

مقدمه ای بر دترمینان و ماتریس ماتریس های متعامد، یکانی و هرمیتی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ ماتریس های متعامد، یکانی و هرمیتی
- ماتریس های متعامد، یکانی و هرمیتی
- استخراج یک سطر و یا یک ستون از ماتریس

ماتریس متعامد

- یک ماتریس مربعی با درایه های حقیقی را در نظر بگیرید. چنین ماتریسی را متعامد (orthogonal) می نامند اگر وارون آن با ترانزپوز آن برابر باشد:

$$S^{-1} = S^T \Leftrightarrow SS^T = I \Leftrightarrow S^T S = I$$

تمرین: نشان دهید که دو تعریف سمت راست از ماتریس متعامد با تعریف سمت چپ معادل اند.

- دترمینان ماتریس متعامد: اگر دترمینان طرفین رابطه بالا را محاسبه کنیم، خواهیم داشت:
- $$\det(SS^T) = \det(I) \Rightarrow \det(S) \det(S^T) = 1 \Rightarrow [\det(S)]^2 = 1$$

$$\det(S) = \pm 1 \text{ و یا}$$

- تمرین مهم: نشان دهید که اگر S و S' هر دو ماتریس متعامد باشند، آنگاه SS' و $S'S$ هم متعامد هستند.

$$(S'S)^T (S'S) = S^T S'^T S' S = S^T I S = S^T S = I \quad \text{پاسخ:}$$

- تمرین: نشان دهید که ماتریس زیر متعامد است. راهنمایی: نشان دهید $R_\theta^T R_\theta = I$.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

مثال

تمرین: نشان دهید که ماتریس زیر متعامد است.

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

اثبات:

$$R_{\theta} R_{\theta}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرین: نشان دهید که ماتریس زیر متعامد است.

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

تمرین: نشان دهید که ماتریس زیر متعامد است.

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرین: شرط کلی برای متعامد بودن ماتریس زیر چیست؟

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ماتریس یکانی

- یک ماتریس مربعی با درایه های مختلط را در نظر بگیرید. چنین ماتریسی را یکانی (unitary) می نامند اگر وارون آن با الحاقی اش برابر باشد:

$$U^{-1} = U^{\dagger} \quad \Leftrightarrow \quad UU^{\dagger} = I \quad \Leftrightarrow \quad U^{\dagger}U = I$$

تمرین: نشان دهید که دو تعریف سمت راست از ماتریس یکانی با تعریف سمت چپ معادل اند.

- توجه: اگر ماتریس U در شرط بالا صدق کند و همه درایه های آن حقیقی باشند، آنگاه ماتریس U متعامد نیز هست. یعنی، ماتریس های متعامد زیرمجموعه ماتریس های یکانی اند.

- با توجه به اینکه برای هر ماتریس داریم $\det(A^T) = \det(A)$ ، می توان نوشت $\det(A^{\dagger}) = \det(A)^*$. حال با توجه به قضیه ضرب دترمینان ها می توان رابطه زیر را برای دترمینان ماتریس های یکانی یافت:

$$\det(U) \det(U^{\dagger}) = \det(I) \Rightarrow \det(U) \det(U)^* = 1 \Rightarrow |\det(U)|^2 = 1$$

از رابطه آخر می توان نتیجه گرفت که در حالت کلی $\det(U)$ عددی مختلط با اندازه واحد است.

- پیشتر دیده ایم که چنین اعدادی را می توان در حالت کلی به صورت $\exp(i\theta)$ نوشت؛ و یا

$$\det(U) = e^{i\theta} \quad \det(U^{\dagger}) = e^{-i\theta}$$

دلیل اینکه ماتریس بالا یکانی خوانده می شود، همین است.

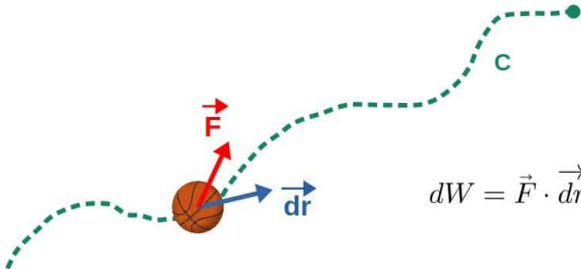
دلیل اهمیت ماتریس های یکانی

پیشتر گفتیم که اگر همه درایه های ماتریس U حقیقی باشند، آنگاه ماتریس نامبرده یک ماتریس متعامد است. از رابطه اخیر می توان دید که درمینان ماتریس متعامد فقط می تواند مقادیر ± 1 به خود بگیرد.

تمرین: اثبات کنید که اگر ماتریس های U و V هر دو یکانی باشند، آنگاه ماتریس UV نیز یکانی خواهد بود (به شرط خوش تعریف بودن ضرب این دو).

پاسخ:
$$(UV)^{-1}(UV) = V^{-1}U^{-1}UV = V^{-1}IV = V^{-1}V = I$$

دلیل اهمیت ماتریس های متعامد و یکانی (تبدیلات متعامد و یکانی در حالت کلی) در فیزیک این است که مقدار اسکالرهای، مانند ضرب داخلی دو بردار، تحت این نوع تبدیلات بدون تغییر باقی می ماند.



ماتریس های هرمیتی

- یک ماتریس را هرمیتی (Hermitian) یا خودالحاقی (self – adjoint) می نامند اگر آن ماتریس با الحاقی اش برابر باشد. چنین ماتریسی باید مربعی باشد و همچنین

$$(H^\dagger)_{ij} = (H)_{ij} \quad \longrightarrow \quad h_{ji}^* = h_{ij} \quad (H \text{ is Hermitian}).$$

- تقارن ماتریس های هرمیتی نسبت به قطر اصلی ماتریس به این صورت است: درایه های متقارن نسبت به قطر اصلی باید مزدوج مختلط همدیگر باشند. همچنین، درایه های روی قطر اصلی باید حقیقی باشند. مثلاً ماتریس های زیر هرمیتی اند:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{bmatrix}$$

- توجه: اگر همه درایه های یک ماتریس هرمیتی حقیقی باشند، با توجه به خودالحاقی بودن، این ماتریس متقارن هم خواهد بود (نسبت به قطر اصلی). بنابراین همه ماتریس های متقارن، هرمیتی (خودالحاقی) هستند.

- تمرین: اگر دو ماتریس A و B هرمیتی باشند، آنگاه ماتریس های حاصل ضرب AB و BA می توانند غیر هرمیتی باشد. برای این گزاره یک مثال بیاورید.

- توجه: اگر دو ماتریس A و B هرمیتی باشند، آنگاه ماتریس $AB + BA$ همیشه هرمیتی و ماتریس $AB - BA$ همیشه پادهرمیتی است. اثبات گزاره دوم:

$$(AB - BA)^\dagger = - (AB - BA)$$

استخراج بخش های خاصی از یک ماتریس

• در برخی محاسبات ماتریسی لازم است که ما بخش های خاصی از یک ماتریس را استخراج کنیم. این مساله به ویژه در محاسبات عددی به کار می آید. خوشبختانه این کار را می توان به راحتی انجام داد.

• بردارهای ستونی $\mathbf{e}_i$ را در نظر بگیرید که فقط مولفه $(i, 1)$ اُم آن یک و بقیه درایه ها صفرند. برای مثال

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{etc.}$$

این بردارهای یکه را پایه های فضای n بعدی می نامند که بعدا با آنها دوباره برخورد خواهیم کرد. ولی یکی از کاربردهای این بردارها این است که به کمک آنها می توان ستون های مشخصی از ماتریس را استخراج کرد. مثلا اگر A یک ماتریس 3×3 باشد، آنگاه می توان با ضرب ماتریس یاد شده در $\mathbf{e}_2$ ستون دوم ماتریس را استخراج کرد.

$$A\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

طریقه استخراج سطر دوم ماتریس: $\mathbf{e}_2^T A = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید ماتریس های متعامد، یکانی و هرمیتی را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ منظور از ماتریس متعامد چیست؟
- ۲ منظور از ماتریس یکانی چیست؟
- ۳ منظور از ماتریس هرمیتی (خودالحاقی) چیست؟
- ۴ درباره اهمیت ماتریس های متعامد تحقیق کنید.
- ۵ درباره اهمیت ماتریس های یکانی تحقیق کنید.
- ۶ درباره اهمیت ماتریس های هرمیتی تحقیق کنید.
- ۷ چطور می توان یک سطر و یا ستون خاص از یک ماتریس را استخراج کرد؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراوانش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: ضرب مستقیم ماتریس ها و توابع ماتریسی

• در جلسه بعد درباره ضرب مستقیم ماتریس ها و توابع ماتریسی بحث خواهیم کرد.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} & a_{1,2} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \\ a_{2,1} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} & a_{2,2} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} \\ a_{1,1}b_{2,1} & a_{1,1}b_{2,2} & a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} & a_{2,2}b_{1,1} & a_{2,2}b_{1,2} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,1}b_{2,2} & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix}.$$

منابع

- ➊ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ➋ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ➌ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ➍ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ➎ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ➏ <https://math.libretexts.org/>

با سپاس از توجه شما