

مقدمه ای بر دترمینان و ماتریس ماتریس ها

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

ماتریس ها



چرا ماتریس؟! •

تعاریف پایه ماتریس ها •

چرا ماتریس؟!؟



● ماتریس ها آرایه های دو بعدی از اعداد و یا توابع هستند که از قوانین جبر ماتریسی (که در ادامه معرفی خواهند شد) پیروی می کنند.

● مفهوم ماتریس در فیزیک کاربرد وسیعی دارد زیرا از آن می توان برای توصیف تبدیلات خطی (مانند تغییر در سیستم های مختصات) استفاده کرد. همچنین، مکانیک ماتریسی یکی از مهم ترین فرمولبندی های مکانیک کوانتومی است. به علاوه، بسیاری از فرمولبندی ها و محاسبات در نظریه الکترومغناطیس، مکانیک کلاسیک، مکانیک نسبیتی، ذرات بنیادی، شاره ها و ... با استفاده از ماتریس ها ساده تر می شوند.

● توجه بفرمایید که ما تاکنون اعداد و آرایه های عددی یک بعدی (مانند بردارها و اعداد مختلط) را معرفی کرده ایم. مفهوم ماتریس تعمیم دوبعدی آرایه های یاد شده است.

ماتریس ها و دستگاه معادلات خطی

- مهمترین ویژگی جبر ماتریس ها قانون ضرب ماتریس هاست. این قانون به صورتی نوشته می شود که یک دستگاه معادلات خطی مانند

$$a_1x_1 + a_2x_2 = h_1$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 = h_2$$

به صورت معادله ماتریسی زیر نوشت.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

برای اینکه معادله ماتریسی بالا هم ارز با دستگاه معادلات خطی مورد نظر ما باشد، ضرب ماتریسی باید به صورت تعریف شود که سمت چپ معادله ماتریسی مقداری برابر با مقدار زیر داشته باشد.

$$\begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 \\ b_1x_1 + b_2x_2 \end{pmatrix}$$

اگر برابری دو ماتریس را نیز بپذیریم (دو ماتریس با هم برابرند اگر عناصر آن دو درایه به درایه با هم برابر باشند)، آنگاه خواسته ما برآورده می شود. نیاز به هم ارزی دستگاه معادلات خطی و دستگاه معادلات ماتریسی اساس تعریف ضرب ماتریسی را تشکیل می دهد.

- ما ضرب ماتریسی را به مباحث آینده موکول می کنیم و فعلا وارد تعاریف پایه ماتریس ها می شویم.

معرفی ماتریس ها

- ماتریس مجموعه ای از اعداد و توابع است که به صورت آرایه ای دو بعدی (مربعی و یا مستطیلی) نوشته می شود.

Types of Matrices

Row Matrix

$$(a \ b \ c)$$

Column Matrix

Vector Matrix

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Zero Matrix

Null Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonal Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Scalar Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Unit Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Upper Triangular Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Lower Triangular Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

معرفی ماتریس ها

- علی الاصول هیچگونه محدودیتی بر تعداد سطر و ستون ماتریس ها نیست (و در واقع برخی از ماتریس ها در مکانیک کوانتومی تعداد سطر و یا ستون بینهایت دارند!!!).
- یک ماتریس با m سطر (آرایه افقی اعداد) و n ستون (آرایه عمودی اعداد) را یک ماتریس $m \times n$ می نامند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 7 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [-2 \quad 4 \quad 7 \quad -6]$$

(2×2) (3×2) (3×1) (1×4)

- هر عنصر از ماتریس A که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد را با a_{ij} نشان می دهیم. چنین عنصری را یک ”درایه” ماتریس می نامند.
- توجه کنید که در عبارت a_{ij} ، مقدار اول یعنی i نشان دهنده سطر و مقدار دوم یعنی j نشان دهنده ستون است. بنابراین توجه کنید که در ماتریس ها، ترتیب اندیس ها بسیار مهم است. یعنی درایه a_{ij} در حالت کلی با درایه a_{ji} نابرابر است.
- همچنین ماتریس های $m \times n$ در حالت کلی شکلی متفاوت از ماتریس های $n \times m$ دارند.

انواع ماتریس ها

- ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطر و ستون آن برابر باشد.
- تمرین: یک ماتریس 2×2 ، 3×3 و 4×4 بنویسید.
- ماتریسی که فقط شامل یک سطر است (ماتریس $1 \times n$) را ماتریس سطری و یا بردار سطری می نامند.
- ماتریسی که فقط شامل یک ستون است (ماتریس $m \times 1$) را ماتریس ستونی و یا بردار ستونی می نامند.
- در ادامه خواهیم دید که جبر ماتریس ها چنان تعریف می شود که جبر بردارها را نیز به عنوان یک مورد خاص در بر بگیرد.

تمرین: مثال هایی از ماتریس های سطری و ستونی بنویسید.

Types of Matrices

Row Matrix
(a b c)

Column Matrix
Vector Matrix

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Zero Matrix
Null Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonal Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Scalar Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Unit Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Upper Triangular Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Lower Triangular Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

ماتریس ها

- معمولا برای نشان دادن ماتریس از علامت پرانتز () و یا [] استفاده می شود؛ ولی هیچوقت از علامت | | برای نشان دادن ماتریس استفاده نمی کنیم زیرا این علامت برای نمایش دترمینان استفاده می شود.
- چند مثال از ماتریس ها را در زیر ببینید.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (a_{11} \quad a_{12})$$

- تمرین: تعداد سطر و ستون هرکدام از ماتریس های بالا را به صورت $m \times n$ در کنار آن (پایین، سمت راست) بنویسید. مثلا اولی 1×4 ، دومی 2×3 و غیره.
- معمولا ماتریس ها را با حروف لاتین بزرگ (A, B, C, ...) نمایش می دهیم و درایه های آنها را با حروف کوچک (a_{ij} یا $a_{i,j}$) نشان می دهیم.
- یک استثنا در این قاعده نمادگذاری بردارهای ستونی هستند. وقتی ذات برداری این کمیت ها اهمیت دارد، از نمادگذاری $\vec{x}$ و یا $\mathbf{x}$ استفاده می کنیم.
- توجه کنید که دترمینان یک عدد (اسکالر) است؛ ولی ماتریس ذاتا یک آرایه دو بعدی از اعداد است. دترمینان یک ماتریس را با یکی از علامت گذاری های $\det(A)$ و یا $|A|$ نشان می دهیم.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید اهمیت ماتریس ها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ درباره اهمیت ماتریس ها در فرمولبندی مکانیک کوانتومی تحقیق کنید.
- ۲ درباره اهمیت ماتریس ها در فرمولبندی مکانیک کلاسیک تحقیق کنید.
- ۳ درباره اهمیت ماتریس ها در فرمولبندی الکترومغناطیس تحقیق کنید.
- ۴ درباره اهمیت ماتریس ها در فرمولبندی شار ه ها تحقیق کنید.
- ۵ درباره اهمیت ماتریس ها در فرمولبندی نسبیت خاص تحقیق کنید.
- ۶ درباره اهمیت ماتریس ها در فرمولبندی نسبیت عام تحقیق کنید.
- ۷ درباره اهمیت ماتریس ها در فرمولبندی نظریه آنالیز داده تحقیق کنید.
- ۸ درباره اهمیت ماتریس ها در فرمولبندی اقتصاد تحقیق کنید.
- ۹ درباره اهمیت ماتریس ها در محاسبات کامپیوتری تحقیق کنید.
- ۱۰ درباره اهمیت ماتریس ها در آنالیز و نمایش تصاویر تلویزیونی تحقیق کنید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ” درونی سازی ” مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: مقدمه جبر ماتریس ها

- در جلسه بعد آشنایی مقدماتی با جبر ماتریس ها را آغاز خواهیم کرد.

$$3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \end{bmatrix}$$

$$2 \times 3$$

$$3 \times 2$$

$$2 \times 2$$

منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>

با سپاس از توجه شما

