

مقدمه ای بر دترمینان و ماتریس دترمینان و ویژگی های آن

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

دترمینان و ویژگی های آن

- دترمینان و برخی تعاریف لازم
- ویژگی های دترمینان
- روش لاپلاس: بسط دترمینان با استفاده از کهاد



درایه های (عناصر) دترمینان و ماتریس

پیش از وارد شدن به مبحث دترمینان، لازم است که برخی تعاریف و مفاهیم را یادآوری کنیم:

ما برخی موجودات دو بعدی مانند زیر را می نویسیم و عنصر (درایه) موجود در سطر n ام و ستون m ام را با اندیس n m نشان می دهیم. مثلاً $a_{۱۲}$ درایه موجود در سطر اول و ستون دوم دترمینان است، $a_{۵۳}$ درایه موجود در سطر پنجم و ستون سوم دترمینان است و به همین ترتیب. توجه کنید که به صورت قراردادی عدد اول نشان دهنده شماره سطر است. همچنین، همین قرارداد را برای ماتریس ها نیز رعایت خواهیم کرد.

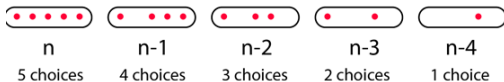
حاصل دترمینان یک اسکالر است.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

جایگشت

تعداد n شیئی با ترتیب مشخص $(1, 2, 3, \dots, n)$ را در نظر بگیرید. هرگونه تغییر در ترتیب قرارگیری این n شیئی را یک جایگشت (permutation) می نامند. تعداد کل جایگشت های ممکن متمایز از این n شیئی برابر است با $n!$. شکل زیر را ببینید.

The number of permutations of 5 objects is 5!



هر جایگشت از یک مجموعه n عضوی را می توان از ترتیب اولیه و با استفاده از تعویض متوالی جفت ها به دست آورد. مثلاً جایگشت $4132 \rightarrow 1234$ را می توان به صورت زیر ساخت:
 $1234 \rightarrow 1432 \rightarrow 4132$

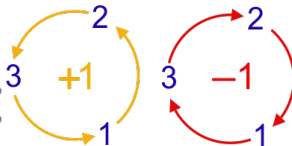
البته راه های دیگری نیز برای رسیدن به ترکیب نهایی وجود دارد. ولی تعداد تعویض جفت ها برای رسیدن به یک حالت مشخص (از یک حالت مرجع اولیه) همیشه یا زوج (even) و یا فرد (odd) خواهد بود. مثلاً

$$1234 \rightarrow 1243 \rightarrow 1423 \rightarrow 4123 \rightarrow 4132$$

بنابراین می توانیم یک جایگشت را با توجه به تعداد تعویض جفت ها، جایگشتی با پاریته (parity) زوج و یا فرد بنامیم (ریاضی: زوجیت، زوجینگی).

نماد لوی-چیویتا ϵ_{ijk}

نماد لوی-چیویتا ϵ_{ijk} در بسیاری از موضوعات ریاضیاتی و فیزیکی ظاهر می شود. شکل سه اندیسی این نماد با استفاده از جایگشت های زوج و فرد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{if } (i, j, k) \text{ is } (1, 2, 3), (2, 3, 1), \text{ or } (3, 1, 2), \\ -1 & \text{if } (i, j, k) \text{ is } (3, 2, 1), (1, 3, 2), \text{ or } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{if } i = j, \text{ or } j = k, \text{ or } k = i \end{cases}$$


بین نماد لوی-چیویتا و دلتای کرونکر رابطه زیر وجود دارد.

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

$$= \delta_{il} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) - \delta_{im} (\delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{kl}) + \delta_{in} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}).$$

دو رابطه مهم دیگر:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i a^j b^k$$

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

نماد لوی-چویتا $\epsilon_{ij\dots}$ با تعداد اندیس دلخواه

نماد لوی-چویتا $\epsilon_{ij\dots}$ با تعداد اندیس دلخواه: اگر جایگشت زوج از آرایه ها را داشته باشیم، مقدار نماد لوی چویتا برابر $+1$ است. ولی اگر جایگشت فرد از آرایه ها را داشته باشیم، مقدار نماد لوی چویتا برابر -1 است. همچنین اگر اندیس ها تکراری باشند، مقدار نماد لوی چویتا برابر 0 است. به صورت خلاصه

$$\epsilon_{ij\dots} = +1, \quad ij\dots \text{ an even permutation,}$$

$$= -1, \quad ij\dots \text{ an odd permutation,}$$

$$= 0, \quad ij\dots \text{ not a permutation.}$$

تعریف دترمینان

تعریف دترمینان: حال یک دترمینان مرتبه n را به صورت یک آرایه مربعی $n \times n$ از اعداد و یا دیگر اشیاء ریاضیاتی (مانند توابع و مشتقات آنها) تعریف می کنیم. این آرایه ها معمولا با دو خط عمودی (مانند قدرمطلق) نوشته می شوند، مانند مثال زیر

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مقدار دترمینان شامل تعداد $n!$ جمله ضربی است، به صورتی که هر عدد از هر سطر در اعداد از ستون های دیگر (و غیر آن سطر) ضرب می شود.

به هر کدام از این حاصلضرب ها یک علامت $\pm$ با توجه به پاریته اعداد ضرب شده نسبت داده می شود.

همه جملات حاصلضربی با علامت مخصوص به خود با هم جمع می شوند. مثال زیر را ببینید.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

تعریف دترمینان

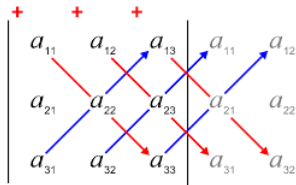
• به عبارت دیگر دترمینان زیر

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$D_n = \sum_i \sum_j \sum_k \dots \sum_{\epsilon_{ijk} \dots} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \dots$$

• توجه: جمع بندی بالا لزوماً روی جایگشت های اعداد نیست؛ هرچند نماد لوی-چویتا تضمین می کند که فقط جایگشت های اعداد در نتیجه نهایی ظاهر شوند.



دترمینان 2×2

• برای محاسبه دترمینان 2×2 با استفاده از فرمول بالا دقت می کنیم که

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \epsilon_{ij} a_{1i} a_{2j} = \sum_i (\epsilon_{i1} a_{1i} a_{21} + \epsilon_{i2} a_{1i} a_{22})$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \epsilon_{11} a_{11} a_{21} + \epsilon_{12} a_{11} a_{22} + \epsilon_{21} a_{12} a_{21} + \epsilon_{22} a_{12} a_{22}$$

همچنین $\epsilon_{11} = 0$ و $\epsilon_{22} = 0$ در حالی که $\epsilon_{12} = +1$ و $\epsilon_{21} = -1$. بنابراین می توان نوشت:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

• دقت کنید که این دترمینان $2! = 2$ جمله دارد. قبلا چنین دترمینانی را در حل معادلات دیده ایم:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

دترمینان 3×3

• برای محاسبه دترمینان 3×3 با استفاده از فرمول بالا دقت می کنیم که

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

$$D_3 = \sum_i \sum_j (\epsilon_{ij1} a_{1i} a_{2j} a_{31} + \epsilon_{ij2} a_{1i} a_{2j} a_{32} + \epsilon_{ij3} a_{1i} a_{2j} a_{33})$$

$$D_3 = \sum_i (\epsilon_{i11} a_{1i} a_{21} a_{31} + \epsilon_{i12} a_{1i} a_{21} a_{32} + \epsilon_{i13} a_{1i} a_{21} a_{33} \\ + \epsilon_{i21} a_{1i} a_{22} a_{31} + \epsilon_{i22} a_{1i} a_{22} a_{32} + \epsilon_{i23} a_{1i} a_{22} a_{33} \\ + \epsilon_{i31} a_{1i} a_{23} a_{31} + \epsilon_{i32} a_{1i} a_{23} a_{32} + \epsilon_{i33} a_{1i} a_{23} a_{33})$$

• توجه، توجه: می توان به همین صورت همه جملات این سه سری را نوشت که مجموعاً ۲۷ جمله است. ولی اینکار چندان هوشمندانه نیست. دلیل این امر آن است که می توان جملات با اندیس تکراری را در همین ابتدا حذف کرد و بنابراین محاسبه را به مراتب آسانتر کرد.

دترمینان 3×3

● شکل کامل جملات در دترمینان 3×3

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

$$D_3 = \sum_i \sum_j (\epsilon_{ij1} a_{1i} a_{2j} a_{31} + \epsilon_{ij2} a_{1i} a_{2j} a_{32} + \epsilon_{ij3} a_{1i} a_{2j} a_{33})$$

$$D_3 = \sum_i (\epsilon_{i11} a_{1i} a_{21} a_{31} + \epsilon_{i12} a_{1i} a_{21} a_{32} + \epsilon_{i13} a_{1i} a_{21} a_{33} \\ + \epsilon_{i21} a_{1i} a_{22} a_{31} + \epsilon_{i22} a_{1i} a_{22} a_{32} + \epsilon_{i23} a_{1i} a_{22} a_{33} \\ + \epsilon_{i31} a_{1i} a_{23} a_{31} + \epsilon_{i32} a_{1i} a_{23} a_{32} + \epsilon_{i33} a_{1i} a_{23} a_{33})$$

$$D_3 = \epsilon_{111} a_{11} a_{21} a_{31} + \epsilon_{112} a_{11} a_{21} a_{32} + \epsilon_{113} a_{11} a_{21} a_{33} + \epsilon_{121} a_{11} a_{22} a_{31} \\ + \epsilon_{122} a_{11} a_{22} a_{32} + \epsilon_{123} a_{11} a_{22} a_{33} + \epsilon_{131} a_{11} a_{23} a_{31} + \epsilon_{132} a_{11} a_{23} a_{32} \\ + \epsilon_{133} a_{11} a_{23} a_{33} + \epsilon_{211} a_{12} a_{21} a_{31} + \epsilon_{212} a_{12} a_{21} a_{32} + \epsilon_{213} a_{12} a_{21} a_{33} \\ + \epsilon_{221} a_{12} a_{22} a_{31} + \epsilon_{222} a_{12} a_{22} a_{32} + \epsilon_{223} a_{12} a_{22} a_{33} + \epsilon_{231} a_{12} a_{23} a_{31} \\ + \epsilon_{232} a_{12} a_{23} a_{32} + \epsilon_{233} a_{12} a_{23} a_{33} + \epsilon_{311} a_{13} a_{21} a_{31} + \epsilon_{312} a_{13} a_{21} a_{32} \\ + \epsilon_{313} a_{13} a_{21} a_{33} + \epsilon_{321} a_{13} a_{22} a_{31} + \epsilon_{322} a_{13} a_{22} a_{32} + \epsilon_{323} a_{13} a_{22} a_{33} \\ + \epsilon_{331} a_{13} a_{23} a_{31} + \epsilon_{332} a_{13} a_{23} a_{32} + \epsilon_{333} a_{13} a_{23} a_{33}$$

دترمینان 3×3

روش هوشمندانه: برای محاسبه دترمینان 3×3 دقت می کنیم که

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{321} = \epsilon_{312} = +1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1$$

و همه اپسیلون های دیگر (به دلیل اندیس های تکراری) صفر هستند. بنابراین می توان نوشت:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

دقت کنید که این دترمینان $6 = 3!$ جمله دارد.

برای دترمینان 3×3 همچنین داریم:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

روش ساروس

- دقت کنید که نیمی از جملات دترمینان با علامت منفی وارد می شوند. بنابراین کاملاً ممکن است که دترمینان اعدادی بسیار بزرگ عددی کوچک شود! مثال:

$$\begin{vmatrix} 8 & 11 & 7 \\ 9 & 11 & 5 \\ 8 & 12 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

- روش ساروس برای محاسبه دترمینان را به خاطر داشته باشید:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

- - - + + +

ویژگی های دترمینان

ویژگی های تقارنی نماد لوی-چویتا باعث می شود که دترمینان ها نیز یک سری خصوصیات متقارن از خود بروز دهند. برای سادگی ما درستی این ویژگی ها را برای یک دترمینان مرتبه ۳ بحث خواهیم داد؛ هرچند ویژگی های نامبرده کاملاً کلی هستند.

در محاسبه دترمینان، تعویض دو اندیس در نماد لوی-چویتا به معنی تعویض دو سطر دترمینان است. حال با توجه به اینکه نماد لوی چویتا با تعویض دو اندیس تغییر علامت می دهد، یعنی

$$\epsilon_{\dots 1 \dots m \dots} = - \epsilon_{\dots m \dots 1 \dots}$$

می توان به راحتی دید که با تعویض دو سطر و یا دو ستون در دترمینان نیز مقدار دترمینان در یک منفی ضرب خواهد شد.

ترانهاده یک دترمینان مانند a_{ij} دترمینانی است که جای سطرها و ستون های آن عوض شده است: $b_{ij} = a_{ji}$. این کار باعث تغییر در مقدار دترمینان نخواهد شد.

تمرین: درستی دو گزاره اخیر را برای دترمینان 3×3 نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

در ادامه ویژگی های دترمینان ها را بیان خواهیم کرد.

ویژگی های اصلی دترمینان

۱) تعویض دو سطر و یا دو ستون باعث تغییر علامت دترمینان می شود.

۲) مقدار دترمینان ترانهاده برابر است با مقدار دترمینان.

۳) ضرب عناصر یک سطر و یا یک ستون از دترمینان در یک عدد ثابت مانند k باعث می شود که مقدار دترمینان k برابر شود.

$$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

۴) اگر عناصر یک سطر و یا یک ستون دترمینانی برابر مجموع دو گروه از عناصر باشند (مثال زیر)، آنگاه آن دترمینان را می توان به صورت مجموع دو دترمینان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

۵) ویژگی های ذکر شده در بالا باعث می شوند که یک سری خصوصیات دیگر را نیز برای دترمینان ها پیدا کنیم.

چند ویژگی دیگر برای دترمینان ها

- ۱ هر دترمینان با دو سطر (و یا دو ستون) برابر مقداری برابر صفر خواهد داشت.
- ۲ اگر دو سطر و یا دو ستون دترمینان مضربی از یکدیگر باشند، مقدار دترمینان صفر است.
- ۳ اگر مضربی از یک سطر را ستون به ستون به سطر دیگر اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییری نمی کند. همچنین اگر مضربی از یک ستون را سطر به سطر به ستون دیگر اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییری نمی کند.
- ۴ اگر همه عناصر یک سطر و یا یک ستون صفر باشند، مقدار دترمینان صفر است.
- تمرین: گزاره های بالا را اثبات کنید.

روش لاپلاس برای بسط دترمینان ها

- توجه کنید که دترمینان در ابتدا n^n جمله دارد و پس از اعمال تقارن ها به $n!$ جمله می رسد. بنابراین تعداد جملات دترمینان ذاتا می تواند بسیار زیاد باشد و بهتر است روش هایی را برای بسط موثر و تعیین مقدار آن بیابیم.
 - یک روش (یکی از بهترین روش ها!) استفاده از کهدهای (minors) دترمینان است.
 - یک دترمینان مانند a_{ij} را که از مرتبه n است را در نظر بگیرید. کهاد این دترمینان را با M_{ij} و یا $M_{ij}(a)$ نشان می دهیم. این کهاد از مرتبه $n - 1$ است و آن را با حذف سطر شماره i و ستون شماره j از دترمینان a_{ij} به دست می آوریم.
 - در هنگام بسط دترمینان با استفاده از کهدها توجه کنید که از عامل های $(-1)^{i+j}$ استفاده می کنیم. در واقع عامل وارد شده در بسط $M_{ij}(-1)^{i+j}$ می باشد.
 - بسط دترمینان با استفاده از کهدها را می توان بر اساس هر سطر و یا ستون دترمینان اصلی نوشت.
 - بسط لاپلاس برای دترمینان ها: بسط دترمینان با استفاده از کهدها به صورت زیر نوشته می شود:
- $$D_n = \sum_{j=1}^n a_{ij} M_{ij} (-1)^{i+j}$$
- که در آن دترمینان را بر اساس سطر شماره i بسط داده ایم.

مثال

• بسط لاپلاس برای دترمینان مرتبه ۳ را ببینید.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{minor of } a_1} - b_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{minor of } b_1} + c_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{minor of } c_1}$$

• به علامت هر کدام از جملات در بسط لاپلاس برای دترمینان مرتبه های ۳، ۴ و ۵ دقت کنید.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{bmatrix}$$

• تمرین: دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

مثال

تمرین: دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

پاسخ را بر اساس بسط سطر اول ببینید:

$$\begin{aligned} |B| &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = 0. \end{aligned}$$

پاسخ را بر اساس بسط ستون دوم ببینید:

$$\begin{aligned} |B| &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot (-6) + 5 \cdot (-12) - 8 \cdot (-6) = 0. \end{aligned}$$

مثال

- تمرین: دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

- پاسخ را بر اساس بسط سطر اول ببینید:

$$2 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}_{\text{minor of } 2} - (-3) \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}_{\text{minor of } -3} + (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}_{\text{minor of } -1}$$

که جواب آن -25 است.

مثال

- دترمینان زیر در نظریه نسبیتی دیراک ظاهر می شود. مقدار آن را بیابید.

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

- این دترمینان را بر اساس بالاترین سطر بسط می دهیم. دقت کنید که فقط یکی از عناصر این سطر صفر است و بنابراین فقط یکی از کهادها باقی می ماند.

$$D = (-1)^{1+2} a_{12} M_{12}(a) = (-1) \cdot (1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \equiv (-1) \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

- حال کهاد باقیمانده را نیز بر اساس سطر دوم آن بسط می دهیم. دقت کنید که باز هم یکی از کهادها باقی می ماند.

$$D = (-1)(-1)^{2+3} b_{23} M_{23}(b) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

- تمرین: دترمینان بالا را بر اساس ستون سوم بسط دهید. آیا هر دو جواب یکسان اند؟

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید دترمینان، ویژگی های آن و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ منظور از دترمینان چیست؟ منظور از درایه در دترمینان چیست؟
- ۲ مفهوم جایگشت را توضیح دهید.
- ۳ منظور از جایگشت با پارته زوج و فرد چیست؟
- ۴ عمل نماد لوی-چویتا با توجه به اندیس ها چیست؟
- ۵ تعریف یک دترمینان مرتبه n را با استفاده از نماد لوی - چویتا بنویسید.
- ۶ هر دترمینان مرتبه n چند جمله دارد؟ علامت این دترمینان ها چگونه تعیین می شود؟
- ۷ مقدار یک دترمینان 2×2 دلخواه را به دست آورید. مقدار یک دترمینان 3×3 دلخواه را به دست آورید.
- ۸ روش ساروس برای محاسبه دترمینان ها را بیان کنید.
- ۹ چهار ویژگی اصلی دترمینان ها را بیان کنید.
- ۱۰ منظور از کهاد دترمینان چیست؟
- ۱۱ بسط لاپلاس برای تعیین مقدار دترمینان را بنویسید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

• تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی

- در جلسه بعد درباره روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی بحث خواهیم کرد.



$$x - 2y + 3z = 0$$

$$2x - 4y + 6z = 0$$

$$3x + y + 2z = 0$$

منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>

با سپاس از توجه شما