

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

آزمون های ساده همگرایی سری ها

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱. آزمون های ساده همگرایی سری ها
 - آزمون مقایسه
 - آزمون ریشه کوشی
 - آزمون نسبت دالامبر

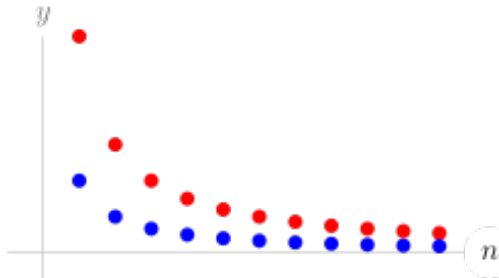
آزمون مقایسه برای همگرایی سری ها

● قضیه: اگر جملات یک دنباله مثبت مانند u_n از جملات متناظر در دنباله a_n کوچکتر باشند، یعنی

$$0 \leq u_n \leq a_n$$

و دنباله a_n یک سری همگرا را بسازد، آنگاه سری $\sum u_n$ نیز همگرا خواهد بود.
تمرین: این گزاره را اثبات کنید (پاسخ در متن کتاب).

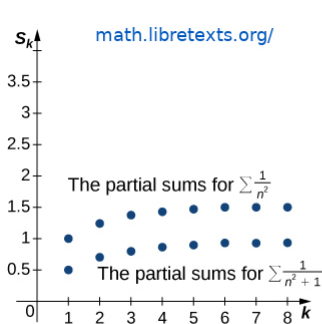
● قضیه: به طریق مشابه می توان استدلال کرد که اگر جملات یک دنباله مثبت مانند v_n از جملات متناظر در دنباله b_n بزرگتر باشند، یعنی $0 \leq b_n \leq v_n$ ، و دنباله b_n یک سری واگرا را بسازد، آنگاه سری $\sum v_n$ نیز واگرا خواهد بود.
تمرین: گزاره اخیر را نیز اثبات کنید.



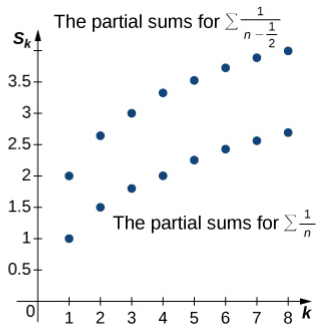
مثال

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک سری همگراست؛ بنابراین با توجه به اینکه داریم $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2+1}$ ، می توان با استفاده از آزمون مقایسه دید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ نیز همگراست. شکل زیر (سمت چپ) را ببینید. توجه کنید که

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2+1} < \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$



(a)

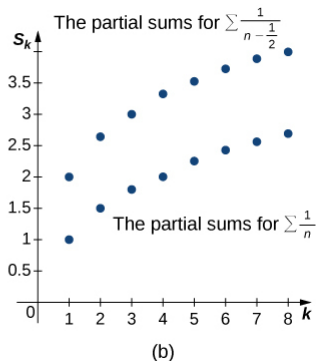
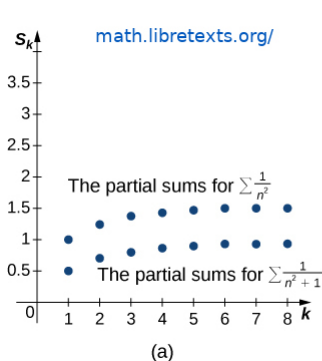


(b)

مثال

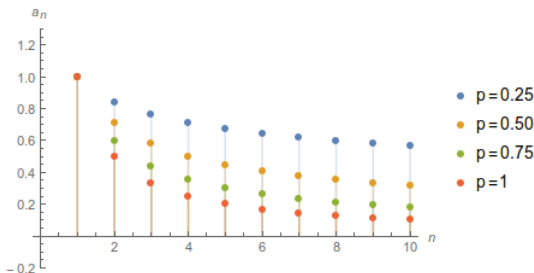
- مثال: سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ یک سری واگراست؛ بنابراین با توجه به رابطه $\frac{1}{n-1/2} > \frac{1}{n} > 0$ می توان با استفاده از آزمون مقایسه دید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1/2}$ نیز واگراست. شکل زیر (سمت راست) را ببینید. توجه کنید که

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n-1/2} > \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$$



مثال

- مثال: آیا سری های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ با $0 < p < 1$ همگرا هستند و یا واگرا؟
- پاسخ: برای تمام مقادیر $0 < p < 1$ داریم $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$ ؛ بنابراین با توجه به واگرا بودن سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ می توان نتیجه گرفت که همه سری های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ به شرط $0 < p < 1$ واگرا هستند. نمودار زیر این نکته را توضیح می دهد.



آزمون ریشه کوشی برای همگرایی سری های نامتناهی

- قضیه: یک سری با جملات a_n را در نظر بگیرید. اگر برای همه n های به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم $1 < r \leq (a_n)^{1/n}$ ، و به شرط اینکه r مستقل از n باشد، آنگاه سری $\sum_n a_n$ همگرا خواهد بود. همچنین اگر برای همه n های به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم $(a_n)^{1/n} \geq 1$ آنگاه سری $\sum_n a_n$ واگرا خواهد بود.
- اثبات بخش اول قضیه: اگر نامساوی $1 < r \leq (a_n)^{1/n}$ را به توان n برسانیم، آنگاه خواهیم داشت $a_n \leq r^n < 1$
- البته قبلاً نشان داده ایم که سری هندسی $\sum r^n$ به شرط $1 < r < \infty$ همگراست؛ در نتیجه با توجه به آزمون مقایسه سری $\sum_n a_n$ نیز همگرا خواهد بود.
- اثبات بخش دوم قضیه: اگر نامساوی $(a_n)^{1/n} \geq 1$ را به توان n برسانیم، آنگاه خواهیم داشت $a_n \geq 1$
- در نتیجه با توجه به آزمون مقایسه سری $\sum_n a_n$ واگرا خواهد بود.

مثالی از به کار بردن آزمون ریشه کوشی

● سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ تحت چه شرایطی همگراست؟

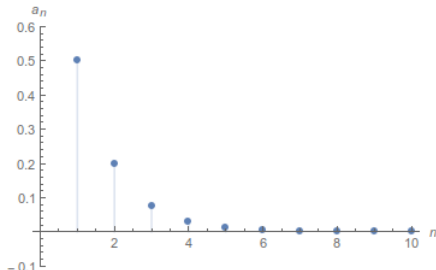
● پاسخ: باید حد عبارت زیر را بیابیم:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

که در آن $n+1 = m$. حال دقت کنید که اگر $x = 1/m$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m-1} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x} = e^{-1} \approx 0.37$$

بنابراین سری مورد نظر همگراست. به نمودار این دنباله دقت کنید.



آزمون نسبت دالامبر برای همگرایی سری های نامتناهی

- قضیه: اگر برای همه n های به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم $1 < r \leq a_{n+1}/a_n$ ، و به شرط اینکه r مستقل از n باشد، آنگاه سری $\sum_n a_n$ همگرا خواهد بود. همچنین اگر برای همه n های به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم $a_{n+1}/a_n \geq 1$ آنگاه سری $\sum_n a_n$ واگرا خواهد بود.
- تمرین: درستی این قضیه را نشان دهید (متن کتاب).
- این قضیه را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1, & \text{convergence,} \\ > 1, & \text{divergence,} \\ = 1, & \text{indeterminate.} \end{cases}$$

- دقت کنید که در حالت سوم نمی توان نتیجه ای از قضیه بالا درباره همگرایی سری گرفت. مثلاً برای سری هارمونیک داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

- معمولاً آزمون نسبت در موارد بحرانی جوابگو نیست و باید به سراغ آزمون های حساس تر برویم.

مثالی از به کار بردن آزمون ریشه کوشی

• سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ تحت چه شرایطی همگراست؟

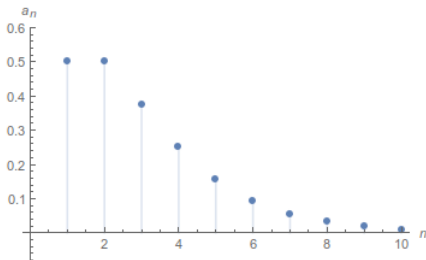
• پاسخ: باید حد عبارت زیر را بیابیم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n+1)^2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

تمرین: نشان دهید که حد عبارت بالا وقتی $n \rightarrow \infty$ کوچکتر از ۱ است و سری همگراست.

• سری $\sum n/2^n$ همگراست زیرا

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \leq \frac{3}{4} \quad \text{for } n \geq 2$$



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید آزمون های ساده همگرایی سری ها و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱. آزمون مقایسه را با ذکر یک مثال توضیح دهید.

۲. آزمون ریشه کوشی را با ذکر یک مثال توضیح دهید.

۳. آزمون نسبت دالامبر را با ذکر یک مثال توضیح دهید.

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

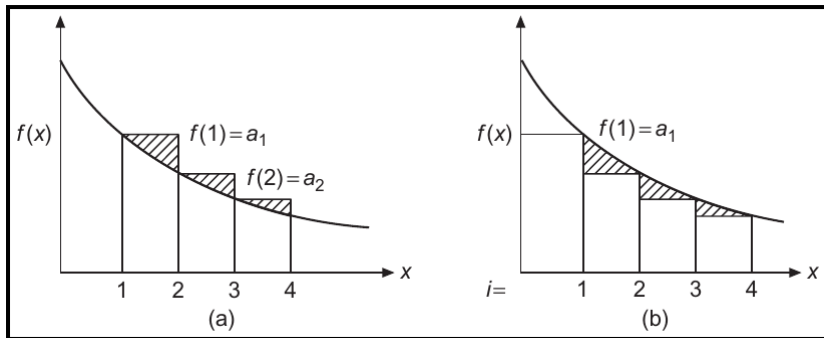


تمرین ها

- تمرینات موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: آزمون انتگرال کوشی برای همگرایی سری ها

در جلسه بعد با آزمون انتگرال کوشی برای همگرایی سری ها و برخی آزمون های دیگر آشنا خواهیم شد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

