کاربرد انتگرال های دوگانه

انتگرال دوگانه در ریاضیات و رشته های مهندسی و علوم پایه آمار و فیزیک و دیگر رشته ها کاربردهای فراوانی دارد. در بخش های قبل برای محاسبه حجم اجسام و مساحت ناحیه از انتگرال دوگانه استفاده کردیم. در رشته آمار برای محاسبه احتمال و امید ریاضی برای توابع دو متغیره می توان از انتگرال دوگانه کمک گرفت. در فصل ۱۷ برای محاسبه شار روی یک ناحیه و سطح می توان از انتگرال دوگانه کمک می گیریم.

در این بخش با کاربردهای فیزیکی آن از جمله جرم یک ورقه نازک و مرکز ثقل و گشتاورهای یک ورقه نازک می پردازیم.

(۱) فرض کنید که A یک ورقه نازک باشد که چگالی جرم هر نقطه از آن به کمک تابع $\rho(x,y)$ محاسبه می گردد در این صورت جرم کل ورقه A که با M نمایش می دهیم عبارت است از:

$$\boxed{\text{جرم ورقه } A = \iint_A \rho(x,y)\, dA}$$

حال اگر A یک ناحیه بسته در صفحه xoy باشد (A را می توان همان ورقه نازک بالا در نظر گرفت) در این

(۲) گشتاورهای یک ناحیه با چگالی جرم $\rho(x,y)$ حول محور xها به صورت زیر محاسبه می گردد
این گشتاور را با M_x نمایش می دهیم و آن را گشتاور مرتبه اول ناحیه A حول محور xها می نامیم.

$$\boxed{M_x = \iint_A y\, \rho(x,y)\, dA}$$

در واقع y فاصله هر نقطه از ورقه A تا محور xها است

به همین صورت گشتاور مرتبه اول ناحیه A حول محور yها که با M_y نمایش می دهیم عبارت است از:

$$\boxed{M_y = \iint_A x\, \rho(x,y)\, dA}$$

در واقع x فاصله هر نقطه از ورقه A تا محور yها است.

(۳) مرکز جرم (مرکز ثقل) ناحیه A با $(\bar{x}, \bar{y})$ نمایش می دهیم

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_A x\,\rho(x,y)\, dA}{\iint_A \rho(x,y)\, dA}} \quad , \quad \boxed{\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_A y\,\rho(x,y)\, dA}{\iint_A \rho(x,y)\, dA}}$$

تبصره: اگر جسم همگن باشد (یعنی جرم هر نقطه از ورقه باهم برابر باشد) یا چگالی جرم ثابت باشد و

ورقه A دارای محور تقارن باشد آنگاه مرکز ثقل روی محور تقارن قرار می‌گیرد.

۴- گشتاورهای لختی (گشتاورهای مرتبه دوم) ورقه A حول محورهای مختصات و حول مبدأ مختصات به صورت زیر محاسبه می‌گردد

گشتاور مرتبه دوم حول محور xها = $\boxed{I_x = \iint_A y^2 \rho(x,y)\, dA}$

گشتاور مرتبه دوم حول محور yها = $\boxed{I_y = \iint_A x^2 \rho(x,y)\, dA}$

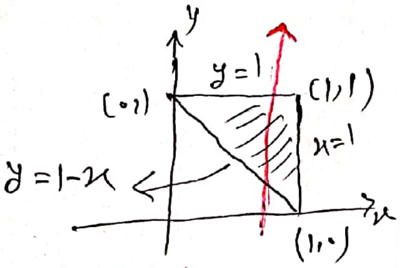
گشتاور مرتبه دوم حول مبدأ مختصات = $\boxed{I_0 = I_x + I_y = \iint_A (x^2+y^2)\, \rho(x,y)\, dA}$

۵- شعاع چرخش ورقه A حول محور xها و حول محور yها

$R_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{M}}$ شعاع چرخش ورقه حول محور xها

$R_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{M}}$ شعاع چرخش ورقه A حول محور yها

مثال ۱: فرض کنید که A ناحیه مثلثی شکل محدود به خط $y=1-x$ و خطوط $x=1$ و $y=1$ باشد و چگالی جرم هر نقطه از آن $\rho(x,y)=xy$ باشد جرم این ورقه را بیابید.



$1-x \le y \le 1$

$0 \le x \le 1$

حل:

$$M = \iint_A \rho(x,y)\, dA = \int_0^1 \left[\int_{1-x}^1 xy\, dy\right] dx = \int_0^1 x\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{1-x}^{1} dx$$

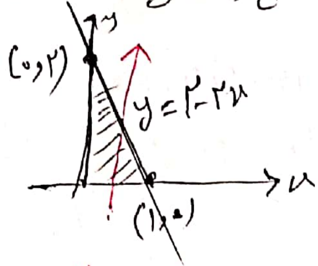
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left[1-(1-x)^2\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x^2 - x^3)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{8-3}{12}\right] = \frac{5}{24}$$ (واحد)

توجه: در مثال ۱، اگر $\rho(x,y)=xy$ چگالی بار الکتریکی باشد که روی ورقه توزیع شده باشد در این صورت بار کل الکتریکی روی ورقه را که با Q نمایش می‌دهند عبارت است از

$$Q = \iint_A \rho(x,y)\, dA = \frac{5}{24}$$ (کولن)

مثال ۲ جرم و مرکز جرم ورقه مثلثی با رئوس (۰،۰) و (۱،۰) و (۰،۲) را با شرطی که تابع چگالی $\rho(x,y)=1+3x+y$ باشد را بدست آورید.



حل: مثلث در شکل مقابل رسم شده است. توجه: معادله خطی که از دو نقطه (۱،۰) و (۰،۲) می‌گذرد عبارت است از $y=2-2x$

زیرا $y-0=\frac{2-0}{0-1}(x-1) \Rightarrow y=-2(x-1)=2-2x$

$0\le y\le 2-2x$

$0\le x\le 1$

$$M=\iint_A \rho(x,y)\,dA=\int_0^1\left[\int_0^{2-2x}(1+3x+y)\,dy\right]dx=\int_0^1\left[y+3xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-2x}dx$$

$$=\int_0^1\left[2-2x+3x(2-2x)+\frac{1}{2}(2-2x)^2\right]dx=4\int_0^1(1-x^2)\,dx=4\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=4\left[1-\frac{1}{3}\right]$$

$$=\frac{8}{3}\ (\text{واحد})$$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint_A x\,\rho(x,y)\,dA=\frac{3}{8}\int_0^1\left[\int_0^{2-2x}x(1+3x+y)\,dy\right]dx=\frac{3}{8}\int_0^1\left[xy+3x^2y+\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{2-2x}dx$$

$$=\frac{3}{8}\int_0^1\left[x(2-2x)+3x^2(2-2x)+\frac{1}{2}x(2-2x)^2\right]dx=\frac{3}{8}\int_0^1\left[4x-4x^3\right]dx=$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{3}{8}$$

محاسبه $\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x}y(1+3x+y)\,dy\,dx=\frac{11}{16}$ (به عنوان تمرین)

بنابراین مرکز جرم $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{3}{8},\frac{11}{16}\right)$

مثال های بیشتری بعد از تدریس تغییر متغیر در انتگرال دوگانه برای کاربرد فیزیکی می‌آوریم

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه:

یکی از روشهای حل انتگرال دوگانه روش تغییر متغیر است بخصوص وقتی که انتگرال های برحسب x و یا برحسب y قابل حل نباشند و یا اینکه محاسبه این انتگرال ها طولانی و وقت گیر باشد چند نمونه از این انتگرال ها در زیر آمده اند که آنها را با تغییر متغیر حل می‌کنیم.

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\ ,\qquad \iint_A\sqrt{x^2+y^2}\,dA$$

A نیم دایره $x^2+y^2=a^2$، $y\geq 0$

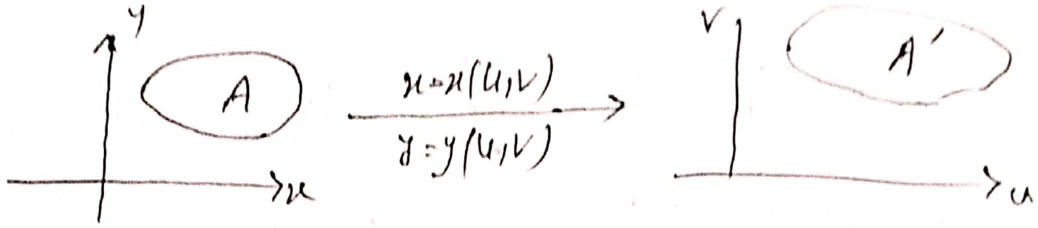
$$\iint_R y\,dA$$

R ناحیه محدود بین منحنی های $y^2=4-4x$ و $y^2=4+4x$ و $y\geq 0$ است

روش تغییر متغیر انتگرال دوگانه

$$\iint_A f(x,y)\,dA$$

فرض کنید که $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ تبدیلاتی باشند (همان تغییر متغیر لازم) که ناحیه A از صفحه دکارتی xy را به ناحیه A' در صفحه uv می برد (لزوماً صفحه uv دکارتی نیست می تواند uv صفحه دکارتی باشد)



در این صورت

$$\iint_A f(x,y)\,dA = \iint_{A'} f\big(x(u,v),\, y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

که در آن $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ ژاکوبین x و y برحسب u و v می باشد و عبارت است از

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

با شرطی که $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ و x و y توابعی مشتق پذیر برحسب u و v باشند.

با عبارت دیگر انتگرال دوگانه در مختصات دکارتی xy با انتگرال دوگانه در مختصات uv تبدیل می گردد

توجه: برای درک روش تغییر متغیر در مرحله اول از تغییر متغیر در مختصات قطبی استفاده می کنیم: در بخش های قبل دیدیم که تبدیلات

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ناحیه A در مختصات دکارتی

را به ناحیه A در مختصات قطبی می برد (در این حالت خاص شکل A ثابت می ماند ولی معادلات مرزهای A برحسب $r = f(\theta)$ نوشته می شود) و $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

پس $\boxed{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = J(r,\theta) = r}$ حال چون $r \geq 0$ پس

$$\boxed{|J(r,\theta)| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r}$$

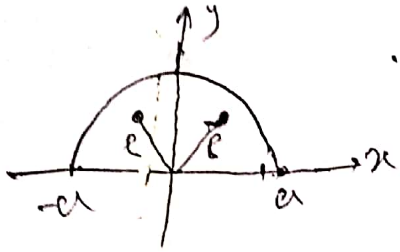
بنابراین با کمک تغییر متغیر در مختصات قطبی انتگرال دوگانه به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\iint_A f(x,y)\,dA = \iint_{\text{قطبی } A} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

در واقع $dA = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ و همیشه dr قبل از $d\theta$ است

توجه ۱: اگر ناحیه A دایره یا قسمتی از دایره $x^2+y^2=a^2$ باشد انتگرال دوگانه در مختصات قطبی براحتی قابل حل است همچنین اگر ناحیه A خودش قطبی باشد مثل دلنما، پروانه، و گل‌های چندپر

مثال ۱۳- در هر نقطه روی ورقه‌ای نیم دایره‌ای چگالی متناسب با فاصله این نقطه با مرکز دایره است، مرکز جرم نیم دایره را بیابید.



حل: برای راحتی نیم دایره را $x^2+y^2=a^2$ و $y\ge 0$ در نظر می‌گیریم. بدیهی است که $\rho(x,y)=K\sqrt{x^2+y^2}$ است که در آن K ضریب تناسب است

حال چون $\rho(x,y)=K\sqrt{x^2+y^2}$ تابع همین است و ورقه A متقارن (محور yها محور تقارن ورقه) است پس مرکز ثقل روی محور yها قرار می‌گیرد پس $\bar{x}=0$ بنابراین $\bar{y}$ را حساب می‌کنیم

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_A Ky\sqrt{x^2+y^2}\,dA}{\iint_A K\sqrt{x^2+y^2}\,dA}\ \frac{\text{در مختصات قطبی}}{\text{تغییر متغیر قطبی}}\ \frac{K\int_0^\pi\int_0^a r\sin\theta\cdot r^2\,dr\,d\theta}{K\int_0^\pi\int_0^a r\cdot r\,dr\,d\theta}=\frac{\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^a r^3\,dr}{\int_0^\pi d\theta\int_0^a r^2\,dr}$$

$$=\frac{[-\cos\theta]_0^\pi\left[\frac14 r^4\right]_0^a}{[\theta]_0^\pi\left[\frac13 r^3\right]_0^a}=\frac{2\left[\frac14 a^4\right]}{\frac13\pi a^3}=\frac{3a}{2\pi}$$

پس مرکز ثقل $(0,\frac{3a}{2\pi})$ است

حدود در مختصات قطبی نیم دایره بالا
$0\le r\le a$
$0\le\theta\le\pi$

توجه: در مثال قبل انتگرال دوگانه $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dA$ که در پایین صفحه ۳ آمده بود حل کردیم یعنی

$$\iint_{\text{نیم دایره}}\sqrt{x^2+y^2}\,dA=\int_0^\pi\int_0^a r^2\,dr\,d\theta=\underbrace{\int_0^\pi d\theta\int_0^a r^2\,dr}=(\pi)\left(\frac13 a^3\right)=\frac{\pi}{3}a^3$$

مثال ۱۴: انتگرال $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ ذکر شده در صفحه ۳ با کمک تغییر متغیر در مختصات قطبی حل می‌کنیم

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_0^{\frac\pi2}\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac\pi2}d\theta\int_0^{+\infty}re^{-r^2}\,dr=\frac\pi2\left[\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac12 e^{-r^2}\right)\Big|_0^b\right]=\frac\pi4$$

توضیح در صفحه ۶

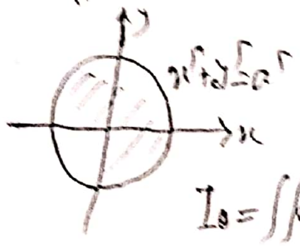
در این مثال ناحیه انتگرال گیری تمام نقاط ربع اول است

و همچنین $\int_0^{+\infty} 2re^{-r^2}dr$ انتگرال ناسره است

نتیجه: از مثال ۴ می‌توان نتیجه گرفت که $I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ زیرا می‌توان $I=\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy$ در نظر گرفت و بنابراین

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\iint_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\frac{\pi}{4}\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

مثال ۵: گشتاورهای لختی (مرتبه دوم) I_x و I_y و I_0 قرص همگن ($x^2+y^2\le a^2$) با چگالی ثابت ($\rho=c$) با شعاع a را بیابید.



$0\le r\le a$

$0\le\theta\le 2\pi$

حل. از تغییر متغیر قطبی کمک می‌گیریم.

$$I_0=\iint_A c(x^2+y^2)\,dA=c\int_0^{2\pi}\int_0^a r^3\,dr\,d\theta=c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr=c(2\pi)\left(\frac{a^4}{4}\right)=\frac{\pi a^4}{2}c$$

چون چگالی ثابت است و قرص (دایره) همگن و دارای تقارن است و اینکه $I_0=I_x+I_y$ بنابراین $I_x=I_y$

و بنابراین

$$I_x=I_y=\frac{I_0}{2}=\frac{\pi a^4}{4}c$$

مثال ۶: آخرین انتگرال دوگانه ذکر شده در صفحه ۳ را حل می‌کنیم.

$$\iint_R y\,dA=?$$

R ناحیه محصور بین منحنی‌های $y^2=4-4x$ و $y^2=4+4x$ و $y\ge 0$ است

(مثال ۳ کتاب صفحه ۱۳۱۴)

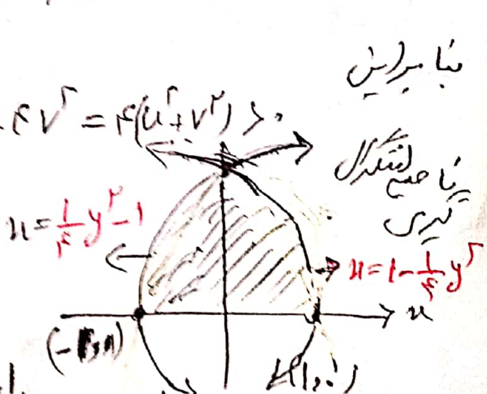
حل (روش اول تغییر متغیر):

از تغییر متغیر $\begin{cases}x=u^2-v^2\\ y=2uv\end{cases}$ استفاده می‌کنیم (این تغییر متغیر در کتاب ذکر شده است)

بنابراین

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2u & -2v\\ 2v & 2u\end{vmatrix}=4u^2+4v^2=4(u^2+v^2)>0$$

ناحیه انتگرال گیری



$$\iint_R y\,dA=\int_0^1\int_0^1(2uv)\,4(u^2+v^2)\,du\,dv=$$

$$=8\int_0^1\left(\int_0^1(u^3v+v^3u)\,du\right)dv=8\int_0^1\left[\frac{1}{4}vu^4+\frac{1}{2}v^3u^2\right]_0^1dv=8\int_0^1\left[\frac{1}{4}v+\frac{1}{2}v^3\right]dv$$

$$=8\left[\frac{1}{8}v^2+\frac{1}{8}v^4\right]_0^1=8\left[\frac{2}{8}\right]=2$$

این تغییر متغیر ناحیه R دکارتی را به ناحیه مستطیلی $[0,1]\times[0,1]$ در مختصات دکارتی uv می‌برد

دلیل آن در صفحه بعد

تبصره: در تغییر متغیر $\begin{cases} x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ در انتگرال دوگانه برای نوشتن حدود در مختصات uv کافی است که روی مرزهای A کار کنیم و حدودی برای مرزهای A' بیابیم.

برای نمونه در مثال قبل (مثال ۶)

مرز $x=\frac14 y^2-1 \Rightarrow u^2-v^2=\frac14(2uv)^2-1 \Rightarrow u^2-v^2=u^2v^2-1 \Rightarrow u^2-v^2-u^2v^2+1=0$

$\Rightarrow u^2(1-v^2)+(1-v^2)=(1-v^2)(1+u^2)=0 \Rightarrow v^2=1,\ 1+u^2\neq0 \Rightarrow v=\pm1$ (1)

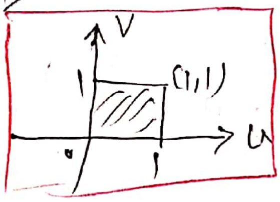
مرز $x=1-\frac14y^2 \Rightarrow u^2-v^2=1-u^2v^2 \Rightarrow u^2-v^2-1+u^2v^2=0 \Rightarrow u^2(1+v^2)-(1+v^2)=0$

$\Rightarrow (1+v^2)(u^2-1)=0 \Rightarrow u=\pm1,\ v^2+1\neq0$ (2)

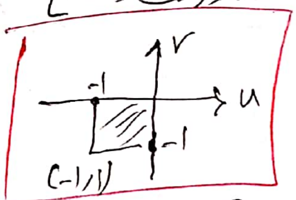
مرز $y=0 \Rightarrow 2uv=y=0 \Rightarrow uv=0 \Rightarrow u=0$ یا $v=0$ (3)

از (1) و (2) و (3) دو محدوده برای u و v بدست می‌آید یکی $[0,1]\times[0,1]$ یعنی $0\le v\le1$ و $0\le u\le1$، دیگری $[-1,0]\times[-1,0]$ یعنی $-1\le v\le0$ ، $-1\le u\le 0$

چون $y=2uv\ge0$ پس برای راحتی مستطیل $[0,1]\times[0,1]$ را در نظر می‌گیریم [اگر مستطیل $[-1,0]\times[-1,0]$ هم انتخاب کنیم مثله درست است]



یا



روش دوم: چون A یک ناحیه ساده (افقی ساده) است پس می‌توان انتگرال را بدون تغییر متغیر و با محاسبه کمتر به صورت زیر حل کرد.

$$\iint_A y\,dA=\int_0^2\left[\int_{\frac14y^2-1}^{1-\frac14y^2} y\,dx\right]dy=\int_0^2\left[yx\right]_{\frac14y^2-1}^{1-\frac14y^2}dy=\int_0^2 y\left[1-\frac14y^2-\frac14y^2+1\right]dy$$

$$=\int_0^2\left[2y-\frac12y^3\right]dy=\left[y^2-\frac18y^4\right]_0^2=4-\frac18(16)=4-2=2$$

مثال ۷: انتگرال $\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dA$ را حساب کنید که در آن R ناحیه‌ای ذوزنقه‌ای با رأس‌های $(1,0)$ و $(2,0)$ و $(0,-2)$ و $(0,-1)$ است.

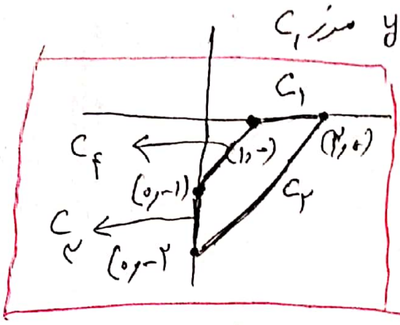
حل: از تغییر متغیر $u=x+y$ و $v=x-y$ استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases}u=x+y\\v=x-y\end{cases} \xRightarrow[\text{تفریق کردن}]{\text{جمع کردن}} \begin{cases}2x=u+v\Rightarrow x=\frac{u+v}{2}\\2y=u-v\Rightarrow y=\frac{u-v}{2}\end{cases}$$

به عبارت دیگر تغییر متغیر $\begin{cases}x=\frac{u+v}{2}\\y=\frac{u-v}{2}\end{cases}$ است.

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

یافتن حدود u و v: روی مرزهای ذوزنقه کار می‌کنیم تا حدود u و v بدست آید.



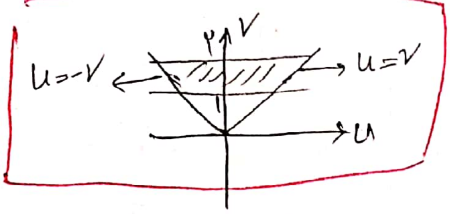
مرز C_1: $y=0$ و $1\le x\le 2 \Longrightarrow y=\frac{1}{2}(u-v)=0 \Longrightarrow u=v$ } $\Longrightarrow -v\le u\le v$

مرز C_3: $x=0$ و $-1\le y\le -2 \Longrightarrow x=\frac{1}{2}(u+v)=0 \Longrightarrow u=-v$

مرز C_2: $x-y=2 \Longrightarrow v=x-y=2 \Longrightarrow v=2$ } $\Longrightarrow 1\le v\le 2$

مرز C_4: $x-y=1 \Longrightarrow v=x-y=1 \Longrightarrow v=1$

بنابراین ناحیه انتگرال گیری در صفحه مختصات uv به صورت زیر است



$$\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dA=\int_1^2\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\left|-\frac{1}{2}\right|du\,dv=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\left[v e^{\frac{u}{v}}\right]_{-v}^{v}dv=\frac{1}{2}\int_1^2\left[v\left(e^{\frac{v}{v}}-e^{-\frac{v}{v}}\right)\right]dv=\frac{1}{2}\int_1^2 v\left[e^{1}-e^{-1}\right]dv=\frac{e-e^{-1}}{2}\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2=$$

$$=\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\left[\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right]=\frac{3}{4}\left(e^{1}-e^{-1}\right)$$

نکته مهم در تغییر متغیر

نکته ۱: برای محاسبه $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=J(u,v)$. اگر x و y برحسب u و v نوشته نشده باشد لازم نیست x و y را حتما برحسب u و v بدست آوریم. کافی است از ژاکوبی وارون‌ها یعنی

$$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}$$

به عبارت دیگر $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$ بدست آوریم.

در مثال قبل $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$ پس

$$-\frac{1}{2}=J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}$$

نکته ۲: برای بدست آوردن یا نوشتن تغییر متغیر می‌توان از ضابطه $f(x,y)$ و مرزهای ناحیه انتگرال گیری نگاه کرد و تغییر متغیر را انتخاب کرد البته تغییر متغیر منحصر بفرد نیست.

در مثال قبل $f(x,y)=e^{\frac{x+y}{x-y}}$ و $x+y$ و $x-y$ در تابع قرار دارد و اگر معادله مرزهای ذوزنقه هم بنویسیم $x-y$ در آن قرار دارد و $u=x+y$ و $v=x-y$ انتخاب کردیم.

۱) (تمرین ۲۱ صفحه ۱۳۱۷) $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)dA$ که در آن R ناحیه‌ای ذوزنقه‌ای به رئوس $(1,0)$ و $(2,0)$ و $(0,2)$ و $(0,1)$ را حل کنید.

راهنمایی: $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ را انتخاب کنید

تمرین ۲۰ صفحه (۱۳۷) $\iint_R (x+y)\, e^{x^2-y^2}\, dA$ را حل کنید که R مستطیل محدود به خطوط $x-y=0$ و $x-y=2$ و $x+y=0$ و $x+y=3$ است

راهنمایی از تغییر متغیر $x+y=11$ و $x-y=2$ تحت تمرین.

نکته ۳: اگر ناحیه انتگرال‌گیری بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ باشد می‌توان از تغییر متغیر قطبی تعمیم یافته

تحت تعمیم بیضی $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ و در این صورت بیضی به دایره $r=1$ تبدیل می‌شود

$$J(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ a\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

مثال ۸: الف) مساحت محدود بیضی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ را بیابید.

ب) $\iint_R \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right) dA$ که R بیضی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ را حساب کنید.

حل الف) طبق نکته ۳ داریم $a=2$, $b=3$ پس $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases}$ و $J(r,\theta) = 2\times 3r = 6r$

$$\text{مساحت بیضی} = \iint_R dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 6r\,dr\,d\theta = 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr = 6(2\pi)\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^1 = 6\pi$$ واحد مربع

می‌دانیم مساحت بیضی $= \pi ab$ پس چون $a=2$ و $b=3$ جواب ۶ واحد مربع است

ب)

$$\iint_R \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right) dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2)\, 6r\,dr\,d\theta = 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\,dr = \frac{12\pi}{4} = 3\pi$$

چرا عبارت $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}$ با تغییر متغیر $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases}$ به r^2 تبدیل می‌شود.

تمرین ۳): حجم درون بیضیگون (یا حجم بیضیگون) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را بیابید.

از نکته ۳ کمک بگیرید

تمرین ۴ (تمرین ۲۱ صفحه ۱۳۷) را حل کنید (یعنی حل $\iint_{9x^2+4y^2\le 1} \sin(9x^2+4y^2)\, dA$)

(از نکته ۳ کمک بگیرید)

تمرین ۵) حجم جسم محصور بین دو رویه $z=x^2+3y^2$ و $z=12-3x^2-y^2$ را بدست آورید.

برای حل انتگرال بدست آمده از نکته ۳ استفاده کنید

تغییر متغیر در انتگرال سه‌گانه:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dD$$

فرض کنید که تبدیلات $\begin{cases} x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$ ناحیه بسته D را از فضای xyz به ناحیه بسته D' در فضای uvw

هر دو توابع x و y و z برحسب u و v و w روی D و D' مشتق‌پذیر باشد و $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = J(u,v,w)\neq 0$

در این صورت

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dD = \iiint_{D'} f\big(x(u,v,w),\,y(u,v,w),\,z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

که در آن

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

ژاکوبی u و v و w می‌باشد.

تبصره ۱: تبدیلات $\begin{cases} x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$ از روی ضابطه تابع f و مرزهای ناحیه D' بدست می‌آید و آن را تغییر متغیر در انتگرال سه‌گانه می‌نامیم.

تبصره ۲: برای یافتن حدود u و v و w می‌توان روی مرزهای D کار کرد و حدود u و v و w را پیدا کرد. در واقع تصویر مرزهای D در فضای uvw همان ناحیه D' است.

مثال ۱: حجم متوازی‌السطوح D محدود به صفحات $x+y+z=1$ و $x+y+z=-1$ و $2x+3y-z=2$ و $2x+3y-z=-2$ و $-3x+4y+2z=4$ و $-3x+4y+3z=2$ را با کمک انتگرال سه‌گانه بدست آورید.

$$D \text{ حجم} = \iiint_D dD = \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}\int_{2}^{4}\frac{1}{27}\,du\,dv\,dw = \frac{1}{27}(2\times4\times2)=\frac{16}{27}$$ واحد مکعب

حل: از روی مرزهای D تغییر متغیر

$$\begin{cases} u=x+y+z\\ v=2x+3y-z\\ w=-3x+4y+3z\end{cases}$$

(۱) را انتخاب می‌کنیم. از حل دستگاه (۱) می‌توان x و y و z را برحسب u و v و w یافت. چون این کار زمان‌بر است از ژاکوبی وارونه کمک می‌گیریم.

$$J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&-1\\-3&4&3\end{vmatrix}}=\frac{1}{27}>0$$

زیرا

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 27$$

همچنین برای یافتن حدود u و v و w با کمک مرزهای D به صورت زیر عمل می‌کنیم:

دو مرز $\begin{cases} \overbrace{x+y+z}^{u}=+1 \\ x+y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow -1\leq u\leq 1$

دو مرز $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ \underbrace{2x+3y-z}_{v}=-2 \end{cases} \Rightarrow -2\leq v\leq 2$

دو مرز $\begin{cases} -3x+4y+2z=4 \\ \underbrace{-3x+4y+2z}_{w}=2 \end{cases} \Rightarrow 2\leq w\leq 4$

مثال ۲: تغییر متغیر در مختصات استوانه‌ای

برای حل انتگرال سه‌گانه $\iiint_D f(x,y,z)\,dD$ در مختصات استوانه‌ای می‌توان از تغییر متغیر

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ استفاده کرد که در آن $r\geq 0$ و $0\leq\theta\leq 2\pi$ است و در این صورت

$$J(r,\theta,z)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

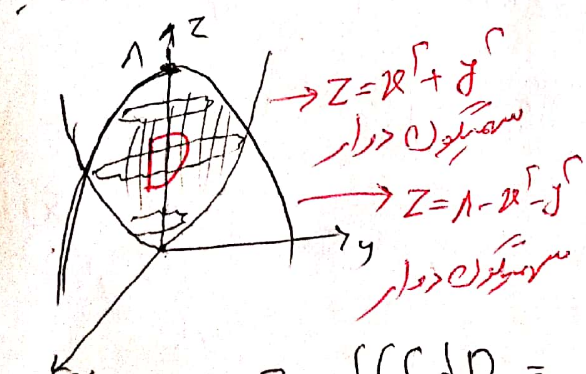
$$\boxed{dD = r\,dz\,dr\,d\theta}$$

تبصره: معمولاً زمانی از تغییر متغیر در مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم که ناحیه D یک ناحیه z-ساده و همچنین ناحیه D محور تقارن داشته باشد (بخصوص وقتی که محور z محور تقارن ناحیه D است) همچنین این تغییر متغیر تعمیم یافته قطبی در فضا است.

نمونه ۱: حجم جسم محدود به دو رویه $z=x^2+y^2$ و $z=8-x^2-y^2$ را با یک انتگرال سه‌گانه بیابید.

حل:

$$\text{حجم} = \iiint_D dD = ?$$



چون D یک ناحیه z-ساده و محور تقارن دارد از تغییر متغیر در مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\text{حجم} = \iiint_D dD = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2}\left(\int_{r^2}^{8-r^2} r\,dz\,dr\right)d\theta\right) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\left[8-r^2-r^2\right]dr =$$

جواب صفحه بعد

تصویر D در صفحه xoy (یا مختصات قطبی) را پیدا می‌کنیم:

تصویر D در صفحه xoy

$$\begin{cases} Z = 8 - x^2 - y^2 \\ Z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow 8 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 8 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

دایره‌ای با شعاع ۲

در مختصات قطبی $0 \le \theta \le 2\pi \,,\, r = 2$

حدود z هم در مختصات استوانه‌ای می‌نویسیم

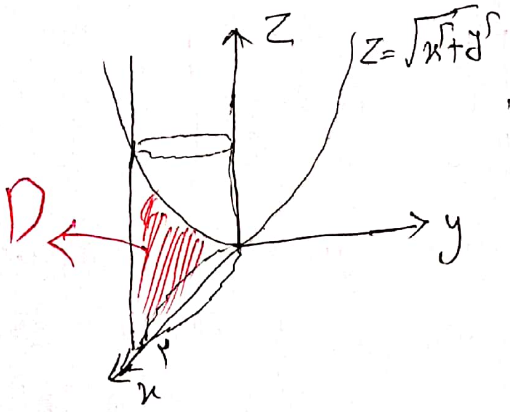
$$Z = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow Z = 8 - r^2$$

$$Z = x^2 + y^2 \Rightarrow z = r^2 \qquad r^2 \le Z \le 8 - r^2$$

ادامه حل انتگرال $= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \int_0^2 r\left[8 - 2r^2\right] dr = (2\pi)\left[\frac{8r^3}{3} - \frac{1}{2} r^4\right]_0^2 = 2\pi\left[\frac{64}{3} - 8\right]$

$= 2\pi\left[\frac{64 - 24}{3}\right] = \frac{80}{3}\pi$ واحد مکعب

نمونه ۲ : انتگرال $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x - x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2 + y^2}} dz\, dy\, dx$ را در مختصات استوانه‌ای حل کنید.



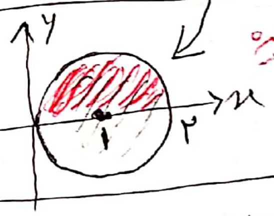
حل: $0 \le Z \le \sqrt{x^2 + y^2}$ و $0 \le y \le \sqrt{2x - x^2}$ و $0 \le x \le 2$

$$y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow y^2 + x^2 = 2x$$

در مختصات قطبی

$0 \le r \le 2\cos\theta$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$



تصویر نیم دایره بالایی

چون D ناحیه‌ای سه بعدی z-ساده است و تصویر آن در مختصات قطبی نیم دایره است از تغییر متغیر در مختصات استوانه استفاده می‌کنیم

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x - x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2 + y^2}} dz\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{r} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{8}{3} \int (1 - \sin^2\theta) \cos\theta\, d\theta$$

با تغییر متغیر $u = \sin\theta$ (*)

$$= \frac{8}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \boxed{\frac{16}{9}}$$ جواب

$Z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow Z = r \Rightarrow 0 \le Z \le r$

$Z = 0 \Rightarrow z = 0$

$y^2 + x^2 = 2x \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow r = 2\cos\theta$

$* \int (1 - \sin^2\theta) \cos\theta\, d\theta = \int (1 - u^2)\, du = u - \frac{u^3}{3} + c = \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + c$

مثال ۳: تغییر متغیر در مختصات کروی

برای حل انتگرال سه گانه $\iiint_D f(x,y,z)\,dD$ در مختصات کروی می‌توان از تغییر متغیر

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \quad (1)$$

کمک گرفت. بنابراین

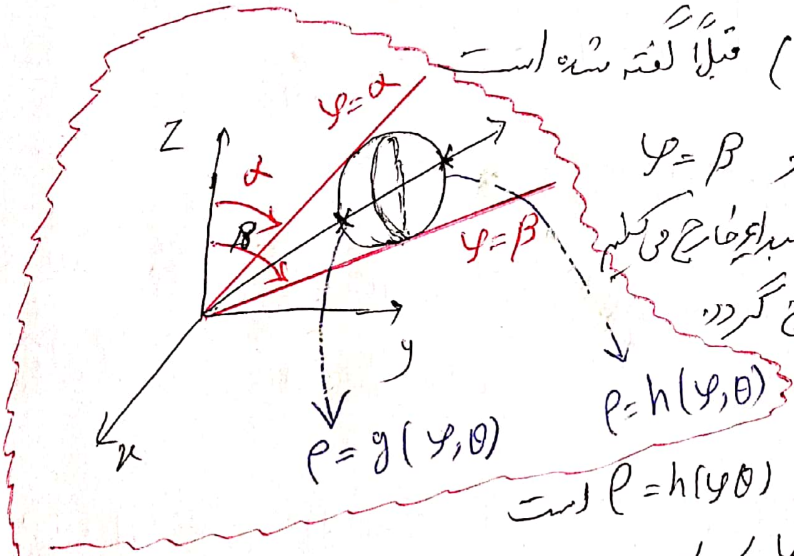
$$J(\rho,\varphi,\theta)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\rho^2\sin\varphi\underbrace{\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}}_{\text{حاصل این دترمینان برابر با عدد یک است}}=\rho^2\sin\varphi$$

در این تغییر متغیر $\rho\geq 0$ می‌باشد.

تبصره ۱: از این تغییر متغیر معمولاً زمانی استفاده می‌شود که ناحیه D مرکز تقارن داشته باشد زیرا انتگرال سه گانه براحتی قابل حل است مانند کره $x^2+y^2+z^2\leq a^2$

یافتن حدود ρ و φ و θ (جهت یادآوری) قبلاً گفته شده است



ناحیه فضای D را بین دو پرتو $\varphi=\alpha$ و $\varphi=\beta$ مانند شکل مقابل قرار می‌دهیم. پرتوی از مبدا خارج می‌کنیم طوری وارد ناحیه D شود و از ناحیه D خارج گردد.

محل ورود یک سطح (رویه) با معادله $\rho=g(\varphi,\theta)$ و محل خروج یک سطح با معادله $\rho=h(\varphi,\theta)$ است

پس $g(\varphi,\theta)\leq\rho\leq h(\varphi,\theta)$ و $\alpha\leq\varphi\leq\beta$

برای یافتن θ تصویر D در صفحه xoy (صفحه قطبی) را یافته و همانند مختصات قطبی حدود θ را می‌یابیم.

تبصره ۲: معادلات (1) یعنی $\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$ معادلات پارامتری کره‌ای با مرکز $(0,0,0)$ و شعاع ρ می‌باشد به همین دلیل

اگر D کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ باشد حدود ρ و φ و θ به صورت زیر است

$0\le\rho\le a$ و $0\le\varphi\le\pi$ و $0\le\theta\le 2\pi$

نمونه ۱ الف) حجم کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ را بیابید

ب) $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dD$ که در آن D درون کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ است را حل کنید

حل: چون کره مرکز تقارن دارد پس برای حل الف و ب از تغییر متغیر در مختصات کروی استفاده می‌کنیم و برای کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ طبق مطالب قبل $0\le\rho\le a$ و $0\le\varphi\le\pi$ و $0\le\theta\le2\pi$.

الف) حجم کره $=\iiint_D dD = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^a \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$

$$=\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^a \rho^2\, d\rho\right) = 2\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^a=$$

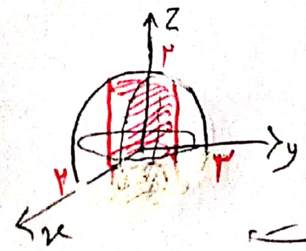
$$=(2\pi)(2)\frac{a^3}{3}=\frac{4}{3}\pi a^3$$ واحد مکعب

ب) $$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dD = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_0^a \underline{\rho^2\sin\varphi}\cdot\underbrace{\rho^2}_{(*)}\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi \sin\varphi\int_0^a \rho^4\, d\rho = (2\pi)(2)\left(\frac{a^5}{5}\right)=\frac{4\pi}{5}a^5$$

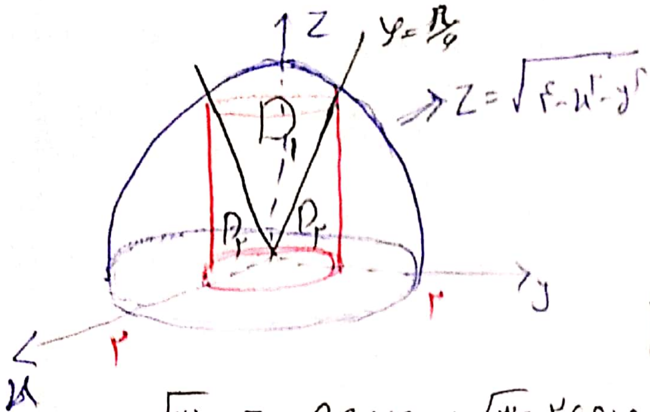
(*) نکته: بجای $x^2+y^2+z^2$ باید ρ^2 قرار دهیم نه a^2 چون $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ یک تابع است که در انتگرال قرار دارد.

نمونه ۲) انتگرال $\iiint_D f(x,y,z)\,dD$ که در آن D ناحیه داخل استوانه $x^2+y^2=1$ و محدود به نیم کره $x^2+y^2+z^2=4$ ، $z\ge0$ است را در مختصات کروی بنویسید.



حل: در مختصات کروی D به دو ناحیه تقسیم می‌شود $D=D_1\cup D_2$

در صفحه بعد شکل بزرگتر رسم شده است و D_1 و D_2 تعیین گردیده است



D_1 درون مخروط $\varphi=\frac{\pi}{6}$ قرار دارد و

D_2 داخل استوانه و خارج مخروط $\varphi=\frac{\pi}{6}$ قرار دارد

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow z^2=3 \to z=\sqrt{3}$$

غ ق ق $z=-\sqrt{3}$

$$\sqrt{3}=z=\rho\cos\varphi \Rightarrow \sqrt{3}=2\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}$$

$$x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow \rho=2$$

با فرض $f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi)=g$ بنابراین

$$\iiint_D f\,dD=\iiint_{D_1} g\,dD_1+\iiint_{D_2} g\,dD_2=\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2} g\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta}_{\text{برای } D_1}+$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\csc\varphi} g\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$D_1\begin{cases} 0\le\rho\le 2 \\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases},\quad D_2\begin{cases} 0\le\rho\le\frac{1}{\sin\varphi}=\csc\varphi \\ \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

برای D_2 حدود ρ از مبدأ (صفر) شروع می‌شود و به استوانه $x^2+y^2=1$ (یعنی $r=1$) ختم می‌شود یعنی

$$r=1 \Rightarrow \rho\sin\varphi=1 \Rightarrow \rho=\frac{1}{\sin\varphi}=\csc\varphi$$

و حدود φ از $\frac{\pi}{6}$ تا صفحه $z=0$ یعنی $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

نکته: اگر در انتگرال سه‌گانه ناحیه انتگرال‌گیری بیضیگون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ باشد می‌توان از تغییر متغیر کروی تعمیم‌یافته به صورت زیر استفاده کرد

$$\begin{cases} x=a\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=c\rho\cos\varphi \end{cases} \quad و \quad J(\rho,\varphi,\theta)=abc\rho^2\sin\varphi \qquad (۲)$$

و بیضیگون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ بعد از جایگذاری معادلات (۲) به کره $r=1$ تبدیل می‌شود

پس $0 \le \rho \le 1$ و $0 \le \varphi \le \pi$ و $0 \le \theta \le 2\pi$

مثال: الف) حجم بیضیگون را به کمک نکته قبل بیابید

ب) $\iiint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dD = ?$ که D درون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

است (D داخل بیضیگون)

حل: الف) طبق نکته قبل $\begin{cases} x = a\rho \sin\varphi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases}$ و $J(\rho,\varphi,\theta) = abc\rho^2\sin\varphi$ بنابراین

$0 \le \rho \le 1$
$0 \le \varphi \le \pi$
$0 \le \theta \le 2\pi$

$$\text{حجم بیضیگون} = \iiint_D dD = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} abc\rho^2\sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta = abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho =$$

$$= abc(2\pi)(2)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi abc \quad \text{واحد مکعب}$$

ب) $$\iiint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dD = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} abc\,\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= abc\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^1 \rho^4 d\rho = abc(2\pi)(2)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}\pi abc$$

تمرین:

انتگرال های زیر را حل کنید

الف) $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} dD$ که D کره $x^2+y^2+z^2=4$ است

ب) $\iiint_D (4x^2+36y^2+9z^2) dD$ که D بیضیگون $\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ است