

دینامیک سیستم های کوانتومی

دامنه همبستگی و رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



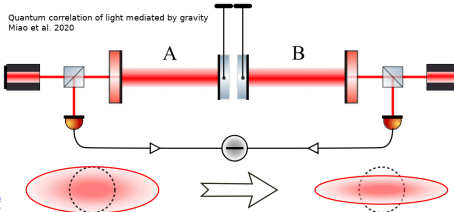
دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ دامنه همبستگی و رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان
- دامنه همبستگی
 - رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان

دامنه همبستگی بین حالت ها

- در این درس می خواهیم این سوال را مطرح کنیم که کت های حالت سیستم در زمان های مختلف چه ارتباطی با هم دارند. این ارتباط را همبستگی (correlation) می نامند. در نهایت نیز به مفهومی به نام دامنه همبستگی correlation amplitude می رسم.
- فرض کنید که کت حالت اولیه یک سیستم کوانتومی در $t = 0$ به صورت $|\alpha\rangle$ داده شده است. در اثر تحول سیستم، کت حالت پس از زمان t به $|\alpha, t = 0; t\rangle = \mathcal{U}(t, t_0)|\alpha\rangle$ تبدیل می شود.
- در اکثر موارد، ما سیستم (مانند یک کیوبیت) را در حالت مشخصی آماده کرده ایم و می خواهیم بدانیم پس از زمان t سیستم چقدر تغییر کرده است. برای اینکار ما از ضرب داخلی بین حالت اولیه و حالت نهایی سیستم استفاده می کنیم: $C(t) \equiv \langle \alpha | \alpha, t = 0; t \rangle = \langle \alpha | \mathcal{U}(t, t_0) | \alpha \rangle$
- که آن را دامنه همبستگی می نامند. اندازه کمیت $C(t)$ مقیاسی از شباهت بین حالت های اولیه و ثانویه است.



تحول زمانی دامنه همبستگی

- حالا می خواهیم تحول زمانی دامنه همبستگی را بررسی کنیم. به عنوان ساده ترین سوال، موردی را فرض کنید که سیستم در ابتدا در یکی از ویژه کت های هامیلتونی مثلا $|\alpha'\rangle = |\alpha\rangle$ قرار دارد.

در این حالت می توان نوشت:

$$C(t) = \langle \alpha' | \alpha', t_0 = 0; t \rangle = \exp\left(\frac{-iE_{\alpha'}t}{\hbar}\right)$$

دقت کنید که در این مورد اندازه دامنه همبستگی در همه زمان ها برابر یک است، که البته قابل انتظار است چون حالت سیستم یک حالت پایا است.

- حال موردی را فرض کنید که سیستم در ابتدا در یک برهمنهی از ویژه کت های هامیلتونی $|\alpha\rangle = \sum_{\alpha'} c_{\alpha'} |\alpha'\rangle$ قرار دارد. در این حالت می توان نوشت:

$$\begin{aligned} C(t) &= \left(\sum_{\alpha'} c_{\alpha'}^* \langle \alpha' | \right) \left[\sum_{\alpha''} c_{\alpha''} \exp\left(\frac{-iE_{\alpha''}t}{\hbar}\right) |\alpha''\rangle \right] \\ &= \sum_{\alpha'} |c_{\alpha'}|^2 \exp\left(\frac{-iE_{\alpha'}t}{\hbar}\right). \end{aligned}$$

با توجه به وجود جمله نوسانی در جمع بندی بالا انتظار داریم که پس از گذشت زمان کافی، جملات مختلف همدیگر را کنسل کرده و در نتیجه دامنه همبستگی با افزایش زمان کاهش یابد.

دامنه همبستگی در فضاها پیوسته

- فرض کنید که حالت سیستم به صورت یک برهم‌نهی از تعداد بسیار زیادی ویژه‌کتهای انرژی نوشته می‌شود و به دلیل نزدیکی بسیار زیاد طیف انرژی سیستم، عملاً می‌توان این طیف را شبه پیوسته فرض کرد. در این حالت مجاز هستیم که به جای جمع‌بندی از انتگرال استفاده کنیم:

$$\sum_{a'} \rightarrow \int dE \rho(E), \quad c_{a'} \rightarrow g(E) \Big|_{E \simeq E_{a'}}$$

که در آن $\rho(E)$ نشان دهنده چگالی ویژه حالت‌های انرژی است.

- تمرین: نشان دهید که در این حالت دامنه همبستگی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C(t) = \int dE |g(E)|^2 \rho(E) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right)$$

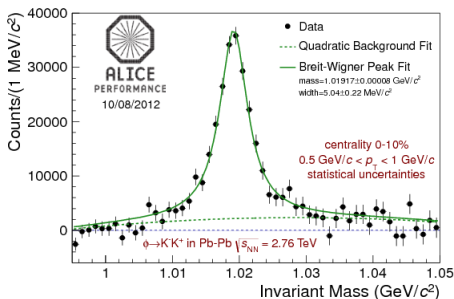
با این فرض که شرط نرمال سازی زیر برقرار باشد:

$$\int dE |g(E)|^2 \rho(E) = 1$$

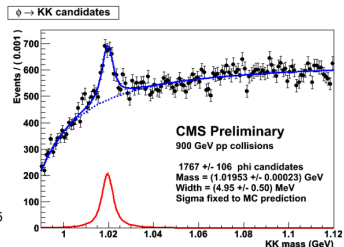
- رابطه بالا برای $C(t)$ کاربردهای بسیاری در تقریباً ”همه بخش‌های فیزیک“ دارد. به ویژه می‌توان به فیزیک اتمی، ذرات بنیادی، هسته‌ای و نظریه اطلاعات کوانتومی اشاره کرد. هرچند ما در اینجا یکی از کاربردهای آن، یعنی رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان، را بررسی خواهیم کرد.

رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان

در حالت هایی که در دنیای واقعی رخ می دهند، معمولاً کمیت $\rho(E)|g(E)|^2$ حول یک (و یا چند مقدار) انرژی قله دارد. مثلاً نمودارهای زیر را در نظر بگیرید که از دو آشکارساز سرن گزارش شده اند. این نوع نمودارها را برایت-ویگنر (Breit – Wigner) می نامند.



ALI-PERF-27033



رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان

- فرض کنید که تابع $\rho(E)|g(E)|^2$ حوالی $E = E_0$ قله ای با ضخامت ΔE دارد. در این حالت می توان دامنه همبستگی را به صورت زیر نوشت:

$$C(t) = \exp\left(\frac{-iE_0t}{\hbar}\right) \int dE |g(E)|^2 \rho(E) \exp\left[\frac{-i(E - E_0)t}{\hbar}\right]$$

در نتیجه، وقتی زمان t می گذرد انتگرالده بالا شدیداً نوسان می کند، مگر اینکه بازه $|E - E_0|$ در مقایسه با $\hbar/t$ بسیار کوچک باشد. در این حالت اخیر، آرگومان جمله نمایی عملاً صفر است و انتگرالده نوسان نمی کند (نوسان کمی دارد).

- در واقع اگر بازه $|E - E_0| \simeq \hbar/t$ بسیار کوچکتر از مقدار ضخامت منحنی، یعنی ΔE ، باشد؛ آنگاه نوسان انتگرالده آنقدر شدید خواهد بود که دامنه همبستگی $C(t)$ عملاً صفر است.

ولی وقتی شرط

$$t \simeq \frac{\hbar}{\Delta E}$$

برقرار باشد، آنگاه دامنه همبستگی رشد می کند. در این حالت ما معمولاً شاهد یک پدیده فیزیکی بسیار مهم هستیم (مانند سیگنال برای وجود یک ذره).

- توجه کنید که رابطه اخیر برای طیف شبه پیوسته اثبات شد، ولی می توان نشان داد که حتی برای سیستم های دو ترازه مانند تحول زمانی اسپین در میدان مغناطیسی نیز درست است.

مفهوم رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان

تاکنون بحث های بسیار زیادی درباره مفهوم رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان در گرفته است. به ویژه اینکه معلوم شده است که این رابطه ذاتا با رابطه عدم قطعیت موقعیت-تکانه متفاوت است.

تمرین مهم: درباره تفاوت های روابط عدم قطعیت انرژی-زمان و موقعیت-تکانه تحقیق و بحث کنید. به ویژه دقت کنید که زمان در مکانیک کوانتومی یک پارامتر است و مشاهده پذیر نیست. در این زمینه به مقاله بسیار جذاب آهارونوف-بوهم مراجعه کنید که نشان می دهند در برخی سیستم های کوانتومی می توان انرژی را با دقت بسیار زیاد و در زمان کم اندازه گیری کرد.

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 122, NUMBER 5

JUNE 1, 1961

Time in the Quantum Theory and the Uncertainty Relation for Time and Energy

Y. AHARONOV* AND D. BOHM

H. H. Wills Physics Laboratory, Bristol, England

(Received September 7, 1960)

Because time does not appear in Schrödinger's equation as an operator but only as a parameter, the time-energy uncertainty relation must be formulated in a special way. This problem has in fact been studied by many authors and we give a summary of their treatments. We then criticize the main conclusion of these treatments; viz., that in a measurement of energy carried out in a time interval, Δt , there must be a minimum uncertainty in the transfer of energy to the observed system, given by $\Delta(E' - E) \geq \hbar/\Delta t$. We show that this conclusion is erroneous in two respects. First, it is not consistent with the general principles of the quantum theory, which require that all uncertainty relations be expressible in terms of the mathematical formalism, i.e., by means of operators, wave functions, etc. Secondly, the examples of measurement processes that were used to derive the above uncertainty relation are not general enough. We then develop a systematic presentation of our own point of view, with regard to the role of time in the quantum theory, and give a concrete example of a measurement process not satisfying the above uncertainty relation.

مفهوم رابطه عدم قطعیت انرژی- زمان

بنابراین باید در هنگام ”استفاده و تفسیر“ رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان نهایت دقت را به کار ببریم. روشی که در اینجا برای اثبات این رابطه به کار رفت، امن ترین تفسیر برای رابطه را نیز به دست می دهد:

تفسیر رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان: در نتیجه تحول زمانی، کت حالت یک سیستم کوانتومی پس از گذشت زمان تقریبی

$$\Delta t \simeq \hbar / \Delta E$$

شکل اولیه خود را از دست خواهد داد.

بنابراین اگر سیستمی را در حالت همدوس، درهمنشده و ... آماده کنیم، پس از گذشت زمان تقریبی $\Delta t \simeq \hbar / \Delta E$ دیگر انتظار حالت اولیه را نخواهیم داشت؛ مگر اینکه به ترتیبی سیستم دوباره احیا شود. در این زمینه بعداً در بحث تحول سیستم های باز کوانتومی بیشتر بحث خواهیم کرد.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم دامنه همبستگی و مفهوم رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

● مفهوم دامنه همبستگی چیست؟

● دامنه همبستگی در طیف های پیوسته و گسسته چطور محاسبه می شود؟

● مفهوم رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان چیست؟

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

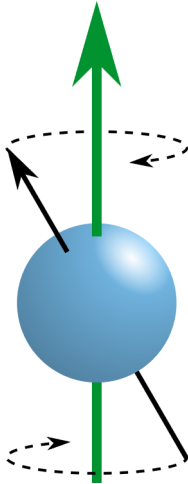
↓↓↓↓ ↑↑↑↑

تمرین

این بار تمرین نداریم!

مبحث بعدی: اسپین در میدان مغناطیسی

- در جلسه بعد درباره تحول زمانی یک ذره اسپین دار در میدان مغناطیسی بحث خواهیم کرد. این مساله را گاهی اوقات تقدم اسپینی و یا تقدم لارمور نیز می نامند.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما