

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

مقدمه ای بر سیستم های اسپین ۱/۲

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

آنچه گذشت: اندازه گیری در مکانیک کوانتومی

● اصل موضوعه: در مکانیک کوانتومی، خروجی اندازه گیری یک عملگر مانند A فقط می تواند یکی از ویژه مقادیر آن عملگر (یعنی یکی از مقادیر $a_1, a_2, a_3, \dots$) باشد.

● اصل موضوعه: فرض کنید که سیستم در حالت دلخواه و نرمال $|\psi\rangle$ باشد. وقتی بر روی مشاهده پذیر A با ویژه کت های $|a_i\rangle$ و ویژه مقادیر a_i اندازه گیری انجام می دهیم، احتمال یافتن سیستم در حالت $|a_i\rangle$ عبارت است از

$$P(a_i) = |\langle a_i | \psi \rangle|^2$$

● توجه: پس از اندازه گیری مشاهده پذیر A حالت سیستم به فقط یکی از ویژه کت های این مشاهده پذیر، مثلاً $|a_j\rangle$ ، رمبش می کند. همچنین حالت سیستم تغییر نخواهد کرد مگر اینکه تحول زمانی رخ دهد و یا اندازه گیری دیگری بر روی سیستم اعمال شود.

● ولی اگر حالت اولیه سیستم نرمال نباشد:

$$P(a_j) = \frac{1}{N} |\langle a_j | \psi \rangle|^2 = \frac{|\langle a_j | \psi \rangle|^2}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

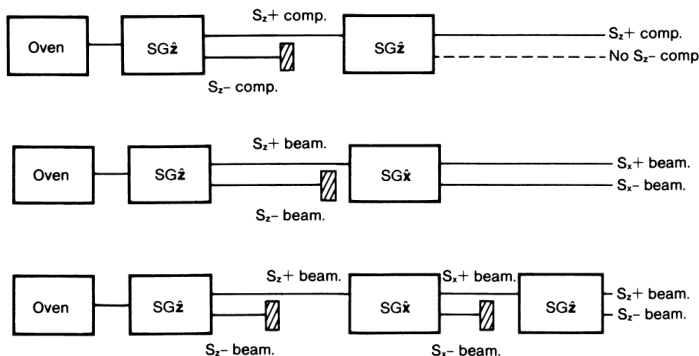
● اگر ویژه مقدار a_j تبهگن باشد و این تبهگنی نیز g_m گانه باشد، آنگاه احتمال یافتن ویژه مقدار a_j برابر است با مجموع احتمال رخداد حالت های تبهگن:

$$P(a_j) = \sum_{n=1}^{g_m} |\langle a_j^n | \psi \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{g_m} |c_j^n|^2$$

● برای متغیرهای پیوسته، ضریب $|c(\alpha)|^2 = \frac{dP(\alpha)}{d\alpha}$ چگالی احتمال رخداد ویژه مقدار α در بازه $(\alpha, \alpha + d\alpha)$ را به دست می دهد.

اهداف این جلسه

در این جلسه می خواهیم سیستم های با اسپین ۱/۲ را دوباره بررسی کنیم. در واقع می خواهیم نشان دهیم که وقتی نتایج آزمایش اشترن-گرلاخ را با اصول موضوعه بیان شده ترکیب می کنیم، می توانیم کت های حالت $|S_x; \pm\rangle$ و $|S_y; \pm\rangle$ و همچنین عملگرهای $S_{x,y}$ را به دست آوریم. از این نتایج در درس های آینده به وفور استفاده خواهیم کرد.



پیدا کردن عملگر های S_x و S_y

در ابتدا توجه می کنیم که وقتی باریکه $|S_x; +\rangle$ با یک دستگاه اشترن-گرلاخ SG_z روبرو می شود، باریکه مورد نظر به دو بخش با شدت برابر تقسیم می شود. این مشاهده نشان می دهد که احتمال وجود هر کدام از حالت های $|S_z; \pm\rangle$ در حالت $|S_x; +\rangle$ برابر $1/2$ است؛ در نتیجه برای دامنه احتمال داریم:

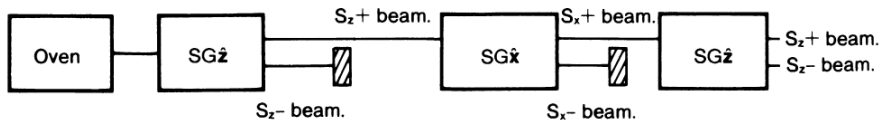
$$|\langle + | S_x; + \rangle| = |\langle - | S_x; + \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

پس حالت $|S_x; +\rangle$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi_1}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi_2}|-\rangle = e^{i\phi_1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi_2-i\phi_1}|-\rangle \right)$$

البته در جلسه قبل یاد گرفتیم که فاز کلی سیستم اهمیتی ندارد. پس کلی ترین حالت $|S_x; +\rangle$ را می توان به صورت زیر نوشت ($\delta_1 = \phi_2 - \phi_1$):

$$|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle$$



پیدا کردن عملگر های S_x و S_y

- تمرین: حال توجه می کنیم که حالت $|S_x; +\rangle$ باید بر حالت $|S_x; -\rangle$ عمود باشد، چون این ها دو باریکه بدون همپوشانی را تشکیل می دهند. نشان دهید که با استفاده از شرط تعامد می توان حالت $|S_x; -\rangle$ را به صورت کلی زیر یافت:

$$|S_x; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle \xrightarrow{\text{prove}} \langle S_x; - | S_x; + \rangle = 0$$

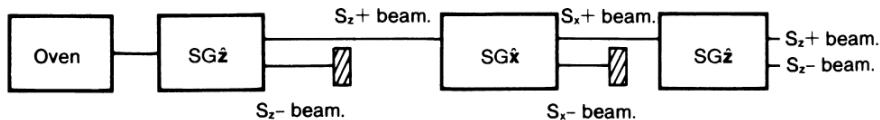
- تمرین: حال که ویژه حالت های عملگر S_x ، یعنی $|S_x; +\rangle$ و $|S_x; -\rangle$ ، را یافته ایم، می توانیم عملگر S_x را نیز با استفاده از رابطه

$$A = \sum_{a'} a' |a'\rangle \langle a'| = \sum_{a'} a' \Lambda_{a'}$$

بسازیم. نشان دهید که نتیجه برابر است با

$$S_x = \frac{\hbar}{2} |S_x; +\rangle \langle S_x; +| - \frac{\hbar}{2} |S_x; -\rangle \langle S_x; -| = \frac{\hbar}{2} (e^{-i\delta_1}|+\rangle \langle -| + e^{i\delta_1}|-\rangle \langle +|)$$

همچنین نشان دهید که این عملگر هرمیتی است $S_x^\dagger = S_x$



پیدا کردن عملگر های S_x و S_y

با یک روند استدلال مشابه می توان نشان داد که

$$|S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_2}|-\rangle$$

و همچنین

$$S_y = \frac{\hbar}{2} (e^{-i\delta_2}|+\rangle\langle-| + e^{i\delta_2}|-\rangle\langle+|)$$

حال برای اتمام کار باید فازهای δ_1 و δ_2 را تعیین کنیم. با توجه به اینکه احتمال یافتن هر کدام از حالت های $|S_x; \pm\rangle$ در حالت های $|S_y; \pm\rangle$ برابر ۱/۲ است، نتیجه می گیریم که

$$|\langle S_y; \pm | S_x; + \rangle| = |\langle S_y; \pm | S_x; - \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2} |1 \pm e^{i(\delta_1 - \delta_2)}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

می توان نتیجه گرفت که

$$\delta_1 - \delta_2 = \pm\pi/2$$

که از آن نتیجه می شود:

تمرین: دو نتیجه اخیر را اثبات کنید.

از اینجا می توان استدلال کرد که عناصر ماتریس S_x و S_y نمی توانند همزمان حقیقی باشند. یعنی باید حداقل یکی از این دو دارای مولفه های مختلط باشد. مثلاً اگر مولفه های ماتریس S_x حقیقی اند، مولفه های ماتریس S_y باید موهومی محض باشند، و برعکس. بنابراین، به ضرورت تعریف فضای هیلبرت در مکانیک کوانتومی پی می بریم.

پیدا کردن عملگر های S_x و S_y

• بنا به یک قرارداد مشهور در کوانتوم ما عناصر S_x را حقیقی در نظر می گیریم و یا به عبارت دیگر فاز δ_1 را برابر با صفر در نظر می گیریم. در نتیجه داریم $\delta_2 = \pm \pi/2$. علامت های مثبت و منفی به ترتیب مربوط به دستگاه های مختصات راستگرد و چپگرد هستند. با توجه به اینکه ما در آینده جفت شدگی اسپین-مدار را در نظر خواهیم گرفت، و اندازه حرکت مداری در سیستم مختصات راستگرد تعریف می شود باید به خاطر هماهنگی در اینجا هم دستگاه راستگرد را انتخاب کنیم. پس $\delta_2 = \pi/2$. در نتیجه می توان نوشت:

$$|S_x; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$|S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

توجه کنید که $\exp(i\pi/2) = i = -\exp(-i\pi/2)$. همچنین داریم

$$S_x = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} (-i|+\rangle\langle-| + i|-\rangle\langle+|)$$

البته همین نتایج را پیشتر با استدلالی در مورد نور قطبیده نیز استنتاج کرده ایم. هرچند، روش حاضر استدلال دقیق ریاضیاتی برای به دست آوردن این حالت ها و عملگرها را معرفی می کند.

روابط بین عملگرهای اسپینی

تمرین: با استفاده از عملگرهای بالا نشان دهید که $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$

تمرین: نمایش ماتریسی حالت ها و عملگرهای موجود در اسلاید قبل را بنویسید.

یادآوری: روابط جابجایی و پادجابجایی دو عملگر به صورت زیر تعریف می شوند:

$$[A, B] = AB - BA$$

$$\{A, B\} = AB + BA$$

می توان نشان داد که عملگرهای اسپینی یک رابطه جابجایی به صورت زیر با هم دارند:

$$[S_i, S_j] = i \epsilon_{ijk} \hbar S_k$$

که در آن ϵ_{ijk} نماد لوی-چیویتا است (اسلاید بعد). همچنین به رابطه پادجابجایی زیر دقت کنید:

$$\{S_i, S_j\} = \frac{1}{4} \hbar^2 \delta_{ij}$$

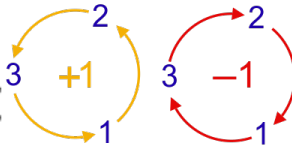
درباره اهمیت روابط جابجایی در فصل سوم (مبحث اندازه حرکت زاویه ای و اسپینی) بیشتر بحث خواهیم کرد. چنین رابطه ای برای عملگر اندازه حرکت زاویه ای نیز برقرار است. ولی رابطه پادجابجایی بالا مختص ذرات اسپین ۱/۲ است.

از رابطه پادجابجایی می توان نشان داد که برای عملگر $\vec{S}^2 = \vec{S} \cdot \vec{S} = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ روابط زیر برقرار است:

$$\vec{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \quad [\vec{S}^2, S_i] = 0$$

نماد لوی-چیویتا ϵ_{ijk}

- نماد لوی-چیویتا ϵ_{ijk} در بسیاری از موضوعات ریاضیاتی و فیزیکی ظاهر می شود. این نماد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{if } (i, j, k) \text{ is } (1, 2, 3), (2, 3, 1), \text{ or } (3, 1, 2), \\ -1 & \text{if } (i, j, k) \text{ is } (3, 2, 1), (1, 3, 2), \text{ or } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{if } i = j, \text{ or } j = k, \text{ or } k = i \end{cases}$$


- بین نماد لوی-چیویتا و دلتای کرونکر رابطه زیر وجود دارد.

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

$$= \delta_{il} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) - \delta_{im} (\delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{kl}) + \delta_{in} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}).$$

- دو رابطه مهم دیگر:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i a^j b^k$$

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

مثال

- تمرین: فرض کنید که حالت اولیه سیستم به صورت $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|-\rangle$ می باشد. مقدار چشمداشتی $\langle S_x \rangle$ را به دو روش الف) ماتریسی و ب) براکت به دست آورید.

مثال

تمرین: فرض کنید که حالت اولیه سیستم به صورت $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|-\rangle$ می باشد. مقدار چشمداشتی $\langle S_x \rangle$ را به دو روش الف) ماتریسی و ب) براکت به دست آورید.

پاسخ الف: کت و برای حالت سیستم را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \sqrt{1/3} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \quad \langle\psi| = \begin{bmatrix} \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \end{bmatrix}$$

پس مقدار چشمداشتی مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \langle \psi | \hat{S}_x | \psi \rangle \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \left(\frac{\hbar}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1/3} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \right) \begin{bmatrix} \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1/3} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \right) [\sqrt{1/3}\sqrt{2/3}] \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} \\ \sqrt{1/3} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) = \left(\frac{\hbar}{2} \right) \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \hbar \end{aligned}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید اصول ذرات اسپین ۱/۲ و مهم ترین ویژگی های آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱. روش توصیف شده برای پیدا کردن شکل کلی حالت های $|S_x; \pm\rangle$ و $|S_y; \pm\rangle$ را توضیح دهید.

۲. روش توصیف شده برای پیدا کردن شکل کلی عملگرهای S_x و S_y را توضیح دهید.

۳. منظور از رابطه جابجایی بین دو عملگر چیست؟

۴. منظور از رابطه پادجابجایی بین دو عملگر چیست؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

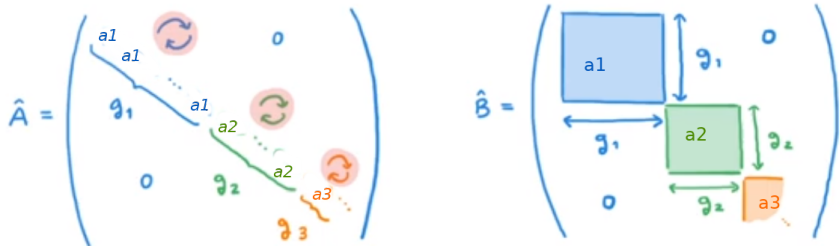


تمرین ها: زمان تحویل ۱۶ آذرماه

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: مشاهده پذیرهای سازگار در مکانیک کوانتومی

- در دو جلسه بعد با مشاهده پذیرهای سازگار و ناسازگار آشنا خواهیم شد. نکته اساسی که می خواهیم بفهمیم این است که وقتی دو مشاهده پذیر سازگار باشند، ویژه کت های هرکدام از آن دو می توانند پایه های فضا را تشکیل دهند. در واقع این دو می توانند ویژه کت های مشترک تشکیل دهند. ولی دو مشاهده پذیر ناسازگار نمی توانند ویژه کت های مشترک و کامل تشکیل دهند. هدف نهایی ما این است که حالت سیستم کوانتومی را تا حد ممکن به صورت شفاف (ریاضیاتی: یکتا) توصیف کنیم. عدم تعین در مشخص کردن حالت ها معمولا در اثر تبهگنی ویژه حالت ها رخ می دهد و ما می توانیم با یافتن مشاهده پذیرهای سازگار (به تعداد کافی) حالت سیستم را به صورت یکتا تعریف کنیم .



منابع

- ➊ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ➋ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ➌ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ➍ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ➎ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ➏ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ➐ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ➑ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما