

سینماتیک و دینامیک نسبیتی

تبدیل نسبیتی سرعت و شتاب

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

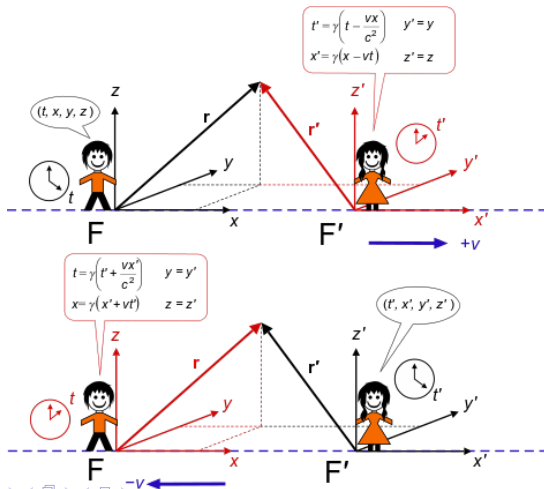
۱ تبدیل نسبی سرعت و شتاب
تبدیل نسبی سرعت و شتاب
آزمایش فیزو

- تبدیل نسبیتی سرعت و شتاب
- آزمایش فیزو

آزمایش فیزو

آنچه تاکنون آموخته ایم: تبدیلات لورنتس

در جلسه قبل تبدیلات لورنتس را از کلی ترین مجموعه تبدیلات خطی به دست آوردیم. این تبدیلات پایه فهم ما از نظریه نسبیت خاص و هندسه فضا-زمان مینکوفسکی را تشکیل می دهند.



اهداف این جلسه: تبدیل نسبیتی سرعت ها

- حال می خواهیم از تبدیلات لورنتس استفاده کرده و روابط مربوط به تبدیل نسبیتی سرعت ها را بیابیم.



تبدیل سرعت ها در جهت حرکت

• دو دستگاه مختصات لخت S و S' را در نظر بگیرید. مختصات یک رویداد مشخص در این دو دستگاه را به ترتیب با (t, x, y, z) و (t', x', y', z') نشان می دهیم. تاکنون نشان داده ایم که تبدیل مختصات در این دو دستگاه توسط روابط زیر به هم مربوط اند:

$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

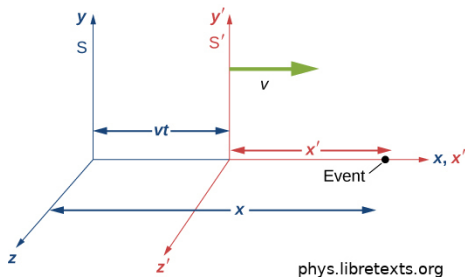
توجه کنید که دیفرانسیل این روابط
زیر به صورت زیر به دست می آیند:

$$dt' = \gamma(dt - v dx/c^2)$$

$$dx' = \gamma(dx - v dt)$$

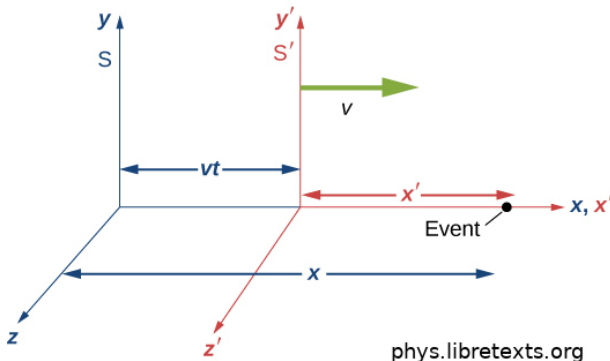
$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$



تبدیل نسبیتی سرعت ها

- تمرین: ما در واقع می خواهیم کمیت $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$ ، $u'_y = \frac{dy'}{dt'}$ و $u'_z = \frac{dz'}{dt'}$ را به دست آوریم. برای اینکار تلاش کنید با تغییر متغیر زیر محاسبه را برای $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$ انجام داده و نتیجه را بیابید.



پیدا کردن تبدیلات سرعت نسبیتی

• برای پیدا کردن تبدیل نسبیتی سرعت ها از رابطه $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$ شروع می کنیم:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma(dt - v dx/c^2)} = \frac{\frac{dx - v dt}{dt}}{\frac{dt - v dx/c^2}{dt}} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

به همین ترتیب، برای پیدا کردن تبدیل سرعت ها در جهت های y و z خواهیم داشت:

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - v dx/c^2)} = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dt - v dx/c^2}{dt}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dt}{dt} - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})}$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - v dx/c^2)} = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dt - v dx/c^2}{dt}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dt}{dt} - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})}$$

• تمرین: آیا در حد غیر نسبیتی ($v \ll c$ و یا $c \rightarrow \infty$) قوانین تبدیل سرعت های بالا به قانون کلاسیک جمع سرعت ها تبدیل خواهند شد؟

تطابق قانون نسبیتی جمع سرعت ها با تبدیل گالیله ای سرعت ها در حد غیر نسبیتی

- در اینجا نشان خواهیم داد که در حد غیر نسبیتی ($v \ll c$ و یا $c \rightarrow \infty$) قوانین تبدیل سرعت های بالا به قانون کلاسیک جمع سرعت ها تبدیل خواهند شد؟
- اثبات:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} u'_x = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = u_x - v$$

به همین ترتیب، با توجه به اینکه داریم

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma} = \lim_{c \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1$$

می توان نوشت:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} u'_y = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})} = u_y$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} u'_z = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})} = u_z$$

- بنابراین در حد غیر نسبیتی قوانین تبدیل سرعت های بالا به قانون کلاسیک جمع سرعت ها تبدیل می شود.

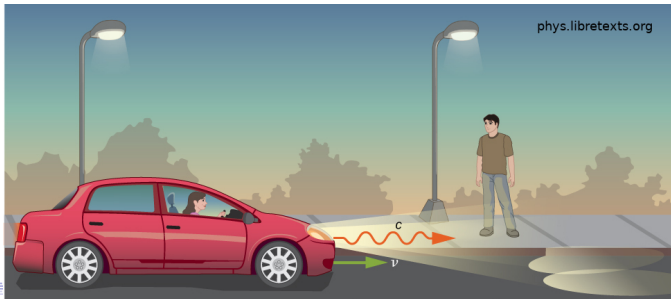
تبدیل سرعت ها از دستگاه S' به دستگاه S

- به همین ترتیب می توان نشان داد که تبدیل سرعت ها از دستگاه S' به دستگاه S به صورت زیر خواهد بود:

$$u_x = \left(\frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \right), u_y = \left(\frac{u'_y/\gamma}{1 + vu'_x/c^2} \right), u_z = \left(\frac{u'_z/\gamma}{1 + vu'_x/c^2} \right).$$

دقت کنید که این روابط عملاً با تبدیل $u \leftrightarrow u'$ و تبدیل $v \rightarrow -v$ در تبدیلات قبلی به دست می آیند.

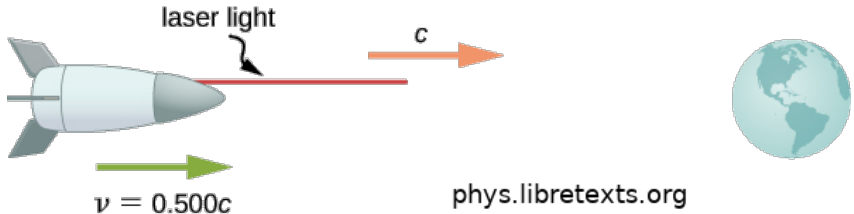
- تمرین: روابط بالا را اثبات کنید.



کاربرد رابطه تبدیل سرعت ها

- مطابق شکل زیر، سفینه ای با سرعتی برابر با نصف سرعت نور به سمت زمین حرکت می کند و پرتو نوری (نور لیزر) را به سمت زمین ارسال می کند. ناظر زمینی سرعت این پرتو را چقدر اندازه گیری خواهد کرد؟
- با استفاده از قضیه نسبیتی جمع سرعت ها داریم:

$$u_x = \frac{v + u'_x}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{0.500c + c}{1 + \frac{(0.500c)(c)}{c^2}} = \frac{(0.500 + 1)c}{\left(\frac{c^2 + 0.500c^2}{c^2}\right)} = c$$



کاربرد رابطه تبدیل سرعت ها

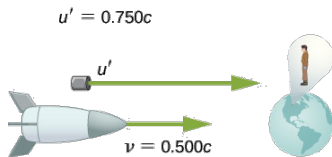
• مطابق شکل زیر، سفینه ای با سرعتی برابر با نصف سرعت نور به سمت زمین حرکت می کند و پرتابه ای را با سرعت $0.75c$ (الف) به سمت زمین و (ب) در خلاف جهت حرکتش به سمت زمین پرتاب می کند. سرعت این پرتابه را از دید ناظر زمینی در هر مورد بیابید.

• پاسخ الف) در این مورد داریم $u'_x = 0.75c$. بنابراین با استفاده از قضیه نسبیتی جمع سرعت ها داریم:

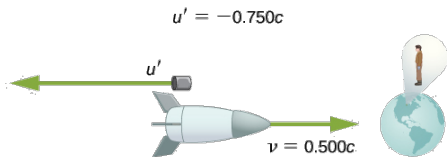
$$u_x = \frac{v + u'_x}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{0.500c + 0.750c}{1 + \frac{(0.500c)(0.750c)}{c^2}} = 0.809c$$

پاسخ ب) در این مورد داریم $u'_x = -0.75c$. بنابراین:

$$u_x = \frac{v + u'_x}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{0.500c + (-0.750c)}{1 + \frac{(0.500c)(-0.750c)}{c^2}} = -0.400c$$



Canister toward Earth



Canister away from Earth

phys.libretexts.org

آیا می توان به سرعتی بیشتر از سرعت نور رسید؟

● حالا به یکی از مهم ترین پرسش ها در موضوع نسبیت می پردازیم: آیا می توان متحرکی را با سرعت بیش از سرعت نور مشاهده کرد؟

● پاسخ: اگر بزرگی سرعت ها در دستگاه های S و S' را با

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \quad u' = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}$$

نشان دهیم، آنگاه با توجه به ناوردایی المان خط داریم:

$$ds'^2 = ds^2 \Rightarrow c^2 dt'^2 - d\vec{r}'^2 = dt'^2 (c^2 - \vec{u}'^2) = dt^2 (c^2 - u^2)$$

حال با توجه به رابطه $dt = \gamma dt' (1 + u'_x v / c^2)$ می توان مقدار dt را در رابطه آخر جایگزین کرد و به نتیجه زیر رسید:

$$dt'^2 (c^2 - \vec{u}'^2) = dt'^2 \gamma^2 (1 + u'_x v / c^2)^2 (c^2 - \vec{u}'^2)$$

که فرمول بسیار مهم زیر از آن به دست می آید:

$$c^2 - \vec{u}'^2 = \frac{c^2 (c^2 - \vec{u}'^2) (c^2 - v^2)}{(c^2 + u'_x v)^2}$$

پرسش: معنی این رابطه چیست؟

آیا می توان به سرعتی بیشتر از سرعت نور رسید؟

● رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$c^2 - \bar{u}^2 = \frac{c^2(c^2 - \bar{u}^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 + u_x'v)^2}$$

اگر ذره در دستگاه S' با سرعت $u' < c$ در حال حرکت باشد و دستگاه S' نیز نسبت به دستگاه S با سرعت $v < c$ حرکت کند، آنگاه سمت راست رابطه بالا همیشه مثبت خواهد بود. در نتیجه همیشه خواهیم داشت $u < c$. یعنی برآیند دو سرعت کمتر از c همیشه کمتر از c خواهد بود؛ و یا هیچ تبدیل مختصاتی نمی تواند باعث شود که ذره در دستگاهی با سرعت بالاتر از سرعت نور حرکت کند.

● تمرین: از قضیه جمع نسبیتی سرعت ها نشان دهید که یک پالس نوری همیشه با سرعت نور حرکت خواهد کرد.

● تمرین: ذراتی که با سرعت بیشتر از سرعت نور حرکت می کنند را تاقیون (Tachyon) می نامند. فرض کنید تاقیونی در دستگاه S' با سرعت $u' > c$ در حال حرکت باشد و دستگاه S' نیز نسبت به دستگاه S با سرعت $v < c$ حرکت کند، آنگاه چه نتیجه ای می توان درباره سرعت تاقیون در دستگاه S گرفت؟

● تمرین: اگر دستگاه S' نسبت به دستگاه S با سرعت $v > c$ حرکت کند، نتیجه هرکدام از دو تمرین بالا چطور تغییر خواهد کرد؟

تمرین

- تمرین: از رابطه تبدیل سرعت ها استفاده کرده و رابطه تبدیل شتاب ها را بیابید. پاسخ در ادامه آمده است.

Transformation of velocity (Cartesian components)

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x},$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x},$$

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x},$$

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma_v^3 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3}$$

$$a'_y = \frac{a_y}{\gamma_v^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x \frac{u_y v}{c^2}}{\gamma_v^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3}$$

$$a'_z = \frac{a_z}{\gamma_v^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x \frac{u_z v}{c^2}}{\gamma_v^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3}$$

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma_v^3 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^3}$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma_v^2 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^2} - \frac{a'_x \frac{u'_y v}{c^2}}{\gamma_v^2 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^3}$$

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma_v^2 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^2} - \frac{a'_x \frac{u'_z v}{c^2}}{\gamma_v^2 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^3}$$

پاسخ

- تمرین: از رابطه تبدیل سرعت ها استفاده کرده و رابطه تبدیل شتاب ها را بیابید.
- پاسخ: می توان به چند طریق این نتایج را به دست آورد. مثلا می توان دیفرانسیل سرعت را محاسبه کرد:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \Rightarrow du'_x = \frac{du_x(1 - \frac{vu_x}{c^2}) - (-\frac{vdu_x}{c^2})(u_x - v)}{(1 - \frac{vu_x}{c^2})^2}$$

$$du'_x = \frac{du_x(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 - \frac{vu_x}{c^2})^2} = \frac{du_x}{\gamma^2(1 - \frac{vu_x}{c^2})^2}$$

ولی از طرفی خواهیم داشت $\frac{dt'}{dt} = \gamma(1 - v u_x/c^2)$ $\Rightarrow dt' = \gamma(dt - v dx/c^2)$ بنابراین می توان نوشت:

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{\frac{du'_x}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{du_x/dt}{\gamma^2(1 - \frac{vu_x}{c^2})^2}}{\gamma(1 - v u_x/c^2)} = \frac{a_x}{\gamma^3(1 - \frac{vu_x}{c^2})^3}$$

حالا شما دو رابطه دیگر تبدیل شتاب را بیابید.

- تمرین: راه حل دیگر استفاده از تغییر متغیر $a'_x = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{du'_x}{dt}$ می باشد. نشان دهید که این دو روش به نتیجه یکسانی خواهند رسید.

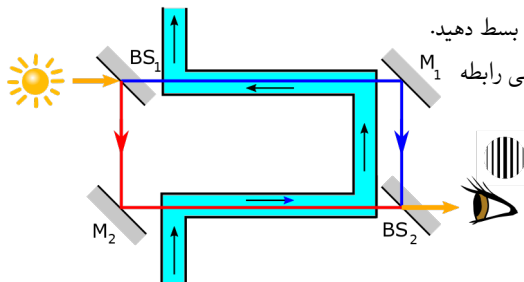
به دست آوردن رابطه درست برای آزمایش فیزو

- در آزمایش فیزو دیدیم که اگر سرعت نور در مایع ساکن $u' = c/n$ باشد، و ترتیبی دهیم که مایع با سرعت v حرکت کند، آنگاه سرعت نور از رابطه $u = u' + v(1 - \frac{1}{n^2})$ به دست می آید که در آن n ضریب شکست مایع است.
- لاوه در سال ۱۹۰۷ نشان داد که این رابطه را می توان به راحتی از جمع نسبیتی سرعت ها به دست آورد:

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2} = \frac{c/n + v}{1 + (c/n)(v/c^2)} \approx c(\frac{1}{n} + \frac{v}{c})(1 - \frac{v}{cn}) \approx \frac{c}{n} + v(1 - \frac{1}{n^2})$$

- تمرین: رابطه بالا را تا تقریب v^2/c^2 بسط دهید.

- تمرین: درباره بررسی های آزمایشگاهی رابطه فیزو نسبیتی تحقیق کنید.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید روش معرفی شده برای به دست آوردن تبدیلات نسبیتی سرعت و مهم ترین نتایج این تبدیلات را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱ درباره روش های دیگر برای اثبات رابطه جمع نسبیتی سرعت ها تحقیق کنید.

۲ توضیح دهید که چرا در نسبیت خاص سرعت یک جسم نمی تواند از سرعت نور بیشتر شود.

۳ درباره تاکیون ها تحقیق کنید.

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

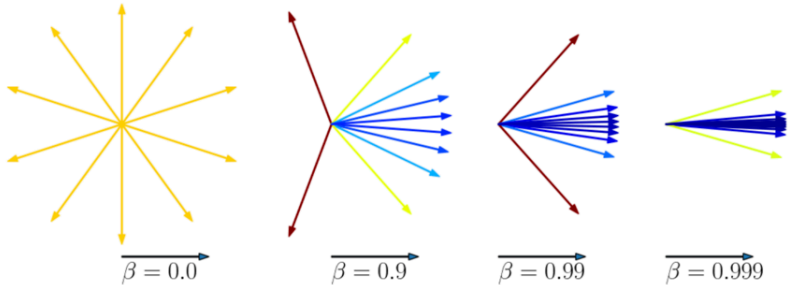


تمرین ها: زمان تحویل ۲۵ آبان ماه

- لطفا تمرین های موجود در اسلایدهای بالا را حل کنید.

مبحث بعدی: ابیراهی نور ستارگان

- در جلسه بعد پدیده ابیراهی نور ستارگان را از دیدگاه نسبیت خاص بررسی خواهیم کرد.



مراجع

- ➊ Introduction to Special Relativity; Robert Resnick
- ➋ Relativity: Special, General, and Cosmological; Wolfgang Rindler
- ➌ General Relativity: An Introduction for Physicists; M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby
- ➍ Introduction To Special Relativity; Markus Klute
<https://ocw.mit.edu/courses/8-20-introduction-to-special-relativity-january-ia>
- ➎ Leonard Susskind's Special Relativity, Find in YouTube

با سپاس از توجه شما

