیر مسئله اول: مساحت مربع = ۱۶=۴×۴

زیر مسئله دوم: مساحت نیم دایره = $\frac{۴×۴×۳/۱۴}{۲} = ۲۵/۱۲$

زیر مسئله سوم: ناحیه هاشور خورده = مساحت نیم دایره − مساحت مربع = ۲۵/۱۲−۱۶ = ۹/۱۲

زیرا:



۷- روش مسئله ساده‌تر: در بعضی از مسائل داده‌ها طوری هستند که روش حل آن را پیچیده می‌کند. کافی است که داده‌ها را ساده‌تر در نظر گرفت و از حل آن می‌توان حل مسئله اصلی را تشخیص داد.

مثال ۱۰: سالنی ۱۲ پنجره دارد. اگر هر پنجره از ۳ شیشه مستطیل شکل به طول ۳/۲۵ متر و عرض ۱/۷۶ متر داشته باشد، پنجره‌های این سالن روی هم چند متر مربع شیشه لازم دارد؟

حل: با روش مسئله ساده‌تر، می‌توان ابعاد پنجره‌ها را عددهای صحیح ۳ و ۲ در نظر گرفت سپس مسئله را حل کرد تا دانش‌آموزان حل مسئله را درک کنند و از اعداد اعشاری نترسند.

مثال ۱۱: $۴\frac{۱}{۴}$ کیلوگرم چند گرم است.

حل: عدد مخلوط $۴\frac{۱}{۴}$ گمراه کننده است کافی است بجای $۴\frac{۱}{۴}$ عدد چهار در نظر بگیریم و با این عدد مسئله حل شود سپس جواب $۴\frac{۱}{۴}×۱۰۰۰ = \frac{۱۷}{۴}×۱۰۰۰ = ?$ را حل می‌کنند.

۸- روش مسائل کلی و مرتبط: برخی از فرمول های ریاضی در بعضی از مسائل بکار می روند مثلاً از لم برای اثبات یک قضیه کلی تر استفاده می شود. از جدول تناسب برای حل خیلی از مسائل استفاده می شود. اتحادها ~~در~~ تجزیه عبارات جبری بکار می روند. برای نمونه $\sin^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ برای حل انتگرال های مثلثاتی شامل توانهای زوج $\sin x$ و $\cos x$ بکار می روند. در اینجا روش از حل یک مسئله کمک می گیریم و یک مسئله مشکل تر که با مسئله اول ارتباط دارد را حل می کنیم

مثال ۱۲: از $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ می توان فرمول مقدار زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی یعنی 2^n را بدست آورد زیرا $C(n,r)$ مقدار زیرمجموعه های r عضوی از یک مجموعه n عضوی است پس

$$C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,r)+\cdots+C(n,n) = 2^n =$$ مقدار تمام زیرمجموعه های n عضوی

مثال ۱۳: برای اثبات مسئله مجموع زوایای داخلی یک مثلث برابر ۱۸۰ درجه است از زاویه خارجی کمک می گیریم

مثال ۱۴: از حل معادله درجه ۲ یعنی $ax^2+bx+c=0$ می توان معادله درجه ۴ $ay^4+by^2+c=0$ را حل کرد

تبصره: برای حل یک مسئله باید از مفاهیمی که در یک مسئله آمده است اطلاع داشته باشیم یعنی تعاریف مفاهیم ریاضی مانند مثلثات، انتگرال، توابع مشتق، حد، پیوستگی، اصل ضرب (حاصل ضرب دکارتی)، ترکیب و ترتیب و احتمال، جایگشت و ... را بدانیم تا مسائل مربوط به آن را حل کنیم. ۱) برای نمونه برای حل مسائل بهینه سازی باید از مفاهیم مشتق و ماکسیمم و مینیمم و تقعر اکسترمم مطلق اطلاع داشته باشیم ۲) اگر از حل معادله مثلثاتی و مقادیر نسبت های مثلثاتی اطلاعی نداشته باشیم نمی توانیم معادله ساده $\cos x = -1$ را حل کنیم

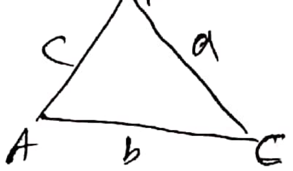
۳) اگر از حاصل ضرب داخلی دو بردار اطلاع داشته باشیم می توانیم مسئله زیر را به راحتی حل کنیم.

مسئله: اگر a و b و c و d چهار عدد حقیقی دلخواه باشند نشان دهید که

$$|ac+bd| \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$$

۴) همچنین اگر از حاصل ضرب خارجی دو بردار اطلاع داشته باشیم می توانیم مساحت یک مثلث و مساحت متوازی الاضلاع را از روی آن بدست آوریم. همچنین می توان مسئله زیر را به راحتی حل کرد

مسئله: در یک مثلث دلخواه ABC نشان دهید که



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

۵) از $n!$ می توان ترکیب و جایگشت و برخی از مسائل شمارشی را حل کرد.