

نوسانگر هارمونیک در مکانیک کوانتومی

اهمیت نوسانگر هارمونیک ساده در فیزیک

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- اهمیت نوسانگر هارمونیک ساده در فیزیک
- اهمیت نوسانگر هارمونیک ساده در فیزیک کلاسیک
- اهمیت نوسانگر هارمونیک ساده در مدل سازی های کوانتومی

طرح درس مکانیک کوانتومی

”نوسانگر هارمونیک در مکانیک کوانتومی” بخشی از مجموعه ای بزرگتر با عنوان ” مفاهیم مکانیک کوانتومی و کاربردها” است که شامل بخش های زیر است:

۱. فیزیک سیستم های کوانتومی و خاستگاه نظریه کوانتوم

۲. ابزار ریاضیاتی برای مکانیک کوانتومی

۳. اصول موضوعه مکانیک کوانتومی

۴. دینامیک سیستم های کوانتومی

۵. حل معادله شرودینگر در سیستم های یک بعدی

۶. **نوسانگر هارمونیک در مکانیک کوانتومی**

۷. تکانه زاویه ای در مکانیک کوانتومی

۸. سیستم های کوانتومی دو ترازه

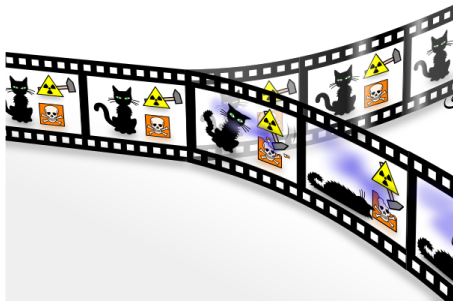
۹. حل معادله شرودینگر در سیستم های سه بعدی

۱۰. اتم هیدروژن

۱۱. مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

۱۲. جمع اندازه حرکت های زاویه ای و اسپینی

۱۳. ذرات یکسان و آمار کوانتومی



طرح درس مکانیک کوانتومی

• ”مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی” یک بخش از مجموعه ای بزرگتر با عنوان ”مفاهیم مکانیک کوانتومی و کاربردها” است که شامل بخش های زیر است:

۱۱ روش های تقریبی و نظریه اختلال در مکانیک کوانتومی

۱۲ حالت های همدوس در مکانیک کوانتومی

۱۳ ماتریس چگالی

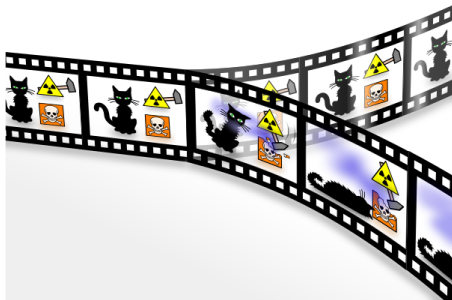
۱۴ نظریه پراکندگی در مکانیک کوانتومی

۱۵ تقارن سیستم ها در مکانیک کوانتومی

۱۶ کوانتوم نسبیتی

۱۷ کوانتش ثانویه

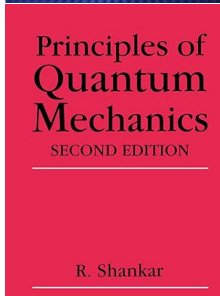
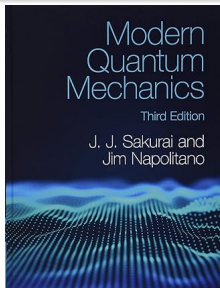
۱۸ مسائل مفهومی در مکانیک کوانتومی



• این بخش ها برای پوشش دادن درس مکانیک کوانتومی کارشناسی، مکانیک کوانتومی پیشرفته در دوره کارشناسی ارشد و مکانیک کوانتومی نسبیتی طراحی شده اند.

• منبع اصلی این درس کتاب مکانیک کوانتومی مدرن ساکورایی است.

منابع درسی مکانیک کوانتومی پیشرفته



- **Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.**

- **Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press**

- کتاب ساکورایی منبع اصلی آموزش مکانیک کوانتومی پیشرفته در دوره های تحصیلات تکمیلی است (توصیه: ویرایش سوم ساکورایی را تهیه کنید). ولی بهتر است در کنار این منبع از کتاب بسیار خوب شانکار هم استفاده کرد. این دو منبع در کنار هم می توانند کاستی های همدیگر را جبران کرده و بسیاری از مفاهیم اساسی و روش ها در مکانیک کوانتومی را پوشش دهند.

اگر نیاز به مثال های حل شده و تمرین بیشتر دارید...



Quantum Mechanics

Second Edition

More than 200 fully solved problems

- Concise explanations of all course concepts
- Information on the Schrödinger equation, angular momentum, spin, the Harmonic oscillator, numerical methods, and scattering theory

USE WITH THESE COURSES

Quantum Mechanics • Introductory Quantum Mechanics
• Quantum Theory I • Quantum Theory II

Yoav Peleg • Reuven Pnini • Elyahu Zaarur • Eugene Hecht

● Schaum's Outline of Quantum Mechanics, Yoav Peleg, Reuven Pnini, Elyahu Zaarur, Eugene Hecht, McGraw Hill

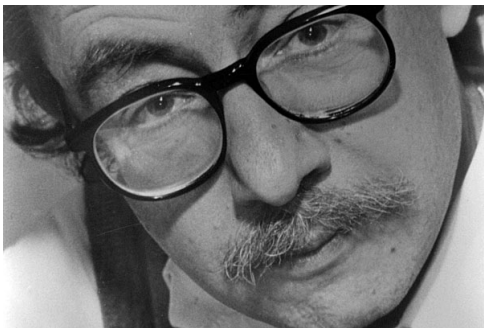
● اگر نیاز به مثال های حل شده و تمرین بیشتر دارید، پیشنهاد می کنم کتاب مکانیک کوانتومی از مجموعه سری شومز را ببینید. نمادگذاری این کتاب با کتاب های گاسیورویچ، گریفیتس و زتیلی همخوانی خوبی دارد و کمبود مثال و تمرین در دو کتاب اول را پوشش می دهد.

اهمیت نوسانگر هارمونیک ساده

● سیدنی کُلْمَن (Sidney Coleman) درباره اهمیت نوسانگر هارمونیک گفته است:

- The career of a young theoretical physicist consists of treating the harmonic oscillator in ever-increasing levels of abstraction.

● در این جلسه چند دلیل برای اهمیت بنیادین نوسانگر هارمونیک در درک و مدل سازی پدیده های فیزیکی بیان خواهیم کرد. همچنین در جلسات آینده می آموزیم که ادعای کُلْمَن اصلاً اغراق نیست!



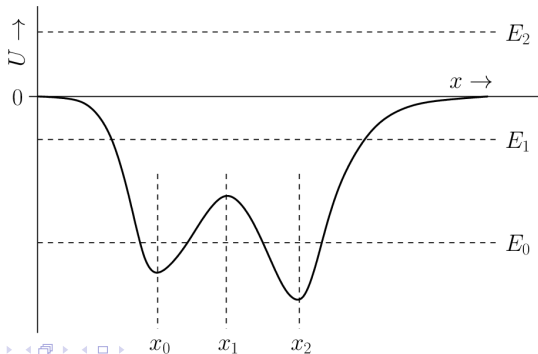
فیزیک سیستم ها در تعادل پایدار

سیستمی را با نمودار انرژی پتانسیل زیر در نظر بگیرید. نقاط تعادل این سیستم عبارتند از نقاطی که در آنها شرط $\frac{dU(x)}{dx} = 0$ برقرار است.

ولی سیستم های طبیعی و مصنوعی فیزیکی معمولا در نقاط تعادل پایدار قرار دارند. شرط تعادل پایدار این است که

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \quad \frac{d^2U(x)}{dx^2} > 0$$

بنابراین در شکل زیر نقاط x_0 و x_2 در تعادل پایدار هستند.



فیزیک سیستم ها در تعادل پایدار

• حال فرض کنید تابع پتانسیل را حول نقطه x_0 بسط (تیلور) می دهیم:

$$U(x) = U(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} + \dots$$

با توجه به اینکه نقطه موردنظر یک نقطه تعادل است، جمله دوم تقریب صفر خواهد شد و با انتخاب صفر انرژی پتانسیل به صورت $U(x_0) = 0$ داریم:

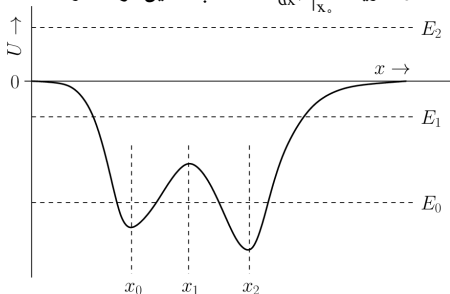
$$U(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2!} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} + \mathcal{O}(x - x_0)^3 \approx \frac{1}{2} K (x - x_0)^2$$

حال می توان با انتقال مبدا مختصات به نقطه x_0 و تعریف $K = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0}$ پتانسیل نوسانگر

هارمونیک را به عنوان مهمترین جمله در توصیف "هر سیستم در حال تعادل پایدار" یافت:

$$U(x) \approx \frac{1}{2} K x^2$$

• دلیل اصلی اهمیت نوسانگر هارمونیک ساده این است که این مدل می تواند سیستم های در حال تعادل پایدار را توصیف کند.



پتانسیل های چند متغیره

برای پتانسیل های چند متغیره نیز استدلالی شبیه به استدلال بالا می تواند به یک پتانسیل هارمونیک چند متغیره منجر شود. چطور؟ فرض کنید تابع چند متغیره $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حول نقطه $\vec{x}_0 = (0, 0, \dots)$ کمینه موضعی دارد. در این صورت با استفاده از بسط تیلور پتانسیل حول نقطه کمینه موضعی می توان نوشت:

$$U(\mathbf{x}) \approx U(\vec{x}_0) + \vec{x} \cdot \nabla U|_{\vec{x}_0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{x}_0} x_i x_j + \dots$$

می توان نشان داد که یک تبدیل مختصات (به نام مدهای نرمال normal modes) همیشه وجود دارد

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$$

به صورتی که جملات ضربی $x_i x_j$ در بسط تیلور به جملاتی به شکل χ_i^2 تبدیل می شود:

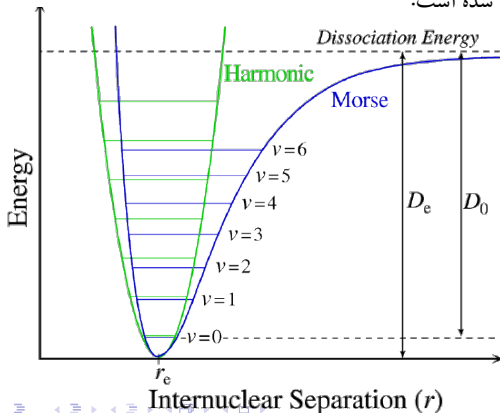
$$U(\chi) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right|_{\vec{x}_0} \chi_i^2$$

به این ترتیب می توان هر پتانسیل n متغیره را در نقطه تعادل پایدار با n نوسانگر هارمونیک ساده مدلسازی کرد. این ویژگی نوسانگر هارمونیک ساده آزادی عمل زیادی در حل مسائل بسیار پیچیده به ما خواهد داد.

نوسانگر هارمونیک ساده یک تقریب از فیزیک سیستم های در تعادل پایدار است.

نوسانگر هارمونیک ساده یک تقریب، و در واقع اولین تقریب، از وضعیت سیستم در حال تعادل است.

با این وجود، نوسانگر هارمونیک ساده معمولا تا حد خوبی وضعیت سیستم را توصیف می کند. مثلا در زیر ببینید که چطور پتانسیل مورس $V(x) = D(1 - e^{-\beta(x-x_0)})^2$ به وسیله پتانسیل درجه دوم نوسانگر هارمونیک تقریب زده شده است.

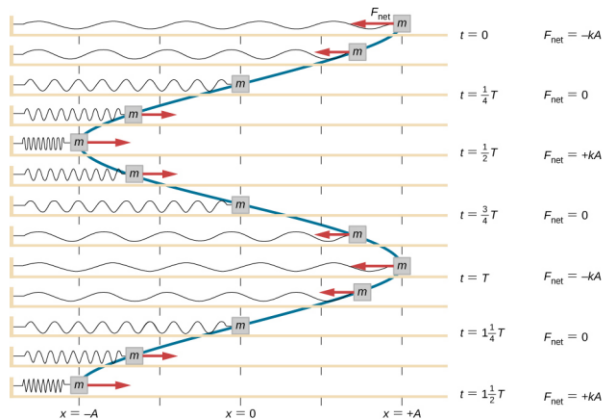


نوسانگر هارمونیک ساده قابل حل است.

دلیل دوم اهمیت نوسانگر هارمونیک ساده این است که این پتانسیل از محدود پتانسیل های حل پذیر فیزیکی (با جواب دقیق) است. در واقع جواب این نوسانگر به راحتی با توابع سینوس و

کسینوس (با فرض $\omega = \sqrt{k/m}$) داده می شود:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{or} \quad x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

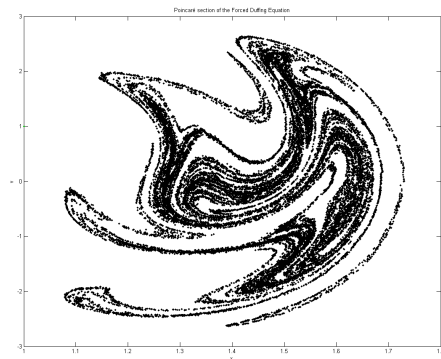


پیچیدگی مدل های دیگر

• برای درک پیچیدگی مدل های دیگر، فرض کنید که یک جمله متناسب با سرعت و نیز جمله x^3 از تقریب تیلور وارد محاسبات شود. چنین مدلی را نوسانگر دافینگ (Duffing oscillator) می نامند:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

این مدل، که اتفاقاً کاربردهای جالبی نیز دارد، می تواند رفتارهای بسیار پیچیده از خود نشان دهد و یکی از مهم ترین نمودهای رفتارهای آشوبناک است.



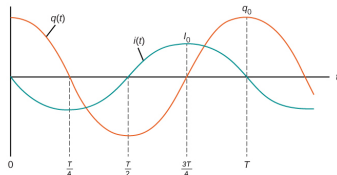
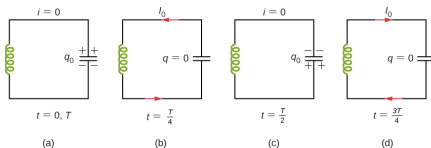
نوسانگر ساده به عنوان بهترین مدل برای توصیف پدیده های تکرار شونده

● دلیل سوم: بسیاری از پدیده ها در طبیعت تکرار شونده هستند. این نوع پدیده ها را می توان از کیهان شناسی و اخترفیزیک تا مکانیک مواد و تحلیل مدارها یافت. نوسانگر هارمونیک، به دلیل تناوبی بودن و سادگی خیره کننده، بهترین مدل برای توصیف این پدیده هاست.

● مثلاً تحول یک مدار القاگر-خازن LC با رابطه زیر نشان توصیف می شود که به وضوح یک معادله نوسانی ساده است:

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q(t) = 0$$

برای جزییات بیشتر به درس "نوسان های الکترومغناطیسی و مدارهای RLC" مراجعه کنید.

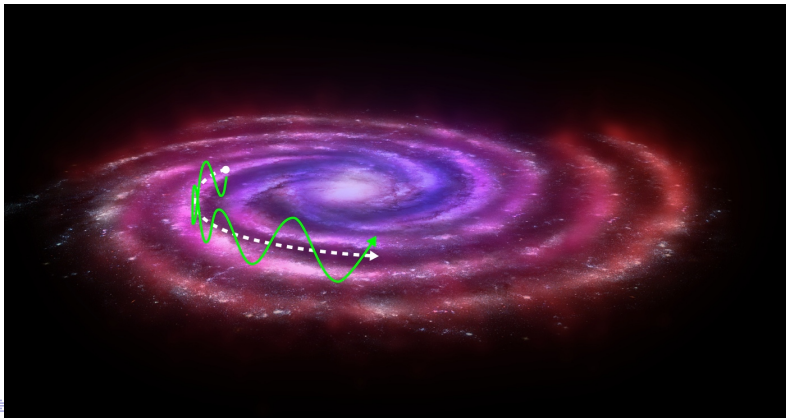


نوسانگر ساده به عنوان بهترین مدل برای توصیف پدیده های تکرار شونده

و یا می توان نشان داد که حرکت خورشید عمود بر قرص کهکشان به صورت سینوسی است زیرا شتاب گرانش در این جهت برابر است با

$$g(z) \simeq -4\pi G \int_0^z \rho(z) dz = -4\pi G \rho_0 z$$

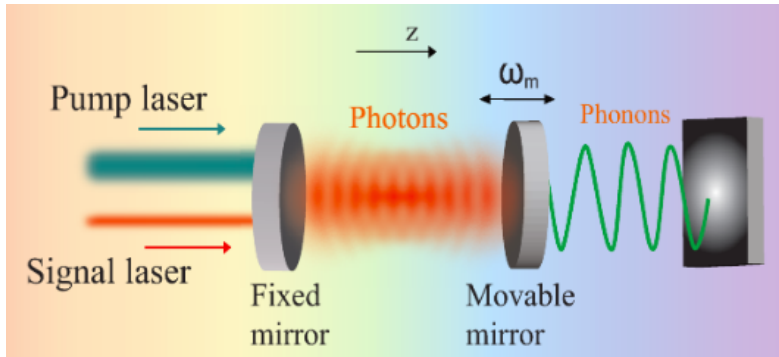
این فقط یکی از بیشمار کاربردهای حرکت نوسانی ساده در اخترفیزیک است.



مدل سازی های کوانتومی

● اهمیت مدل سازی بر اساس نوسانگر هارمونیک ساده در مکانیک کوانتومی دوچندان می شود زیرا علاوه بر نکات بالا (توصیف سیستم ها در تعادل پایدار، حل پذیری و گستردگی پدیده های تکرار شونده) ما در اینجا نظریه میدان کوانتومی را نیز داریم که علی الاصول بر اساس تجزیه میدان به مدهای نوسانی مختلف ساخته می شود.

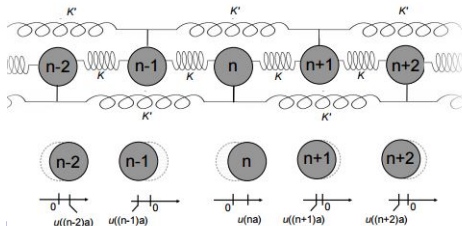
● در ادامه مثال های محدودی از کاربرد نوسانگر هارمونیک ساده در فیزیک کوانتومی را به زبان ساده و بدون جزئیات خواهیم دید.



مدل سازی کریستال ها

اتم ها در یک جامد کریستالی در یک شبکه تناوبی قرار گرفته اند. این اتم ها حتی در دماهای پایین هم کاملاً ساکن نیستند - آنها به دلیل اثرات حرارتی و کوانتومی در اطراف موقعیت تعادل خود ارتعاش می کنند. وقتی این ارتعاشات کوچک باشند، هر اتم تقریباً مانند یک نوسانگر هماهنگ ساده رفتار می کند که توسط نیروهای بازگرداننده بین اتمی به نقطه تعادل خود متصل است. با استفاده از این مدل بسیار ساده می توان بسیاری از پدیده ها را در حالت جامد توضیح داد. مثلاً درباره موارد زیر جستجو کنید:

- ❶ Specific heat of solids (Debye & Einstein models)
- ❷ Thermal conductivity (phonon transport)
- ❸ Sound propagation (acoustic phonons)
- ❹ Optical properties in ionic crystals (optical phonons)



مدل پوسته ای هسته

Harmonic Oscillator			Spin-Orbit Potential		
N	l	Spectroscopic Notation	Spin-orbit	2	Magic Number
6	0	4s	⋮	58	184
	2	3d			
	4	2g			
	6	1i			
5	1	3p	1i _{11/2}	44	126
	3	2f	1i _{13/2}		
	5	1h	3p _{1/2}		
			3p _{3/2}		
			2f _{5/2}		
4	0	3s	2f _{7/2}	32	82
	2	2d	1h _{9/2}		
	4	1g	1h _{11/2}		
			3s _{1/2}		
			2d _{3/2}		
3	1	2p	2d _{5/2}	22	50
	3	1f	1g _{7/2}		
			1g _{9/2}		
			2p _{1/2}		
2	0	2s	1f _{5/2}	8	28
	2	1d	2p _{3/2}		
			1f _{7/2}		
1			1d _{3/2}	12	20
			2s _{1/2}		
0	1	1p	1d _{5/2}	6	8
			1p _{1/2}		
0	0	1s	1p _{3/2}	2	2
			1s _{1/2}		

مدل پوسته ای هسته که یکی از مدل های مناسب برای توصیف فیزیک پیچیده هسته هاست، عملاً بر اساس یک نوسانگر هارمونیک سه بعدی بنا شده است. این مدل به یک معادله شرودینگر به شکل زیر منجر می شود:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \psi = E \psi$$

که حل دقیق آن را بعداً در بخش مربوط به "حل معادله شرودینگر" خواهیم دید. این مدل به طیف انرژی ویژه نوسانگر هارمونیک منجر می شود:

$$E_N = \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

البته در یک مدل کاربردی و خوب، بررسی تبهگنی جواب ها و وارد کردن جزئیات دیگر نیز لازم است.

اپتیک کوانتومی

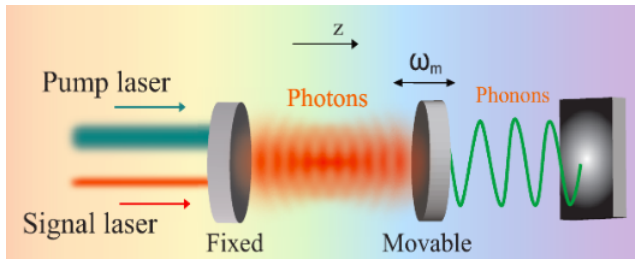
اپتیک کوانتومی عبارت است از مدل سازی نور بر اساس مد های هارمونیک (فوتون ها) و بررسی برهمکنش نور با ماده پیرامون. در واقع انرژی الکترومغناطیسی درون کاواک را می توان به صورت زیر نوشت:

$$U = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) d\vec{r}$$

حال پس از کوانتش میدان الکترومغناطیسی می توان هامیلتونی این میدان را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2 \right) \Rightarrow H = \sum_{i=1}^{\infty} \hbar \omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right)$$

که البته برای ما طیف انرژی گسسته فوتون های موجود را می سازد. مدل بالا کمی ساده سازی شده است.

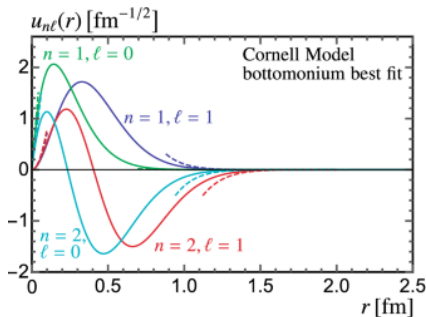


نوسانگر هارمونیک در ذرات بنیادی

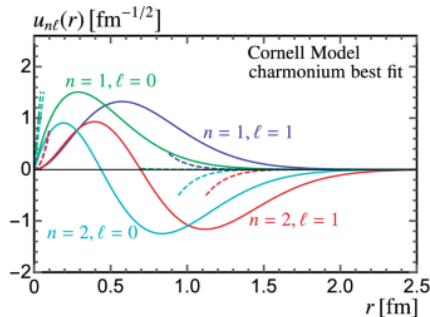
● مهم ترین کاربرد نوسانگر هارمونیک ساده کوانتومی در ذرات بنیادی استفاده از آن برای کوانتش میدان هاست. هرچند مثال های دیگری نیز وجود دارند. مثلا در مدل سازی پدیده حبس کوآرک ها (Quark Confinement) معمولا از پتانسیلی به نام پتانسیل گرنل استفاده می شود:

$$V(r) \approx -\frac{a}{r} + br$$

که در نواحی نزدیک به نقطه تعادل کاملا شبیه به یک نوسانگر هارمونیک رفتار می کند.



(a)



(b)

نظریه میدان های کوانتومی

• اگر بخواهیم اساس فیزیکی این پدیده ها در مکانیک کوانتومی را به خوبی بفهمیم، باید به سراغ نظریه میدان های کوانتومی برویم. احتمالاً بهترین نقطه برای شروع این نظریه نیز کوانتس میدان نسبیستی کلاین-گوردون است:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) = 0$$

بسط فوریه این میدان را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} q_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

که منجر به هامیلتونی زیر می شود:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} \left(|\dot{q}_{\mathbf{k}}|^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 |q_{\mathbf{k}}|^2 \right)$$

در اینجا $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$. حال با تعریف $p_{\mathbf{k}} = \dot{q}_{\mathbf{k}}$ و اعمال جابجایی $[q_{\mathbf{k}}, p_{\mathbf{k}'}] = i\hbar \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ می توان میدان هامیلتونی کوانتیزه زیر را به دست آورد:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

میدان های دیگر نیز به روش های کم و بیش مشابهی کوانتیزه می شوند.

جمع بندی

تمرین: معادله کلاین-گوردون حرکت یک ذره نسبیتی با جرم m و بدون اسپین را توصیف می کند. درباره این معادله و تفاوت ها و شباهت های آن با معادله شرودینگر و معادله دیراک تحقیق کنید.

Klein-Gordon:

$$\eta^{ab} \partial_a \partial_b \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

Minkowski metric η^{ab}

Second-order space and time $\partial_a \partial_b$

Schrödinger:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + i\hbar \partial_t \psi = 0$$

Second-order space ∇^2

First-order time ∂_t

Dirac:

$$i\hbar \gamma^a \partial_a \psi - mc\psi = 0$$

Dirac spin matrix γ^a

First-order space and time ∂_a

در جمع بندی باید گفت که تقریباً همه فیزیک کوانتومی مدرن بر اساس نظریه میدان های کوانتومی بنا شده است و این نظریه نیز از مدلسازی نوسانگر هارمونیک ساده برای توضیح میدان ها استفاده می کند. در نتیجه بررسی نوسانگر هارمونیک ساده اهمیت بسیار زیادی دارد.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم نوسانگر هارمونیک ساده در مکانیک کوانتومی و دلایل اهمیت آن را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوئید:

● مهم ترین دلایل اهمیت مدلسازی بر اساس نوسانگر هماهنگ ساده در فیزیک کلاسیک را توضیح دهید.

● چند مثال جدید از کاربرد نوسانگر هماهنگ ساده در فیزیک کلاسیک بیابید.

● مهم ترین دلایل اهمیت مدلسازی بر اساس نوسانگر هماهنگ ساده در فیزیک کوانتوم را توضیح دهید.

● چند مثال جدید از کاربرد نوسانگر هماهنگ ساده در فیزیک کوانتوم بیابید.

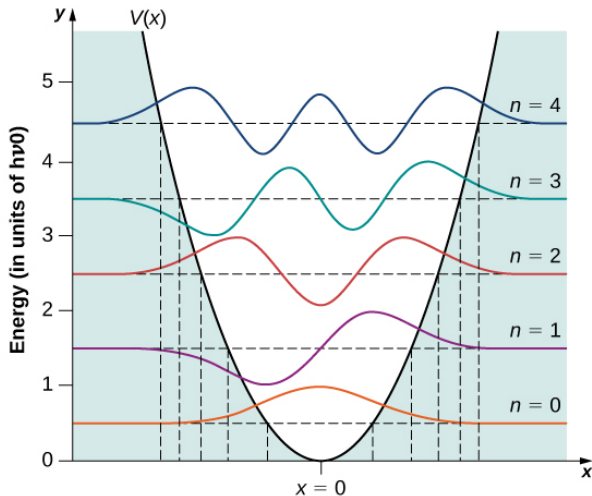
اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



مبحث بعدی: کوانتش نوسانگر هارمونیک ساده

در جلسه بعد کوانتش نوسانگر هارمونیک ساده را بررسی کرده و عملگرهای نردبانی خلق و فنا را معرفی خواهیم کرد.



منابع

- ❶ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ❷ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ❸ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ❹ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ❺ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ❻ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ❼ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ❽ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما

