

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

روش های کاربردی در بسط توانی توابع

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ روش های کاربردی در بسط توانی توابع
- روش های کاربردی در بسط توانی توابع
- برخی سری های مهم

روش های کار با سری ها

- در بررسی سری ها روش های جالبی وجود دارند که می توان از آنها برای ساخت یک سری جدید و یا بهبود سرعت همگرایی سری استفاده کرد.
- البته قبلا با تعدادی از روش های جبری در سری ها آشنا شده ایم. ولی روش هایی که در این درس خواهیم آموخت به صورت بنیادی به این موضوع بستگی دارند که سری مورد نظر ما (علاوه بر شمارنده) دارای یک متغیر مستقل پیوسته مانند x است.
- به عنوان یک مثال تابع $f(x) = \ln(1+x)$ را در نظر بگیرید. بسط سری این تابع را در درس مربوط به مبحث بسط مکلورن یافتیم. هرچند، یک روش ساده تر برای پیدا کردن این بسط این است که از تک تک جملات بسط $1/(x+1)$ انتگرال بگیریم؛ و البته نتیجه یکسان خواهد بود:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \implies$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

- البته اغلب مسائل دارای پیچیدگی های بیشتری هستند. مثال زیر که شامل بسط دوجمله ای است را ببینید.

کاربرد بسط دوجمله ای

- گاهی اوقات استفاده از بسط دوجمله ای راه ساده تری را نسبت به استفاده مستقیم از سری مکلورن برای ما فراهم می کند. مثلاً بسط تابع وارون سینوس را در نظر بگیرید:

$$\sin^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots$$

چطور می توان به این بسط رسید؟

- تمرین: بسط تابع $\sin^{-1} x$ را به صورت مستقیم از بسط مکلورن به دست آورید.

روش دوم این است که دقت کنیم: $y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow \sin y = x$

و همچنین $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. تمرین: رابطه اخیر را اثبات کنید.

در نتیجه می توان نوشت:

$$\sin^{-1} x = y = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}$$

حال از بسط دوجمله ای برای نوشتن سری معادل $1/\sqrt{1-t^2}$ استفاده می کنیم و سپس از نتیجه انتگرال می گیریم:

$$y = \sin^{-1} x = \int_0^x \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{8} + \frac{5t^6}{16} + \dots\right) dt$$

که البته به همان نتیجه مورد نظر ما می رسد.

افزایش آهنگ همگرایی با ضرب سری در یک چند جمله ای

گاهی اوقات می توان آهنگ همگرایی یک سری را با ضرب آن در یک چند جمله ای افزایش داد. در واقع با این کار ضرایب چندجمله ای را به صورتی انتخاب می کنیم که جملات سری که به صورت کُند همگرا می شوند از بین بروند. مثلاً رفتار سری معادل $\ln(1+x)$ را، وقتی که در یک چندجمله ای درجه یک ضرب می شود، ببینید.

$$\begin{aligned}(1+a_1x)\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n} \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{a_1}{n-1} \right) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(1-a_1)-1}{n(n-1)} x^n.\end{aligned}$$

حال اگر مقدار $a_1 = 1$ را فرض کنیم، جمله ضریب n در صورت کسر بالا از بین می رود و در نتیجه سری به صورت $1/n^2$ همگرا می شود که بسیار سریعتر از حالت قبل است.

$$\ln(1+x) = \left(\frac{x}{1+x} \right) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^n \right)$$

روش کسرهای جزئی در محاسبه سری ها

یک روش بسیار موثر دیگر استفاده از روش کسرهای جزئی در بسط هاست. در این روش می توان سری ها با جملات پیچیده را به سری های ساده تر تبدیل و نتیجه را محاسبه کرد.

فرض کنید $g(x)$ و $h(x)$ چندجمله ای هایی بر حسب متغیر x هستند به طوری که درجه $g(x)$ کمتر از درجه $h(x)$ است. همچنین فرض کنید که چند جمله ای $h(x)$ را می توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$h(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

فعلا فرض می کنیم که تابع $h(x)$ ریشه مضاعف ندارد و بنابراین ضرایب به دست آمده متمایز هستند.

توجه: همیشه می توان یک چندجمله ای را به صورت بالا تجزیه کرد. اگر چندجمله ای ریشه چندگانه داشته باشد، باز هم تجزیه به صورت بالا ممکن است. برای توضیحات مفصل درس زیر را ببینید.



روش کسرهای جزئی در محاسبه سری ها

در اینصورت می توان کسر $g(x)/h(x)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{c_1}{x - a_1} + \frac{c_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{c_n}{x - a_n}$$

البته اگر ریشه های $h(x)$ مختلط باشند، بهتر است که کسر جزئی مربوط به ریشه مختلط را به صورت یک عبارت توان دوم نوشت تا اعداد مختلط وارد کار نشوند:

$$\frac{ax + b}{x^2 + px + q}$$

همچنین اگر چندجمله ای $h(x)$ دارای ریشه چندگانه مانند $(x - a_1)^m$ باشد، کسر جزئی مربوط به این ریشه به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{c_{1,m}}{(x - a_1)^m} + \frac{c_{1,m-1}}{(x - a_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{1,1}}{x - a_1}$$

پیدا کردن ضرایب بسط: معمولاً اینکار با برابر قرار دادن کسر اولیه و کسر جزئی ساخته شده انجام می شود. در این روش ضرایب توان ها یک به یک با هم مقایسه شده و ضرایب c_i پیدا می شوند. هرچند، روش دوم برای پیدا کردن ضرایب c_i به صورت زیر است:

$$c_i = \lim_{x \rightarrow a_i} (x - a_i) g(x) / h(x)$$

حالا آماده هستیم تا از روش کسرهای جزئی برای محاسبه سری ها استفاده کنیم. مثال بعد را ببینید.

روش کسرهای جزئی در عمل

فرض کنید می خواهیم تابع $\frac{k^2}{x(x^2+k^2)}$ را با استفاده از روش کسرهای جزئی بازنویسی کنیم. دقت کنید که عبارت داخل پرانتز در مخرج کسر را می توان به صورت $x^2+k^2 = (x-ik)(x+ik)$ نوشت. در اینجا $i^2 = -1$ پایه تعریف عدد مختلط است که بعدا با جزئیات با آن آشنا خواهیم شد. هرچند، فعلا برای دور زدن اعداد مختلط، این عبارت درجه دوم را بدون تغییر در کسر جزئی قرار می دهیم. در نتیجه، بنا به روشی که در دو اسلاید قبلی توضیح داده شد، می توان نوشت:

$$f(x) = \frac{k^2}{x(x^2+k^2)} = \frac{c}{x} + \frac{ax+b}{x^2+k^2}$$

حال باید ضرایب a ، b و c را تعیین کنیم. برای اینکار از روش اول استفاده می کنیم؛ یعنی مخرج مشترک عبارت ها در سمت راست را حساب کرده

$$\frac{k^2}{x(x^2+k^2)} = \frac{c(x^2+k^2) + x(ax+b)}{x(x^2+k^2)}$$

و صورت دو کسر در طرفین معادله را با هم برابر قرار می دهیم.

$$0(x^2) + 0(x) + k^2 = (c+a)x^2 + bx + ck^2$$

از اینجا می توان نتیجه گرفت $a = -1$ ، $b = 0$ و $c = 1$. بنابراین نتیجه نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+k^2}$$

از اینجا می توان نوشت: $\sum_k \frac{k^2}{x(x^2+k^2)} = \sum_k \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+k^2} \right)$ و محاسبات را ادامه داد.

تبدیل اویلر برای بهبود همگرایی سری ها

- در اینجا یک راه حل هوشمندانه از اویلر برای بهبود همگرایی سری ها را ارائه می کنیم. بنا به این تبدیل، که تبدیل اویلر برای بهبود همگرایی سری ها نام دارد، یک سری توانی را می توان به یک سری بر حسب متغیر $x/(x+1)$ تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n x^n \\ &= \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \left(\frac{x}{1+x} \right)^n \end{aligned}$$

که در آن رابطه بین ضرایب بسط a_n و c_n به صورت زیر داده می شود:

$$a_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} c_{n-j}$$

مثلا داریم:

$$a_0 = c_0, \quad a_1 = c_1 - c_0, \quad a_2 = c_2 - 2c_1 + c_0, \quad a_3 = c_3 - 3c_2 + 3c_1 - c_0, \dots$$

- دقت کنید که سری اولیه لزوما تناوبی نیست؛ در واقع با وارد کردن ضریب $(-1)^n$ در c_n می توان یک سری غیرتناوبی ساخت.
- اثبات: برای اثبات تبدیل اویلر مقدار a_n را از معادله سوم در معادله دوم قرار می دهیم تا به معادله اول برسیم؛ یعنی از معادله دوم به معادله اول برسیم (البته روش دیگری نیز وجود دارد). اسلایدهای بعد را ببینید.

روش اول اثبات تبدیل اویلر

● اثبات تبدیل اویلر:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \left(\frac{x}{1+x}\right)^n = \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} c_{n-j} \right) \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j} \binom{n}{j} c_{n-j} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$$

حال از ویژگی های سری های دوگانه استفاده کرده و سری بالا را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} (-1)^{n+j} \binom{n}{j} c_{n-j} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$$

حال با تغییر متغیر $l = n - j$ داریم:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+j} \binom{l+j}{j} c_l x^{l+j} (1+x)^{-l-j}$$

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l c_l x^l \left[\sum_{j=0}^{\infty} \binom{l+j}{j} x^j (1+x)^{-l-j-1} \right]$$

● تمرین: نشان دهید که عبارت داخل [...] در فرمول بالا برابر ۱ است (راهنمایی: بسط دوجمله ای) و بنابراین به نتیجه مورد نظر می رسید.

روش دوم اثبات تبدیل اویلر

اصل این اثبات را می توانید در آدرس زیر ببینید:

[https://www.physicsforums.com/threads/](https://www.physicsforums.com/threads/what-is-eulers-series-transformation-and-its-applications.119938/)

[what-is-eulers-series-transformation-and-its-applications.119938/](https://www.physicsforums.com/threads/what-is-eulers-series-transformation-and-its-applications.119938/)

در این روش از معادله اول به صورت مستقیم به معادله دوم می رسم. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k x^k \quad -1 < x \leq +1$$

حال تغییر متغیر $x = \frac{y}{1-xy}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از این تعریف می توان نوشت:

$$x^k = \left(\frac{y}{1-xy} \right)^k = y^k \left(\frac{1}{1-xy} \right)^k = \frac{y^k}{(k-1)! q^{k-1}} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} \left(\frac{1}{1-xy} \right)$$

$$x^k = \frac{y^k}{(k-1)! q^{k-1}} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n y^n \right)$$

$$x^k = \frac{y^k}{(k-1)! q^{k-1}} \left(\sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{n!}{(k-n+1)!} q^n y^{n-k+1} \right) = \frac{1}{q^{k-1}} \sum_{n=k-1}^{\infty} \binom{n}{k-1} q^n y^{n+1}$$

حال باید مقدار $f(x)$ را در بسط تابع قرار دهیم:

$$f\left(\frac{y}{1-xy}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k \left(\frac{y}{1-xy}\right)^k$$

روش دوم اثبات تبدیل اویلر

اصل این اثبات را می توانید در آدرس زیر ببینید:

<https://www.physicsforums.com/threads/what-is-eulers-series-transformation-and-its-applications.119938/>

ادامه اثبات:

$$f\left(\frac{y}{1-xy}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k \frac{1}{q^{k-1}} \sum_{n=k-1}^{\infty} \binom{n}{k-1} q^n y^{n+1}$$

حال اندیس k را جابجا می کنیم به صورتی که شمارش این اندیس از $k=0$ آغاز شود:

$$f\left(\frac{y}{1-xy}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^k \frac{c_{k+1}}{q^k} \binom{n}{k} q^n y^{n+1}$$

$$f\left(\frac{y}{1-xy}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{c_{k+1}}{q^k} \binom{n}{k} q^n y^{n+1}$$

$$f\left(\frac{y}{1-xy}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n y^{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{c_{k+1}}{q^k}$$

حال اگر مقدار 1 q را انتخاب کنیم، خواهیم داشت $y = x/(1+x)$ ؛ در نتیجه می توان نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} c_{k+1} \right]$$

تمرین: نشان دهید که این نتیجه همان عبارت خواسته شده است.

مثالی از تبدیل اویلر

• برای فهم بهتر روش استفاده از تبدیل اویلر، مثال زیر را در نظر بگیرید. سری مکلورن تابع $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

به صورت بسیار کند همگرا می شود و محدوده همگرایی آن بازه $|x| < 1$ می باشد. ولی اگر سری بالا را بر x تقسیم کنیم،

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots$$

آنگاه سری مورد نظر به شکلی در می آید که می توان برای آن از تبدیل اویلر استفاده کرد. دقت کنید که $c_n = 1/(n+1)$ و بنابراین ضرایب $a_n = (-1)^n/(n+1)$ به دست می آیند.
تمرین: ضرایب a_n را به دست آورید.

در نتیجه سری تحت تبدیل اویلر به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+x} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 + \dots \right]$$

بنابراین سری جدیدی برای تابع $\ln(1+x)$ به دست می آید که برای همه $-1 < x < \infty$ همگراست.

$$\ln(1+x) = \left(\frac{x}{1+x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{1+x} \right)^3 + \dots$$

• تمرین: همگرایی سری بالا در بازه $-1 < x < \infty$ را اثبات کنید.

برخی سری های مهم در ریاضی فیزیک

برخی سری ها به وفور در روش های ریاضی فیزیک ظاهر می شوند و بنابراین انتظار می رود که آنها را بشناسیم. اثبات درستی این سری ها به عنوان تمرین قرار داده شده است.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p-n+1)_n}{n!} x^n,$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید روش های کاربردی در مواجهه با بسط توانی توابع و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ توضیح دهید که مشتق گیری و انتگرال گیری چطور می توانند در محاسبه سری ها به ما کمک کنند.
 - ۲ کاربرد روش کسره های جزئی در محاسبه سری ها را توضیح دهید.
 - ۳ منظور از تبدیل اوایلر در سری ها چیست؟
 - ۴ چطور می توان با استفاده از تبدیل اوایلر سری هایی ساخت که سریعتر همگرا می شوند؟
 - ۵ آیا شما تاکنون بسط های مشهور سری ها (بخش دوم این درس) را در درس های دیگر خود دیده اید؟ در کدام مبحث؟
- اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ” درونی سازی ” مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

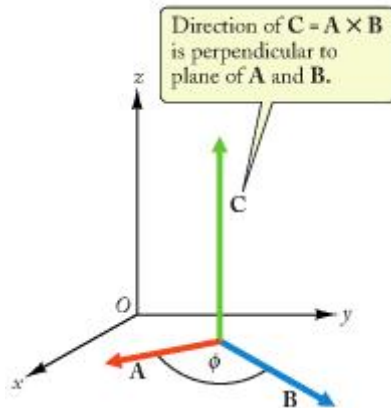


تمرین ها

- تمرینات موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- تمرینات موجود در صفحات ۴۴ تا ۴۶ از ویرایش هفتم آرفکن پاسخ دهید.
- درستی سری های مشهور موجود در صفحات ۴۵ و ۴۶ را نشان دهید.

مبحث بعدی: بردارها در فیزیک

- در جلسه بعد با مفهوم بردارها در فیزیک به صورت مقدماتی آشنا خواهیم شد.



منابع

- ➊ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ➋ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ➌ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ➍ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ➎ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

