به عبارت دیگر تابع $f(x,y)$ در (a,b) مشتق ناپذیر باشد یا اینکه $\vec{\nabla} f(a,b)=0$ باشد.

مثال ۳: مقدارهای اکسترمم $f(x,y)=y^2-x^2$ را پیدا کنید.

حل: این تابع مقدار اکسترمم (ماکسیمم و مینیمم) ندارد زیرا

$$\begin{cases} f_x=-2x=0 \longrightarrow x=0 \\ f_y=2y=0 \longrightarrow y=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$$

$(0,0)$ یک نقطه بحرانی تابع $f(x,y)$ است ولی هر قرص بازی به مرکز $(0,0)$ در نظر بگیریم روی این قرص روی محور xها (یعنی $y=0$) $f(x,y)=f(x,0)=-x^2<f(0,0)$

و روی محور yها (یعنی $x=0$) داریم: $f(x,y)=f(0,y)=y^2>f(0,0)=0$

بنابراین $(0,0)$ نمی‌تواند نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x,y)$ باشد. این نقطه $(0,0)$ را طبق تعریف زیر یک نقطه زینی یا minmax تابع $f(x,y)$ نامیده می‌شود.

تعریف (نقطه زینی) اگر $f_x(a,b)=0$ و $f_y(a,b)=0$ و هر همسایگی (قرص) بازی از (a,b) شامل نقاطی چون (x,y) باشد که $f(x,y)>f(a,b)$ و روی نقاط دیگری $f(x,y)<f(a,b)$ در این صورت نقطه (a,b) را نقطه زینی یا minmax تابع f می‌نامیم.

به کمک آزمون زیر که به آزمون مشتق مرتبه دوم معروف است می‌توان ماهیت نقطه بحرانی (a,b) برای تابع دو متغیره $f(x,y)$ معین می‌شود.

قضیه (آزمون مشتقات جزئی مرتبه دوم): فرض کنید که مشتقهای جزئی مرتبه دوم تابع $f(x,y)$ روی قرص بازی به مرکز (a,b) موجود و برابر با صفر باشد (یعنی $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$) به عبارت دیگر (a,b) نقطه بحرانی تابع f باشد. فرض کنید که

$$D(a,b)=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\left(f_{xy}(a,b)\right)^2$$

الف) اگر $D(a,b)>0$ و $f_{xx}(a,b)>0$ (یا $f_{yy}(a,b)>0$) آنگاه (a,b) یک نقطه مینیمم نسبی تابع $f(x,y)$ است.

ب) اگر $D(a,b)>0$ و $f_{xx}(a,b)<0$ (یا $f_{yy}(a,b)<0$) آنگاه (a,b) یک نقطه ماکسیمم نسبی تابع $f(x,y)$ است.

ج) اگر $D(a,b)<0$ آنگاه (a,b) یک نقطه زینی تابع $f(x,y)$ است.

د) اگر $D(a,b)=0$ آنگاه این آزمون برای نقطه (a,b) کارایی ندارد.

مقدارهای ماکسیمم و می‌نیمم توابع دو متغیره و سه متغیره:

تعریف: تابع دو متغیره $f(x,y)$ در نقطه (a,b) ماکسیمم موضعی (نسبی) دارد هرگاه همسایگی (قرص) باز به مرکز (a,b) مانند D وجود داشته باشد بطوریکه

$$\boxed{\forall (x,y)\in D : f(x,y)\le f(a,b)}$$

و عدد $f(a,b)$ را مقدار ماکسیمم نسبی (موضعی) تابع $f(x,y)$ نامیم.

به همین صورت تابع دو متغیره $f(x,y)$ در نقطه (a,b) می‌نیمم نسبی (موضعی) دارد هرگاه همسایگی (قرص) باز به مرکز (a,b) مانند D وجود داشته باشد بطوریکه

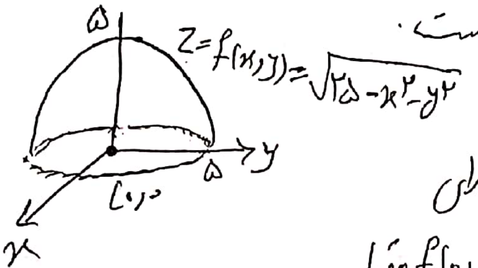
$$\boxed{\forall (x,y)\in D : f(x,y)\ge f(a,b)}$$

و عدد $f(a,b)$ را مقدار می‌نیمم نسبی (موضعی) تابع $f(x,y)$ نامیم.

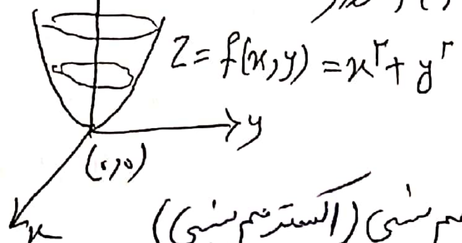
اگر در ~~تعریف~~ قبل D دامنه تابع $f(x,y)$ باشد و $\forall (x,y)\in D : f(x,y)\le f(a,b)$ آنگاه نقطه (a,b) را یک نقطه ماکسیمم مطلق تابع $f(x,y)$ و عدد $f(a,b)$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع می‌نامیم.

و به همین صورت اگر D دامنه تابع $f(x,y)$ باشد و $\forall (x,y)\in D : f(x,y)\ge f(a,b)$ آنگاه نقطه (a,b) را یک نقطه می‌نیمم مطلق تابع $f(x,y)$ و عدد $f(a,b)$ مقدار می‌نیمم مطلق تابع می‌نامیم.

مثال ۱: تابع $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$ در نقطه $(0,0)$ دارای ماکسیمم نسبی $f(0,0)=5$ است و در اینجا $f(0,0)=5$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع $f(x,y)$ هم است.



مثال ۲: تابع $Z=f(x,y)=x^2+y^2$ در نقطه $(0,0)$ دارای می‌نیمم نسبی $f(0,0)=0$ است و در اینجا $f(0,0)$ مقدار می‌نیمم مطلق تابع $f(x,y)$ هم است.



توضیح: اگر تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) ماکسیمم یا می‌نیمم نسبی (اکسترمم نسبی) داشته باشد و مشتق‌های مرتبه اول f یعنی f_x و f_y وجود داشته باشد آنگاه

$$f_x(a,b)=0 \quad و \quad f_y(a,b)=0.$$

به عبارت دیگر

$$\vec{\nabla} f(a,b)=0.$$

تعریف (نقطه بحرانی) نقطه (a,b) را نقطه بحرانی تابع $f(x,y)$ نامیم هرگاه $f_x(a,b)=0$ و $f_y(a,b)=0$ یا یکی از این دو مشتق جزئی وجود نداشته باشد.

مثال ۴: مقدارهای ماکسیمم و می نیمم نسبی و نقطه‌های زینی تابع

$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

را پیدا کنید.

حل،

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4y = 0 \longrightarrow y = x^3 \\ f_y = 4y^3 - 4x = 0 \longrightarrow x = y^3 \end{cases} \Longrightarrow x = (x^3)^3 = x^9 \Rightarrow x(x^8 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^8 - 1 = (x^4-1)(x^4+1) = 0 \end{cases}$$

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \,,\; x = -1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$x = 1 \Rightarrow y^3 = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1,1)$$

$$x = -1 \Rightarrow y^3 = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (-1,-1)$$

نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ و $(-1,-1)$ نقاط بحرانی تابع $f(x,y)$ است

$$\boxed{\begin{cases} f_{xx} = 12x^2 \\ f_{yy} = 12y^2 \end{cases} \,,\; f_{xy} = f_{yx} = -4}$$

بررسی نقطه $(0,0)$

$$D(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

پس $(0,0)$ یک نقطه زینی تابع $f(x,y)$ است.

بررسی نقطه $(1,1)$:

$$D(1,1) = \begin{vmatrix} f_{xx}(1,1) & f_{xy}(1,1) \\ f_{yx}(1,1) & f_{yy}(1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 = 128 > 0$$

چون $\Delta(1,1) > 0$ و $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ پس نقطه $(1,1)$ یک نقطه می نیمم نسبی تابع $f(x,y)$ است

بررسی نقطه $(-1,-1)$:

$$D(-1,-1) = \begin{vmatrix} f_{xx}(-1,-1) & f_{xy}(-1,-1) \\ f_{yx}(-1,-1) & f_{yy}(-1,-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +12 & -4 \\ -4 & +12 \end{vmatrix} = 144 - 16 = 128 > 0$$

چون $\Delta(-1,-1) > 0$ و $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$ پس نقطه $(-1,-1)$ هم یک نقطه می نیمم نسبی تابع $f(x,y)$ است

بنابراین مقدار می نیمم نسبی تابع $f(1,1) = f(-1,-1) = -1$ است

مثال ۵: کوتاه‌ترین فاصله میان نقطه $(1,0,-2)$ تا صفحه $x + 2y + z = 4$ را پیدا کنید.

حل، روش اول طبق فرمول فاصله یک نقطه تا صفحه:

$$d = \frac{|1\times1 + 2\times0 + 1\times(-2) - 4|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|-5|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

روش دوم، فاصله هر نقطه مانند (x,y,z) تا نقطه $(1,0,-2)$ برابر است با:

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2}$$

اما اگر (x,y,z) روی صفحه $x+2y+z=4$ قرار داشته باشد آن وقت $Z = 4 \;\; 2y \;\; x$ و در نتیجه

$$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(6-x-2y)^2}$$

برای می‌نیمم کردن d از می‌نیمم کردن d^2 کمک می‌گیریم یعنی d^2 را می‌نیمم می‌کنیم $d^2=f(x,y)=(x-1)^2+y^2+(6-x-2y)^2$

$$\begin{cases} f_x = 2(x-1)-2(6-x-2y)=4x+4y-14=0 \\ f_y = 2y-4(6-x-2y)=4x+10y-24=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+4y=14 \\ 4x+10y=24 \end{cases} \xrightarrow[\text{کردن}]{\text{تفریق}} 6y=10 \Rightarrow y=\frac{5}{3}$$

با جایگذاری در یکی از معادلات $x=\frac{11}{6}$ بدست می‌آید

$$f_{xx}=4,\quad f_{xy}=4 \Rightarrow D\left(\frac{11}{6},\frac{5}{3}\right)=\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=40-16=24>0$$

$$f_{yy}=10$$

چون $D(\frac{11}{6},\frac{5}{3})>0$ و $f_{xx}(\frac{11}{6},\frac{5}{3})=4>0$ پس نقطه $(\frac{11}{6},\frac{5}{3})$ نقطه می‌نیمم نسبی تابع f است و مقدار می‌نیمم $d=\sqrt{f(\frac{11}{6},\frac{5}{3})}=\sqrt{(\frac{5}{6})^2+(\frac{5}{3})^2+(\frac{5}{6})^2}=\frac{5\sqrt{6}}{6}=\frac{5}{\sqrt{6}}$ است

مثال ۶) مقادیر اکسترمم نسبی تابع $f(x,y)=8x-4y-2x^2-2y^2+1$ را بیابید.

حل:

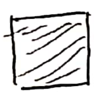
$$\begin{cases} f_x=8-4x=0 \Rightarrow x=2 \\ f_y=-4-4y=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(2,-1)$$ نقطه بحرانی

$$\begin{cases} f_{xx}=-4 \\ f_{yy}=-4 \end{cases} \qquad D(2,-1)=\begin{vmatrix} f_{xx}(2,-1) & f_{xy}(2,-1) \\ f_{yx}(2,-1) & f_{yy}(2,-1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=16>0$$

$$f_{xy}=f_{yx}=0$$

چون $D(2,-1)=16>0$ و $f_{xx}(2,-1)=-4<0$ پس $(2,-1)$ یک نقطه ماکسیمم نسبی تابع f است و $f(2,-1)=8\times2-4\times(-1)-2(2)^2-2(-1)^2+1=11$ مقدار ماکسیمم نسبی تابع است.

مقدارهای ماکسیمم و می‌نیمم مطلق

تعریف: یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}^2$ (یعنی در صفحه) مجموعه‌ای است که همه نقطه‌های مرزی‌اش را دربردارد؛ مثل درون و مرز دایره  یا درون و مرزهای مربع 

نقطه مرزی: نقطه مرزی ناحیه D نقطه‌ای مانند (a,b) است که هر قرص باز به مرکز (a,b) نقطه‌هایی از D و نقطه‌هایی که از D نیستند دربر داشته باشد. برای نمونه اگر $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le1\}$، D درون و روی مرز دایره است یک مجموعه بسته است.

مجموعه‌ای که نقاط مرزی‌اش حذف شده باشد را مجموعه باز نامیم.

مجموعه کراندار: مجموعه کراندار در $\mathbb{R}^2$ مجموعه‌ای است که درون یک قرص قرار می‌گیرد

قضیه اکسترمم مطلق تابع‌های دو متغیره: اگر تابع $f(x,y)$ روی مجموعه بسته و کراندار D در $\mathbb{R}^2$ پیوسته باشد آنگاه تابع $f(x,y)$ یک مقدار ماکسیمم مطلق $Max f = f(a,b)$ و یک مقدار مینیمم مطلق $min f = f(c,d)$ را روی D اختیار می‌کند که در آن $(a,b),(c,d) \in D$.

دستورالعمل پیدا کردن مقدارهای ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع پیوسته f روی مجموعه بسته و کراندار D

۱- مقادیر تابع $f(x,y)$ در نقطه‌های بحرانی در D را می‌یابیم.

۲- مقدارهای اکسترمم f روی مرز D را پیدا می‌کنیم. (با جایگذاری، روش کاهش متغیر، روش ضرایب لاگرانژ)

۳- بزرگترین مقدارها در مرحله (۱) و (۲) مقدار ماکسیمم مطلق و کمترین مقدارها در مرحله (۱) و (۲) مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x,y)$ است.

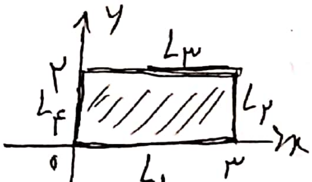
مثال ۷: مقدارهای ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ روی مستطیل $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 3 ,\ 0 \leq y \leq 2\}$ را پیدا کنید.

حل: تابع f روی D که یک ناحیه کراندار و بسته است پیوسته است و طبق قضیه اکسترمم مطلق، هم مقدار ماکسیمم مطلق و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \\ f_y = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (x,y) = (1,1)$$

مرحله ۱ نقطه بحرانی تابع

$$\boxed{f(1,1) = 1 - 2 + 2 = 1}$$



مرحله ۲ مقدارهای تابع f روی مرزهای D را می‌یابیم.

روی مرز L_1: یعنی $y=0$ و $0 \leq x \leq 3$: $f(x,0) = x^2 = g(x)$

$min g = f(0,0) = 0$ و $f(3,0) = 9 = max g$ چون تابع g صعودی است.

روی مرز L_2 یعنی $x=3$ و $0 \leq y \leq 2$: $f(3,y) = 9 - 6y + 2y = 9 - 4y = t(y)$

تابع t نزولی است پس $max t = f(3,0) = 9$ و $f(3,2) = 9 - 8 = 1 = min t$

روی مرز L_3 یعنی $y=2$ و $0 \leq x \leq 3$: $f(x,2) = x^2 - 4x + 4 = h(x) = (x-2)^2$

$f(3,2) = 1$ و $min h = f(2,2) = 0$ ، $f(0,2) = 4 = max h$

روی مرز L_4 یعنی $x=0$ و $0 \leq y \leq 2$: $k(y) = f(0,y) = 2y$ تابع k صعودی است

$min k = f(0,0) = 0$ ، $f(0,2) = 4 = max k$

مرحله ۳ ماکسیمم مطلق $f(3,0) = 9$ و مینیمم مطلق $f(2,2) = f(0,0) = 0$

اکسترمم مشروط :

اگر بخواهیم تابع $f(x,y,z)$ را تحت شرط $g(x,y,z)=c$ را اکسترمم کنیم با این نوع اکسترمم، اکسترمم مشروط می نامیم.
یکی از روشهای یافتن اکسترمم تابع $f(x,y,z)$ تحت شرط $g(x,y,z)=c$ روش ضرایب لاگرانژ است.

روش ضرایب لاگرانژ: برای پیدا کردن مقدارهای ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)$ تحت شرط $g(x,y,z)=c$ (با فرض این که این مقدارهای اکسترمم وجود دارند و روی رویه $g(x,y,z)=c$ ، $\vec{\nabla} g \neq 0$ است)

الف) همه مقادیر های x و y و z و λ را طوری پیدا می کنیم که $\vec{\nabla} f(x,y,z)=\lambda \vec{\nabla} g(x,y,z)$ و $g(x,y,z)=c$

ب) مقدار تابع $f(x,y,z)$ را در همه نقطه ها مانند (x,y,z) که در مرحله الف) بدست آمده اند را پیدا می کنیم.
در بین این مقادیر، بزرگترین این مقدارها مقدار ماکسیمم تابع f و کمترین این مقدارها، می نیمم تابع f است

توجه (۱) از روش ضرایب لاگرانژ برای اکسترمم تابع دو متغیره $f(x,y)$ تحت شرط $g(x,y)=c$ می توان استفاده کرد.

توجه (۲) : اگر در قسمت الف) روش ضرایب لاگرانژ فقط یک نقطه (a,b,c) بدست آید برای تعیین اینکه این نقطه، نقطه ماکسیمم یا می نیمم است از یک نقطه کمکی مانند (a_1,b_1,c_1) که در شرط $g(x,y,z)=c$ صدق می کند کمک می گیریم و مقادیر $f(a,b,c)$ را با $f(a_1,b_1,c_1)$ مقایسه می کنیم.

اگر $f(a_1,b_1,c_1) \leq f(a,b,c)$ آنگاه $f(a,b,c)$ مقدار ماکسیمم تابع f است

اگر $f(a_1,b_1,c_1) \geq f(a,b,c)$ آنگاه $f(a,b,c)$ مقدار می نیمم تابع f است.

چون نقطه (a_1,b_1,c_1) دلخواه است

مثال ۸: جعبه ای مستطیلی و سرباز را باید با $12\ m^2$ مقوا بسازیم. ماکسیمم حجم چنین جعبه ای را پیدا کنید.

حل: حجم جعبه $=V=xyz$ ، مساحت جانبی جعبه سرباز $= 2xz+2yz+xy=12$ $= g(x,y,z)$

طبق ضرایب لاگرانژ $\vec{\nabla} V=\lambda \vec{\nabla} g \Rightarrow (yz)\vec{i}+(xz)\vec{j}+(xy)\vec{k}=\lambda\left[(2z+y)\vec{i}+(2z+x)\vec{j}+(2x+2y)\vec{k}\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} yz=(2z+y)\lambda & (1)\\ xz=(2z+x)\lambda & (2)\\ xy=(2x+2y)\lambda & (3)\\ 2xz+2yz+xy=12 & (4)\end{cases} \xrightarrow[\text{و } z \text{ در معادله (۳)} \quad y \text{ در معادله (۲)}]{\text{با ضرب } x \text{ در معادله (۱)}} \begin{cases} xyz=(2xz+xy)\lambda & (5)\\ xyz=(2yz+yx)\lambda & (6)\\ xyz=(2xz+2yz)\lambda & (7)\end{cases}$$

$\lambda \neq 0$ زیرا اگر $\lambda=0$ آنگاه $xy=xz=yz=0$ که با معادله (۴) متناقض است.

$$(5),(6) \Rightarrow 2xz+xy=2yz+yx \Rightarrow xz=yz \xrightarrow{z\neq 0} x=y$$
$$(5),(7) \Rightarrow 2xz+xy=2xz+2yz \Longrightarrow xy=2yz \xrightarrow{y\neq 0} x=2z$$
$$\Rightarrow x=y=2z$$

با قرار دادن در شرط یا معادله (۴) داریم $12z^2=12$ پس $z^2=1$ یعنی $z=1$ و $z=-1$ ($z=-1$ غیر قابل قبول)
پس $z=1$ و بنابراین $x=y=2$ پس نقطه $(2,2,1)$ بدست می آید.

طبق توجه (۲) از یک نقطه کمکی که دلخواه و در شرط $2xz+2yz+xy=12$ صدق می‌کند کمک می‌گیریم. مانند $(1,1,\frac{5}{3})$

چون $V(1,1,\frac{5}{3})=\frac{5}{3} < V(2,2,1)=4$

پس نقطه $(x,y,z)=(2,2,1)$ یک نقطه ماکسیمم تابع V است.

مثال ۹: مقدارهای اکسترمم تابع $f(x,y)=x^2+2y^2$ روی قرص $x^2+y^2\leq 1$ را پیدا کنید.

حل: چون ناحیه بسته است باید طبق قضیه اکسترمم مطلق روی ناحیه بسته و کراندار باید هم داخل ناحیه و هم روی مرز ناحیه، اکسترمم تابع را پیدا کنیم.

داخل ناحیه:

$$\begin{cases} f_x=2x=0 \Rightarrow x=0 \\ f_y=4y=0 \Rightarrow y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(0,0)$$ قابل قبول

داخل ناحیه قرار دارد.

روی مرز ناحیه: یعنی اکسترمم $f(x,y)=x^2+2y^2$ تحت شرط $x^2+y^2=1$ از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم

$g(x,y)=x^2+y^2=1$

$$\nabla f=\lambda\nabla g \Rightarrow 2x\vec{i}+4y\vec{j}=\lambda(2x\vec{i}+2y\vec{j})$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 2x=2\lambda x & \begin{cases} x=0 \xrightarrow{\text{شرط}} y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow (0,1),(0,-1) \\ \lambda=1 \end{cases} \\ 4y=2\lambda y & \begin{cases} y=0 \xrightarrow{\text{شرط}} x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow (1,0),(-1,0) \\ \lambda=2 \end{cases} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda=1 \\ 4y=2\lambda y \end{cases} \Rightarrow y=0 \Rightarrow$$ بررسی شد

$$\begin{cases} \lambda=2 \\ 2x=2\lambda x \end{cases} \Rightarrow x=0$$ بررسی شد.

پس در بین مقادیر $f(0,0)=0$ و $f(1,0)=1$ و $f(-1,0)=1$ و $f(0,1)=2$ و $f(0,-1)=2$

می‌نیمم تابع $f(0,0)=0$ و $f(0,-1)=f(0,1)=2$ ماکسیمم تابع است.

مثال ۱۰: مطلوب است نقاطی از رویه $x^2-z^2=1$ که به مبداء نزدیکترین نقاط باشند.

حل: فاصله هر نقطه تا مبداء مختصات $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ است که باید تحت شرط $x^2-z^2=1$

می‌نیمم شود. برای راحتی $f(x,y,z)=d^2=x^2+y^2+z^2$ را تحت شرط $x^2-z^2=1$ پیدا می‌کنیم.

روش ضرایب لاگرانژ $g(x,y,z)=x^2-z^2=1$

$$\nabla f=\lambda\nabla g \Rightarrow 2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}=\lambda(2x\vec{i}-2z\vec{k})$$

$$\begin{cases} 2x=2\lambda x & \begin{cases} x=0 \xrightarrow{\text{شرط}} -z^2=1 \text{ غ ق ق} \\ \lambda=1 \end{cases} \\ 2y=0 \longrightarrow y=0 \\ 2z=-2\lambda z & \begin{cases} z=0 \xrightarrow{\text{شرط}} x^2=1 \Rightarrow x=1,\ x=-1 \\ \lambda=-1 \Rightarrow 2x=-2x \Rightarrow x=0 \text{ غ ق ق} \end{cases} \\ x^2-z^2=1 \end{cases} \Rightarrow (1,0,0),(-1,0,0)$$

از $\lambda=1$ و $\lambda=-1$:

$$\begin{cases} \lambda=1 \Rightarrow 2z=-2z \Rightarrow z=0 \Rightarrow \\ 2z=-2\lambda z \end{cases}$$ بررسی شد

حال چون $f(-1,0,0)=f(1,0,0)=1$ باید از نقطه دیگری دلخواه که در شرط $x^2-z^2=1$ صدق می‌کند کمک بگیریم.
نقطه دیگری دلخواه می‌توان $x=\sqrt{2}$ و $z=1$ و $y=1$ را انتخاب کرد (در شرط‌ها صدق می‌کند)

$$f(\sqrt{2},1,1)=2+1+1=4 \quad , \quad f(1,0,0)=f(-1,0,0)=1$$

پس در نقطه $(1,0,0)$ و $(-1,0,0)$ نقاط مینیمم تابع است.

مثال ۱۱: اکسترمم مطلق تابع $f(x,y)=x^2-y^2$ روی ناحیه بسته $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$ را بدست آورید.

حل: چون ناحیه D بسته است پس در مرحله اول نقاط بحرانی تابع $f(x,y)$ درون ناحیه D بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_x=2x=0 \rightarrow x=0 \\ f_y=-2y=0 \rightarrow y=0 \end{cases} \Longrightarrow (x,y)=(0,0)$$

این نقطه داخل ناحیه قرار دارد.

مرحله دوم روی مرز ناحیه D یعنی $x^2+y^2=4$ از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم $g(x,y)=x^2+y^2=4$

$$\vec{\nabla} f=\lambda \vec{\nabla} g \Longrightarrow 2x\vec{i}-2y\vec{j}=\lambda(2x\vec{i}+2y\vec{j})$$

$$\begin{cases} 2x=2\lambda x \\ -2y=2\lambda y \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$2x=2\lambda x \Rightarrow x=0$ یا $\lambda=1$؛ $x=0 \Longrightarrow$ (در شرط) $y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2 \Longrightarrow (0,2)$ و $(0,-2)$

$-2y=2\lambda y \Rightarrow \lambda=-1$ یا $y=0$؛ $y=0 \Longrightarrow$ (در شرط) $x^2=4 \Longrightarrow x=\pm 2 \Longrightarrow (2,0)$ و $(-2,0)$

$$\begin{cases} \lambda=1 \\ -2y=2\lambda y \end{cases} \Longrightarrow -2y=2y \rightarrow y=0 \Longrightarrow$$ دربالا بررسی شد

$$\begin{cases} \lambda=-1 \\ 2x=2\lambda x \end{cases} \Longrightarrow 2x=-2x \Longrightarrow x=0 \Longrightarrow$$ دربالا بررسی شد

بنابراین داریم $f(0,0)=0$ و $f(2,0)=f(-2,0)=4$ و $f(0,2)=f(0,-2)=-4$ بدیهی است که مقدار مینیمم مطلق -4 و مقدار ماکزیمم مطلق 4 است.

اکسترمم مشروط تابع $f(x,y,z)$ تحت دو شرط $g(x,y,z)=c$ و $h(x,y,z)=d$.
به کمک روش ضرایب لاگرانژ فرض کنید که $\vec{\nabla} g\neq 0$ و $\vec{\nabla} h\neq 0$ و تابع $f(x,y,z)$ تحت این دو شرط دارای نقاط اکسترمم است در این صورت عددهای λ و μ (به عنوان ضرایب لاگرانژ) وجود دارند که

$$\vec{\nabla} f(x,y,z)=\lambda \vec{\nabla} g(x,y,z)+\mu \vec{\nabla} h(x,y,z) \quad (1)$$

هر برای پیدا کردن مقدارهای اکسترمم معادله برداری (1) را حل می‌کنیم و این معادله با حل دستگاه ۵ معادله ۵ مجهول تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x + \mu h_x \\ f_y = \lambda g_y + \mu h_y \\ f_z = \lambda g_z + \mu h_z \end{cases}$$

$g(x,y,z)=c$ و $h(x,y,z)=c$ ها

از حل این دستگاه نقاط A و B و C و ... را می‌یابیم و در بین $f(A)$ و $f(B)$ و $f(C)$ و ... مقادیر اکسترمم را می‌یابیم.

توجه: اگر دستگاه فقط یک جواب A داشته باشد از یک نقطه کمکی B که در شرطهای $g(x,y,z)=c$ و $h(x,y,z)=d$ صدق می‌کند کمک می‌گیریم. اگر $f(A)<f(B)$ آنگاه $f(A)$ می‌نیمم مطلق تابع f است و اگر $f(A)>f(B)$ آنگاه $f(A)$ ماکسیمم مطلق تابع f است.

مثال ۱۲: مقدار ماکسیمم مطلق تابع $f(x,y,z)=x+2y+3z$ روی منحنی محل برخورد صفحه‌های $x-y+z=1$ و استوانه $x^2+y^2=1$ را پیدا کنید.

حل: فرض کنید $g(x,y,z)=x-y+z=1$ و $h(x,y,z)=x^2+y^2=1$ بنابراین معادله برداری $\nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h$ را حل می‌کنیم بین

$$\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}=\lambda(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+\mu(2x\vec{i}+2y\vec{j}) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} (1)\ 1=\lambda+2x\mu \\ (2)\ 2=-\lambda+2y\mu \\ (3)\ 3=\lambda \end{cases}$$

$(3),(1) \Rightarrow 1=3+2x\mu \Rightarrow 2x\mu=-2 \Rightarrow x=-\frac{1}{\mu}$ (4)

$(3),(2) \Rightarrow 2=-3+2y\mu \Rightarrow 2y\mu=5 \rightarrow y=\frac{5}{2\mu}$ (5)

$x-y+z=1$ و $x^2+y^2=1$

$$\begin{cases} (4),(5) \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{\mu^2}+\frac{25}{4\mu^2}=1 \Rightarrow \frac{4+25}{4\mu^2}=1 \Rightarrow 4\mu^2=29 \rightarrow \mu^2=\frac{29}{4} \rightarrow \mu=\frac{\sqrt{29}}{2},\ \mu=-\frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu=\frac{\sqrt{29}}{2} \Rightarrow x=-\frac{2}{\sqrt{29}},\ y=\frac{5}{\sqrt{29}} \xrightarrow{x-y+z=1} z=1+\frac{7}{\sqrt{29}} \\ \mu=-\frac{\sqrt{29}}{2} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{29}},\ y=-\frac{5}{\sqrt{29}} \xrightarrow{x-y+z=1} z=1-\frac{7}{\sqrt{29}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\left(-\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}},1+\frac{7}{\sqrt{29}}\right) \Rightarrow f(A)=\boxed{3+\sqrt{29}\ \text{مقدار ماکسیمم مطلق}} \\ B\left(\frac{2}{\sqrt{29}},-\frac{5}{\sqrt{29}},1-\frac{7}{\sqrt{29}}\right) \Rightarrow f(B)=3-\sqrt{29} \end{cases}$$

مثال ۱۳: مقدار ماکسیمم مطلق تابع $f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$ تحت دو شرط $2x-y=0$ و $y+z=0$ را بیابید.

حل: از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم با فرض $g(x,y,z)=2x-y=0$ و $h(x,y,z)=y+z=0$

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \Rightarrow 2x\vec{i} + 2\vec{j} - 2z\vec{k} = \lambda(2\vec{i} - \vec{j}) + \mu(\vec{j} + \vec{k})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda & (1) \longrightarrow x = \lambda \\ 2 = -\lambda + \mu & (2) \longrightarrow 2 = -\lambda + \mu \\ -2z = \mu & (3) \longrightarrow \mu = -2z \\ 2x = y \ (5) \text{ و } y = -z \ (6) \end{cases} \Rightarrow \boxed{2 = -x - 2z \quad (4)}$$

$$(5),(6) \Longrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow 2x = -z \quad (7)$$

$$(7),(4) \Rightarrow \begin{cases} 2x = -z \\ 2 = -x - 2z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 2 = -x + 4x \\ x = \frac{2}{3} \end{array}}$$

$$\Rightarrow y = 2x = \frac{4}{3}, \quad z = -y = -\frac{4}{3} \Rightarrow A\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$f(A) = \frac{4}{9} + \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \frac{4}{3}$$

نقطه کمکی $B\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right)$ که در هر دو شرط صدق می‌کند به دلخواه می‌یابیم.

چون $f(B) = \frac{5}{4} < f(A) = \frac{4}{3}$ پس A یک نقطه ماکسیمم مطلق تابع f است و مقدار ماکسیمم مطلق $f(A) = \frac{4}{3}$ است.

تمرین:

۱- اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x,y) = xy(3 - x - y)$ را بیابید.

۲- اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ را بیابید.

۳- نزدیکترین نقاط از رویه $y^2 - xz = 4$ تا مبدأ مختصات را بدست آورید و این فاصله را بیابید.

۴- مطلوب است بزرگترین و کوچکترین مقادیری که تابع $f(x,y) = xy$ روی بیضی $x^2 + 4y^2 = 8$ اختیار می‌کند.

۵- در تمرین ۴ اکسترمم مطلق تابع $f(x,y) = xy$ روی ناحیه $D = \{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 \le 8\}$ را بیابید.

۶- اکسترمم‌های تابع $f(x,y) = x^2 y$ را بر بیضی $2x^2 + y^2 = 3$ را بیابید.

۷- اکسترمم‌های تابع $f(x,y,z) = 2x - y + 3z$ تحت دو شرط $x^2 + y^2 = 5$ و $y + z = 4$ را بیابید.

۸- اکسترمم‌های تابع $f(x,y,z) = xyz$ تحت دو شرط $x + y + z = 5$ و $xy + yz + zx = 8$ را بیابید.

۹- اکسترمم‌های تابع $f(x,y,z) = xz + yz$ تحت دو شرط $x^2 + z^2 = 2$ و $yz = 2$ را بیابید.