

در ادامه آزمون های ریاضی می بینیم به آن می توان گفت سری یا دنباله سری را مشخص کرد که در آن سری به نرم هندسی یا اریتمی (تسکوبی نیست)

ابتدا بحث خود را با سری های با جملات مثبت آغاز می کنیم.

آزمون های سری با جملات مثبت

1- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر $p > 1$

2- آزمون انتگرال

3- آزمون مقایسه

4- آزمون مقایسه حدی

فقط از سری با جملات مثبت یعنی a_n ها داریم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هستی مثبت اند

1- فرم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر $p > 1$

و اگر $p \leq 1$ واگراست اگر $p \leq 1$

توجه: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ سری هار (هارمونیک) می گویند واگراست (چون $p=1$)

برای مثال سری های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ همگرا هستند. (سری داده شده سری p هستند)

در سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ ($p=5 > 1$) و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ ($p=1/5 < 1$)

2- آزمون انتگرال

فرض کنید f تابعی پیوسته، مثبت، نزولی روی $[1, +\infty)$ و $a_n = f(n)$

در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و فقط اگر انتگرال $\int_1^{\infty} f(x) dx$ همگرا باشد.

به عبارتی دیگر

(i) اگر $\int_1^{\infty} f(x) dx$ همگرا باشد آن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

(ii) اگر $\int_1^{\infty} f(x) dx$ واگرا باشد آن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

تذکره: برابر استفاده از آزمون انتگرال لازم نیست که سری یا انتگرال از $n=1$ شروع شود ($x=1$) شروع شود

مثلاً سری $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2}$ ← $\int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2}$

تذکره 2: حتماً در آزمون مقایسه باید به ترتیب مثبت بودن و منفی بودن a_n را در نظر بگیریم و باید بررسی شود در صورتی که اعداد منفی نباشند و آنرا می توان از این آزمون استفاده کرد.

ناله: چگونه می‌توانیم از آزمون انتگرال استفاده کرد؟

اگر با نگاه اول به سری متوجه شویم که انتگرال آن را می‌توان بارش را تغییر مقعر، جز به جز و حتی دوری جدول مقدماتی انتگرال به دست آورد از این آزمون استفاده می‌کنیم با ذکر مثال کی زیر مفهوم آزمون انتگرال را درک خواهیم کرد.

مثال 9) مشخص کنید سری‌های زیر همگرا هستند یا نه.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$

حل: 1) قرار دهیم $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ و بازه $[1, +\infty)$ است (با توجه به اینکه $n=1$ شروع شده است) $f(x)$ روی $[1, +\infty)$ پیوسته است. (با نگاه اول متوجه می‌شویم که انتگرال $f(x)$ را بایدیم)

بررسی شرایط 1- مثبت بودن f ✓

2- پیوستگی ✓

3- نزولی بودن f ؟

چون $x \geq 1$ پس مشتق $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} < 0$ منفی است و منبج هم مثبت است

دلیل $f'(x) < 0$ ← f نزولی است در بازه $[1, +\infty)$ ✓

نتیجه: آزمون انتگرال برقرارند ←

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} (\tan^{-1} x)_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\tan^{-1} t - \tan^{-1}(1)) = \tan^{-1}(\infty) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

جواب انتگرال نامتناهی عدد است پس $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ همگرا است ← بنابراین آزمون انتگرال

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ همگرا است

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

حل 2: (با نگاه اول متوجه می‌شویم که انتگرال $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ را به روش تغییر مقعر می‌توانیم در نظر بگیریم) $y = \ln x$
 بررسی شرایط:
 1- مثبت بودن: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ در بازه $[1, +\infty)$ مثبت است و منبج هم مثبت است.
 2- پیوستگی: تابع f در بازه $(0, +\infty)$ پیوسته است.
 3- نزولی بودن: ؟

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (x)' \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

تذکره: برای اینکه تابع $f(x)$ پس باید $\Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow -\ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x > 1$

$$e \rightarrow e^{\ln x} > e \rightarrow x > e \approx 2.7$$

پس برای $x > e$ و $f'(x) < 0$ سری فوق را طوری می نویسیم که بتوان از آزمون اشتراک استفاده کرد

که شرط نزولی بودن در آن بازه برقرار باشد

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

دو جمله اول سری را بیرون می آوریم تا سری از $n=3$

شروع شود و شرط نزولی بودن بودن صدق کند

تعداد متناهی جمله نقشی در همگرایی یا واگرایی سری ندارند

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow \int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_3^t \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_3^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(\ln t)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} \right]$$

$$= \frac{\ln(\infty)^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(3)^2 = \infty$$

چون جواب اشتراک نامتناهی شد متناهی نیست پس $f(x)$ واگر است و نتیجه سری $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ نیز

واگر است. از طرفی با نامتناهی تعداد متناهی جمله نقشی در واگرایی یا همگرایی سری ندارند

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ واگر است.

مثال 3- بررسی همگرایی یا واگرایی $f(x) = x e^{-x}$ به روش جزیه جزیه قابل حل است. پس بتوان از آزمون اشتراک استفاده کرد.

$$f(x) = x e^{-x}$$

بررسی شرایط $\left\{ \begin{array}{l} 1- مثبت بودن \checkmark \\ 2- میوه شدن \checkmark \\ 3- نزولی بودن ? \end{array} \right.$

$$f'(x) = (x)' e^{-x} + (x)(e^{-x})' = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x} (1 - x)$$

توجه: بازه x وابسته به n است. چون n از 1 تا ∞ است پس x نیز از $(1, \infty)$ است

$x > 1 \Leftrightarrow 1 - x < 0$
« از 1 به بالا »

3-1: آزمون مقایسه

در آزمون مقایسه ایده اصلی اینست که سری مفروض را با سری که داریم همگرایی یا واگرایی مقایسه کنیم.
آزمون مقایسه: فرض کنید که $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سری‌های با جملات مثبت باشند.
 (الف) اگر $\sum b_n$ همگرایی داشته باشد و برای هر n ، $a_n \leq b_n$ ، آنگاه $\sum a_n$ نیز همگرایی داشته باشد.
 (ب) اگر $\sum b_n$ واگرایی داشته باشد و برای هر n ، $a_n \geq b_n$ ، آنگاه $\sum a_n$ نیز واگرایی داشته باشد.

سوال: برای صریح سری‌های از آزمون مقایسه استفاده می‌کنیم؛ اگر سری مورد نظر شکلی شبیه سری‌های p یا سری هندسی داشت، به ویژه اگر a_n تابعی گویا یا تابعی جبری از n بود (در آزمون ریشه چند جمله‌ای‌ها هم هست (مورد خاصی)).

نکته: برای استفاده از آزمون مقایسه باید سری معروفی برای $\sum b_n$ داشته باشیم. اکثر اوقات از سری‌های زیر استفاده می‌کنیم.

1- سری p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (اگر $p > 1$ سری همگرایی دارد و اگر $p \leq 1$ سری واگرایی دارد)
 2- سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ یا $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ (اگر $|r| < 1$ سری همگرایی دارد و اگر $|r| \geq 1$ سری واگرایی دارد)

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را مشخص کنید.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$

حل 1: سری این نرم تابع گویا است مقایسه با سری p مقایسه می‌کنیم.

موت کسر در ثابت 5 است، کاری با موت کسر نداریم به سراغ مخبر می‌رویم. جمله غالب را در نظر می‌گیریم (جمله غالب خطای است که طول آن در عبارت داده شده بیشتر است).
 مقیاس مقایسه را انجام دهیم!

$2n^2 + 4n + 3$ (جمله غالب)

علاقه مندی نسبت به مقیاس

در مخبر قرار دادیم $\Rightarrow 2n^2 + 4n + 3$
 پس برعکس می‌کنیم (وقتی رابطه $\leq$ را برعکس می‌کنیم جهت نامساوی عوض می‌شود)
 $\frac{1}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{1}{2n^2} \xrightarrow{\times 5} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$
 جمله عمومی سری $\frac{5}{2n^2}$ را می‌دانیم

$(a_n \leq b_n)$
بناشتم

$$b_n = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^8 \frac{1}{n^2}$$

$$\Leftarrow b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2}$$

رائسہ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

بنا بر اصول تقاضی

$p=2$ درستی چهارم است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{سری } p \text{ است}$$

۱
n² مانی دانیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

سری سمیت رائیہ
ہنگرائیہ

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

همه را هست

حل 2) ابتدا به سری نگاه می کنیم عبارت جبری است به صورت $\frac{1}{x^2}$ را در حالی که عبارت داخل را حال

خند جله راست ← از خون مقابله ← سیری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

صورت کمر عدد ثابت یک است. ثابت می ماند.

بہ سرائح مخرج کسری و موم یک نامادی می مانیم (جلد غالب)

$n^3 + 1 > n^3$
 جملہ منفی لہری
 —————
 رادی سازم
 —————
 راجہ فوق

$$\sqrt{n^3+1} > \sqrt{n^3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} \quad b_n$$

طریقہ راجعہ میں

الآن $a_n < b_n$
سافتم

$$\rho = \frac{3}{2} \quad \text{و } \rho \text{ غير صحيح} \quad b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\sim b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \quad \text{CWS}$$

و $p > 1$ پس سری همگراست $\sum b_n$ در نتیجه بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ همگراست.

$a, b, c, d \in R$, متعلق به یک راجع می‌اندازیم - اند
 $R[a] = \{c^n + d\}$, $R[a] = \{c^n - d\}$

(ii) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$: 2 marks

حل 3) قبلاً با n آزمون استدلال حل کردم. اکنون می خواهم با n آزمون تفصیلی بررسی کنم.
می دانم به ازای $n \geq 3$ $\rightarrow$ $n \geq 1$ طریق باید n تفصیلی کنم.

$$\ln 1 = 0$$
$$\ln 2 \approx 0.7$$
$$\ln 3 \approx 1.1$$

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$$

در لایه همسان است
($p=1$) و عاقل است

فیز وایر است $\Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ بنابر اول

حل 3 ممکن است این سوال پیش آید که سری اول، n از یک شروع می‌شود و ما در این سری از برای نشان داریم. آیا این تغییرت با سری اول ندارد؟
 برابر پاسخ به این سوال این است که تعداد متناهی جمله تأخیری در واکر این سری ندارد.

واکر است $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n} + \text{جمله دوم} + \text{جمله اول}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

حل 4 در نگاه اول به بینیم که سری، سری از سری هندسی است. $\leftarrow$ با سری هندسی وجود صلاحت 2^n و 3^n
 املوت ساخته شده نامادی را برابر صورت سری در نظر می‌گیریم

$4+3^n > 3^n$ در $\frac{1}{2^n}$ ضرب می‌کنیم
 $\frac{4+3^n}{2^n} > \frac{3^n}{2^n}$ b_n
 $b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

که $\left| r \right| = \left| \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2} > 1$ پس سری b_n واگر است. بنابراین از اصول تقاسیم سری داده شده واگر است.

توجه: در اصول تقاسیم در جمله اول اگر صورت و مخارج یکسان از یک جمله باشند نامادی این نام
 اما اگر تنها مخارج یکسان از یک جمله داشته باشند
 تنها برابر مخارج نامادی مورد نظر را می‌سازیم / اگر صورت یکسان از یک جمله داشته باشند صورت سری نامادی
 بر اساس ساختن نامادی نگاه به جمله غالبی کنیم.

آزمون تقایب جدی

قبل از آنکه آزمون تقایب جدی را بیان کنیم به ذکر مثال زیر می‌پردازیم.

مخرج یکسان از یک جمله داریم نامادی برابر است
 مخارج می‌سازیم
 فرضین عبارت ها را می‌کنیم
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$
 $2^n - 1 < 2^n$ جمله عمومی سری را می‌سازیم پس کافی است
 $\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$

سری نامادی
 سری نامادی
 است P

اکنون b_n ساخته شد اثبات مادی $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n-1}}$ برای آزمون مقایسه به طریقی آید

زیرا $\sum \frac{1}{2^n}$ یک سری p است که $(p = \frac{1}{2} < 1)$ و همگراست و حاصل جمع آن آزمون

مقایسه وقتی داریم $a_n > b_n$ باید b_n را بسازیم و حاصل جمع b_n را بسازیم
همگراست پس آزمون مقایسه استفاده کرده در چنین مواردی که ابتدا اثره
نمی توان

در آزمون مقایسه
هرگز نباید از آن استفاده کرد
هرگز نباید از آن استفاده کرد

1- به طریقی به همگراست
2- $a_n < b_n$ و b_n را بسازیم
 $a_n > b_n$ و b_n را بسازیم

در آزمون مقایسه به درستی خود و از آزمون مقایسه حدی استفاده می کنیم

آزمون مقایسه حدی:

فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سری های با جمله های مثبت باشند اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$

1- اگر c عددی مثبت باشد و $c > 0$ ، آنگاه یا هر دو سری همگرا هستند یا هر دو سری واگرا هستند.

2- اگر $c = 0$ و $\sum b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ همگراست
3- اگر $c = \infty$ و $\sum b_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ نیز واگراست

مثال 11 همگرای یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$$

حل 11 نشان داریم که با آزمون مقایسه به جایی نمی رسیم. با آزمون مقایسه حدی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n - 1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

چون $c = 0 > 0$ و

همگراست. پس بنابر آزمون مقایسه حدی هر دو سری همگراست $\sum b_n = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ سری هندسی با $\frac{1}{2} < 1$

توجه: در این مثال حدی نیز سری به عنوان $\sum b_n$ در نظر گرفته می شود سری هندسی یا سری p است که با توجه به نوع سری b_n از سری هندسی یا سری p استفاده می کنیم.

توجه 2: استفاده از آزمون مقایسه را با دقت بالایی نسبت به آزمون مقایسه حدی قرار دارد در صورتی که به شکل $\sum b_n$ به این شکل آزمون مقایسه حدی می رویم.

حل 2 در این صورت که حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ وجود دارد و b_n سری p است و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C$ برای هر دو نامادری داریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{\sqrt{5+n^5}}$$

$$\text{①} \quad 2n^2+3 > 2n^2 \quad \text{صورت کسر}$$

$$\text{②} \quad \frac{1}{\sqrt{5+n^5}} < \frac{1}{\sqrt{n^5}} \quad \text{مکمل می کنیم} \rightarrow \sqrt{5+n^5} > \sqrt{n^5} \rightarrow 5+n^5 > n^5 \quad \text{مخرج کسر}$$

علاقت نامادری در ① و ② می نیست یعنی توان نامادری مورد نظر برای چیست

پس آزمون مقایسه را اینجا با اعداد می رویم. به این شکل آزمون مقایسه حدی می رویم:

$$\text{طریقه یافتن } b_n \text{ در این حالت} = \frac{\text{صورت کسر}}{\text{مخرج کسر}} = \frac{2n^2}{\sqrt{n^5}} = \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}} \Rightarrow \sum b_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

سری p (با $p = 1/2 < 1$) و اگر است

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2+3}{\sqrt{5+n^5}}}{\frac{2}{n^{1/2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2+3) \times n^{1/2}}{2\sqrt{5+n^5}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{5/2} + 3n^{1/2}}{2\sqrt{5+n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{5/2}}{2n^{5/2}} = 1$$

$\Rightarrow C = 1 > 0 \rightarrow$ با آزمون مقایسه چون b_n واگراست $\rightarrow$ سری $\sum a_n$ واگراست

سری گسسته

آزمون کراتل برای بررسی هر یک از سری‌ها در حیطهٔ کسرها مثبت بوده در اینجا سری متناوب
از معرزی‌ای نیست و از آن جهت مخصوص سری متناوب را ارائه می‌دهیم.

سری متناوب: سری است که جمله‌های آن بی‌درمیان مثبت و منفی گند. برابر مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} = -1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \dots$$

نکته: سری‌های به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ را سری متناوب می‌نامند. ($b_n > 0$ است)
نکته: البته سری‌های $(-1)^n$ را ندارند اما متناوب هستند مانند

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi = \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \dots = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

چنانچه سری بی‌درمیان مثبت و منفی یک است

آزمون سری متناوب (الایب معین)

اگر سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ که $b_n > 0$
(i) برای هر n $b_{n+1} \leq b_n$ (نزولی)
(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$
آنگاه سری همگراست.

مثال 12: همگرایی یا دگرگونی سری‌های زیر را بررسی کنید.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$

توجه: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ را سری همگرا می‌نامند.

تعریف: سری $\sum a_n$ را همگرای مطلق می‌نامند، به شرطی که سری قدر مطلق‌ها $\sum |a_n|$ همگرا باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$$

نوع 1: اگر $\sum a_n$ سری با جملات مثبت باشد آنگاه $|a_n| = a_n$ و در این حالت همگرای مطلق همان همگرای است.

تعریف: سری $\sum a_n$ را همگرای شرطی (مشتروط) می‌نامند به شرطی که همگرا باشد اما همگرای مطلق نباشد.

مثال 13 نوع همگرای سری‌های زیر را تعیین کنید.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

حل 1: منظور از نوع همگرای مطلق $\sum |a_n|$ همگرای $\sum a_n$ است و اگر است

سری p که $p > 1$ ($p=2$) همگراست $|(-1)^{n-1}| = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

پس سری مفروض همگرای مطلق است (چون $\sum |a_n|$ همگراست)

حل 2: سری‌های p که $p \leq 1$ همگرا نیست

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

اما $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ سری متناوب است که همگراست (مثال 12 قسمت ا) پس سری مفروض همگرای شرطی است.

توضیح: اگر سری $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد، همگراست.

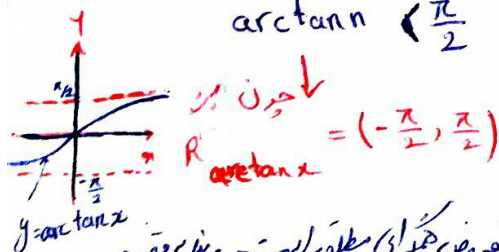
تذکره: بعضی از سری‌ها عبارات مثلثاتی مانند $\sin n$ ، $\cos n$ ، $\arctan n$ و غیره دارد. در اینگونه موارد

$$|\cos n| < 1 \quad , \quad |\sin n| < 1$$

از نامساوی‌های تریگنومتری می‌توانیم

$$\arctan n < \frac{\pi}{2}$$

« داشتن این نامساوی‌ها در حل تمرینات مفید است »



برای مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

« سری فوق با آزمون مقایسه همگراست، بنابراین سری مفروض همگرای مطلق است و نامشروطی »

نوع همگراست

آزمون‌های زیر برای تشخیص کردن همگرایی مطلق سریها مفید است.

۱- آزمون نسبت (دالامبر)

۲- آزمون ریشه

آزمون نسبت

(ن) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$ ، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرایی مطلق است و در نتیجه همگرایی است.

(ن) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ یا $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$ ، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

(ن) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ ، آزمون نسبت نتیجه قطعی ندارد؛ یعنی نمی‌توان در مورد همگرایی یا واگرایی $\sum a_n$ نتیجه گرفت و توصیه می‌شود از آزمون دیگر استفاده کرد.

سوال: در جزیج سری‌های می‌توان از آزمون نسبت استفاده کرد؛ در مورد سری‌های در آنجا که قوی‌تر یا دیگرها ملغزب حا وجود دارد که شامل عددی ثابت به توان n رسیده است. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$ و $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \right)$

تذکر: در مورد همه سری‌های p و هفت باج‌های گویا و جبری از n ، آزمون نسبت مناسب نیست زیرا $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ (سری‌های p آزمون محصول خودشان دارند و دیگر بسیاری برای آزمون

بست و باج گویا و جبری از n ؛ آزمون تناسب متقابل عددی واگرایی به نتیجه می‌رسد)

مثال ۱۰- (نست ۲)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$

مثال ۱۴ همگرایی مطلق سری‌های زیر را بررسی کنید

حل ۱) $a_n = \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$ در اینجا عددی ثابت به توان n رسیده است $\leftarrow$ آزمون نسبت

مثلاً این کردم که اگر به صورت حاصلضرب باشد که در آن عددی ثابت به توان n رسیده باشد از آزمون نسبت

مردم به جای حاصلضرب می‌توانند تقسیم کنند که در اینجا خط می‌شود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{(-1)^n \frac{n^3}{3^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{(n+1)^3}{n^3}$$

موسمی شود

خوبه که تر
از این منفعه بزرگ‌تر است
حد می‌توان استفاده کرد

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\infty} \right)^3 = \frac{1}{3} < 1$$

بنابر آزمون نسبت $L = \frac{1}{3} < 1$ پس سری فوق همگرا می باشد و بنابر این همگراست

و چون $a_n = \frac{n^n}{n!}$ و چون a_n مثبت است

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

یعنی همگرا می باشد

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \xrightarrow{\ln} \ln y = \ln \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \infty \times 0 \xrightarrow{\text{قانون هسپ}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = e \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = e > 1$$

بنابر آزمون نسبت $L = e > 1$ پس سری واگراست.

نرم: مثال فوق را می توان به سادگی با استفاده از روش دیگر حل کرد:

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \times n \times n \times \dots \times n}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}$$

$$n^n = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{n \text{ بار}}$$

$$n! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}_{n \text{ بار}}$$

$$= \frac{n}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n}{3} \times \dots \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n} \geq n$$

آزمون ریشه
(i) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ ، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا (مطلقاً) است (نیاز به همگرا نیست)

(ii) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ یا $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ ، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگر است

(iii) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ ، آزمون ریشه نتیجه قطعی در بر ندارد. (آزمون جابجایی دهد)

توجه: اگر در آزمون نسبت $L=1$ ، آزمون ریشه را امتحان نکنید زیرا با هم $L=1$ می شود. اگر در آزمون ریشه $L=1$ ، آزمون نسبت را امتحان نکنید زیرا این آزمون هم به دردی نمی خورد.

سوال: بی از آزمون ریشه استفاده کنیم؛ اگر a_n به شکل $(b_n)^n$ باشد، ممکن است آزمون ریشه کار باشد.

مثال: همگرایی سری های زیر را بررسی کنید
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n^n}$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$

حل 1) $a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$ (وجود توان n برابر جمله عددی) ← آزمون ریشه

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

توجه: a_n را به مثبت است n

این نیازی به قدر مطلق نیست چون

$$|a_n| = a_n$$

بنابراین آزمون ریشه $L = \frac{2}{3} < 1$ پس سری همگرا مطلق است در نتیجه همگرا است.

تذکره: در سری موارد ممکن است سری حالت سری باشد و فقط صورت سری یا مخرج مسری توانی از n رسیده باشد (کل کسری توان n نباشد) ما را اینگونه موارد هم آزمون ریشه می تواند حل کند.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$$

ادامه حل با دانشجو

استفاده می کنیم، مانند:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \right)$$

حل 2) $a_n = \frac{(-2)^{2n}}{n^n} = \frac{4^n}{n^n}$ می توان نوشت $a_n = \frac{(-1)^{2n} 2^{2n}}{n^n} = \frac{4^n}{n^n}$

مقیاس است $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0 < 1$

بنابراین سری همگرا است $L=0 < 1$ ، همگرای مطلق است در نتیجه سری همگرا است.

در اینجا از بول هاب بیان رسید. اکنون چند مثال را در اینجا هم می آوریم تا بدانیم که در هر مثال از کدام از بول استفاده کنیم.

تقریباً همگرای یا واگرایی و همچنین نوع همگرای سری های زیر را مشخص کنید

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sin 1}$ نوزدهم بول و 7

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ نوزدهم بول و 7

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n n^2}{n!}$ نوزدهم بول و 8

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 35 و 43

5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k + 4^k}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ 14 و 32

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$ 3 و 43

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$ 27 و 26

حل 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sin 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sin 1}} \rightarrow$ سری p
 می دانیم $0 < \sin x < 1$ - و از طرفی $p = \sin 1 < 1$ متناظر با سری p واگرایی

حل 2) اگر $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$ با نگاه اول متوجه می شویم که اشتغال $f(x)$ می توان با روش تغییر به اشی یافت

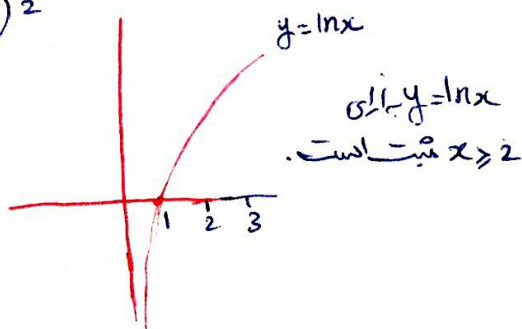
$a_n = f(n)$ که $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$ (با توجه اینکه سری از 2 شروع می شود تا 2 بازه $x \in [2, \infty)$)

بررسی شرایط
 1. مثبت بودن
 2. نزولی بودن
 3. پیوستگی

✓ (نقطه ناموجودی منفرد است که در بازه $(2, \infty)$ قرار ندارد.)

$f'(x) = \frac{0 - ((x)(\ln x)^3)' \times 1}{(x(\ln x)^3)^2} = \frac{(x)(\ln x)^3 + x((\ln x)^3)'}{(x(\ln x)^3)^2}$

$= \frac{(\ln x)^3 + x \times \frac{3}{x} (\ln x)^2}{(x(\ln x)^3)^2} < 0$



حل 3) وجود $n!$ به ازای هر n مثبت

$$a_n = \frac{(-3)^n n^2}{n!} = \frac{(-1)^n 3^n n^2}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+1} (n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(-1)^n 3^n n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} (n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{3^n n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 3 (n+1)^2}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{3^n n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} \times \frac{(n+1)^2}{n^2} = 0$$

در اینجا به نظر می‌رسد که این حد صفر است (نقد صفت 8)

چون $L = 0 < 1$ پس بنا بر آزمون نسبت همگرای مطلق است پس همگرا است

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \times n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

در اینجا a_n مثبت است $\forall n$

نیازی به قدر مطلق نیست

حل 4) وجود توان (n^2) به ازای هر n مثبت

چون $L = e > 1$ پس بنا بر آزمون ریشه همگرا نیست.

حل 5) سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k + 4^k}$ همگرا است (آزمون مقایسه به مشکل برخوردیم به این سری به این شکل از سری هندسی مقایسه می‌کنیم) و این سری هندسی مقایسه می‌کنیم

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k + 4^k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k + 4^k}$$

چون سری با جملات مثبت است

$$3^k + 4^k > 4^k$$

$$\frac{1}{3^k + 4^k} < \frac{1}{4^k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

جمله عمومی رای سارنم

مرحله 1
طریق رابطه فوق را معکوس
می‌کنیم

در حالتی که $a_n < b_n$ می‌بینیم (سری b_n نیز همگرا باشد)

صورت: این است که به سادگی و فرج در جمله دارد

پس نامی برابر فرج می‌نامیم

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \Rightarrow |r| = \frac{1}{4} < 1$$

سری هندسی که همگرا است بنا بر آزمون مقایسه همگرا است (همگرای ضلوع)

(7 حل) سری $\sum (-1)^n b_n$ هست. ابتدا فرض کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ با آزمون واگراسی بریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum (-1)^n \frac{n}{n+2} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1 & \text{زوج } n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n+2} = -1 & \text{فرد } n \end{cases}$$

حد وجود ندارد (چون برای n در زوج و فرد حدی متفاوت دارد) پس بنا بر آزمون واگراسی با سری مفروض واگراسی

سری مفروض به شکلی از سری هندسی است $\leftarrow$ وجود $e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}}{e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^2 = 1$$

لا محل دومه

چون $c = 1 > 0$ پس چون $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ و

$\frac{1}{e} = \frac{1}{2.7} < 1$ پس سری هندسی همگراست در نتیجه بنا بر آزمون مقایسه سری

همگراست. $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$

مطلق $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ چون در اینجا $a_n > 0$ پس سری مفروض همگرای مطلق است

چون $a_n > 0 \forall n$

$a_n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}_{> 0} \underbrace{e^{-n}}_{> 0}$

راه حل اول: اگر آزمون نسبت می توان استفاده کرد به صورت حاصل ضرب دو عبارت که در آن یک عبارت به توان n رسیده است

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{e}\right)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n \frac{1}{e}}{\frac{(n+1)^2}{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 (n+2)^2}{(n+1)^2 (n+1)^2} \times \frac{1}{e}}{\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2}} = \frac{1}{e} < 1$$

چون $\frac{1}{e} < 1$ پس سری همگرای مطلق است با آزمون مقایسه سری

بر اساس نکتہ در صفحه 8

حدش یک می شود

بنا بر آزمون مقایسه $\frac{1}{e} < 1$ پس سری همگرای مطلق است و در نتیجه همگراست

جمع بندی و خلاصه آزمون ها

1- نسبت بارش { برای سری با هملات مثبت و منفی به کار رود
 2- مقایسه
 3- مقایسه سری
 برای هملات مثبت

1- اولویت استعاره برای آزمون ها

جمع بندی و خلاصه در مورد آزمون ها

اولویت استعاره در آزمون ها

1- آزمون نسبت بارش: سری با هملات مثبت و یا منفی باشد (یا متناوب باشد) از آزمون نسبت بارش استفاده می کنیم. *با توجه به اینکه در جمله عمومی a_n باید به توانی n رسیده است (نسبت) را a_n به نرم (n) باشد (n) به تقسیم*

توجه! چنانچه سری متناوب باشد و به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با آزمون سری متناوب از آن می دهیم
 توجه 2: چنانچه سری با هملات مثبت باشد و جمله عمومی به نرم تابع گویا یا عبارت جبری باشد و یا به شکلی از سری هندسی باشد به سراغ آزمون مقایسه یا مقایسه سری می رویم که اولویت انتخاب این دو آزمون به صورت زیر است

1- آزمون مقایسه *سری جمله عمومی به صورت تابع گویا یا عبارت جبری و یا به شکلی از سری هندسی و m باشد*
 2- آزمون مقایسه سری

* اگر ریشه اول *جمله عمومی سری را بتوان بارش n به تقسیم حل شود* آزمون استرال

* **توجه 1:** اگر در آزمون سری متناوب $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ آزمون واگنر ای
 * اگر جمله عمومی مخالف منفر باشد $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ آزمون واگنر ای

توجه 2: آزمون کی تاثير فقط در مورد سری که با جمله کی مثبت می توان به کار برد اما اگر $\sum a_n$ جمله کی منفی داشت می توانیم از آزمون $\sum |a_n|$ استفاده کنیم و گویای مطلق را آزمون کنیم

تقریبات به همده را بنویس: $239 \rightarrow 23, 20, 18, 11, 3$
 $243 \rightarrow 23, 28, 13, 10, 7$

سری توانی:

هر سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$ در آنجا ضرایب ثابت هستند،

به یک سری توانی موسوم است. در حقیقت یک سری توانی یک سری است که $a_n = c_n (x-a)^n$

سری فوق را سری توانی بر حسب $(x-a)$ یا سری توانی به مرکز a یا سری توانی حول a می نامند.

توجه: اگر $a=0$ $\leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ (یک جمله مرتبه صفر است)

در رابطه با این نوع سری ها بحث فاصله همگرایی مطرح است، یعنی می خواهیم ببینیم این سری در ازاء چه مقادیری

از x همگرا است. برای این منظور همگرا بودن را مطابق یکی از آزمونهای نسبت یا ریشم به صورت

زیر می نویسیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

الف) شرط همگرایی طبق آزمون نسبت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

ب) شرط همگرایی طبق آزمون ریشم

توجه: بعد از اعمال شرط همگرایی محدودی برای x می یابیم. نقاط ابتدا و انتها را جداگانه بررسی می کنیم. اگر در هر یک از نقاط ابتدا یا انتها سری همگرا باشد بازه را بسط دهیم و اگر واگر بود در آن نقطه مانده را باز در نظر می گیریم.

نکته: نصف طول بازه (فاصله) همگرایی را شعاع همگرایی می نامیم.

مثال 16 به ازای چه مقادیری از x سری $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ همگرا است؟

حل: $a_n = n! x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) n! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x|$$

$\infty = \infty$ فوق

اما اگر $x \neq 0$

($1 < 0$ چون حد در شرط همگرایی صدق نمی کند)

2- سری فقط در $x=0$ همگرا است.

مثال 17 دامنه (بازه) همگرایی و شعاع همگرایی سری توانی زیر را تعیین کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2}$$

حل: $a_n = \frac{(x-3)^n}{n!}$ در سری همگرا. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(x-3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right|$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x-3| < 1 \Rightarrow |x-3| < 1 \Rightarrow$ حدود x را می‌یابیم

$\Rightarrow -1 < x-3 < 1 \xrightarrow{+3} 2 < x < 4$
 $\Rightarrow$ شعاع همگرایی $= \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow R=1$

یادآوری
 $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

در نقاط ابتدا و انتها جداگانه همگرایی را بررسی می‌کنیم برای اینکه نوع باز یا بسته بودن دامنه (بازه)

همگرایی را همین‌کیم. سری متناوب. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $\checkmark \forall n \geq 1 \quad b_n > 0$ (1)
 $b_n = f(n)$ و $f(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ $\checkmark$ b_n نزولی است (2)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ $\checkmark$ (3)

پس سری مورد نظر همگراست $\Leftarrow$ ابتدای بازه بسته
 $x=4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\checkmark$ سری هارمونیک $\Leftarrow$ انتهای بازه باز
 (سری $p=1$)
 بررسی بجزای $x=4$ را در ادامه
 دامنه $[2, 4]$ بازه همگرایی

مثال 18 برای چه مقادیری از x ، سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ همگراست؟

حل: $a_n = \frac{x^n}{n!}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right|$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x| = 0 < 1$$

حد برای هر x منفی شود لذا بازه همگرای $(-\infty, \infty)$ می باشد و $R = \infty$ است.

مثال 19) نمونه سوال دی 98
تابع همگرایی و شعاع همگرایی سری توانی زیر را مشخص کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{3^n n^2}$$

$$a_n = \frac{(3x-2)^n}{3^n n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(3x-2)^{n+1}}{3^{n+1} (n+1)^2}}{\frac{(3x-2)^n}{3^n n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3x-2)^{n+1} (3x-2)}{3^{n+1} (n+1)^2} \times \frac{3^n n^2}{(3x-2)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3(n+1)^2} |3x-2| < 1 \Rightarrow |3x-2| < 3$$

$$\frac{1}{3} \Rightarrow -3 < 3x-2 < 3 \xrightarrow{+2} -3+2 < 3x < 3+2$$

$$\rightarrow -1 < 3x < 5 \xrightarrow{\div 3} -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$$

$$R = \frac{5/3 - (-1/3)}{2} = \frac{6/3}{2} = 1 \rightarrow R=1$$

مرکزی در $x = -\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{3^n n^2} \stackrel{x=-1/3}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3(-1/3)-2)^n}{3^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

سری متناوب $\rightarrow$ بررسی می کنیم

$$b_n = f(n), f(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0 \quad b_n = \frac{1}{n^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{در } x_0 = -3 \\ \text{در } x_0 = 2 \end{array} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \checkmark$$

بنابراین سری متناوب با سری منفرد همگراست $\leftarrow$ در $x = -\frac{1}{3}$ بازه همگراست

سری $p=2 > 1$ همگراست $\leftarrow$ در $x = \frac{5}{3}$ بازه همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{3^n n^2} \stackrel{x=5/3}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3(5/3)-2)^n}{3^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

بازه همگرایی $\left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right]$

با توجه به مثال دی حل شده، مقصود زیر این است که بنویسیم
 مقصود: برای سری توانی معروض $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ فقط 3 حالت وجود دارد

↓
 شعاع همگرایی

1) سری فقط اهو صی همگراست $x=a$ (در این حالت $R=0$)

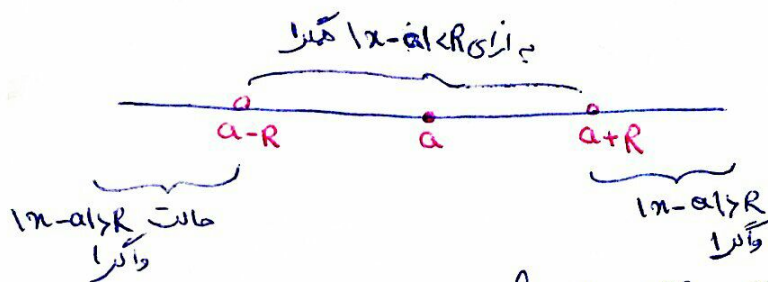
2) سری به ازای همه x همگراست (در این حالت $R=\infty$)

3) عدد مثبت R مانند R وجود دارد که اگر $|x-a| < R$ سری همگراست و اگر $|x-a| > R$ سری واگراست.

شعاع همگرایی

حالت 3) بازه همگرایی - حالت 4 وجود دارد

$(a-R, a+R)$, $[a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$, $(a-R, a+R]$



مثال 5, 4, 947 و 948 مطالع شود.

6, 8, 9, 10, 15, 16

تقریبات به همده را بنویسید 943