

نوسانگر هارمونیک در مکانیک کوانتومی

تحول زمانی نوسانگر کوانتومی و بسط بیکر-کمپبل-هاسدورف

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ تحول زمانی نوسانگر کوانتومی و بسط بیکر-کمپبل-هاسدورف
- تحول زمانی نوسانگر هارمونیک ساده
- اثبات لم بیکر-کمپبل-هاسدورف

تحول زمانی نوسانگر هارمونیک ساده

- در جلسه قبل دیدیم که هامیلتونی نوسانگر هارمونیک ساده به صورت زیر نوشته می شود:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

هرچند، در ادامه کار دیدیم که با معرفی عملگرهای افزایشنده و کاهشنده (خلق و فنا) می توان مساله نوسانگر را به سادگی حل کرد:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right) \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right)$$

از دو رابطه بالا می توان به سادگی عملگرهای موقعیت و تکانه را برحسب عملگرهای خلق و فنا یافت:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (-a + a^\dagger)$$

- پیشتر در درس ”معادله حرکت هایزنبرگ و قضیه اهرنفست” از مجموعه ”دینامیک سیستم های کوانتومی” تحول نوسانگر هارمونیک ساده را بررسی کرده ایم. این مساله از لحاظ عملی و آموزشی اهمیت بسیار زیادی دارد. بنابراین، دوباره از دو جهت متفاوت آن را در نظر خواهیم گرفت. هدف ما بیشتر معرفی روش های متفاوت برای مطالعه تحول زمانی یک سیستم کوانتومی است.

تحول زمانی نوسانگر هارمونیک ساده

- این محاسبات همگی در تصویر هایزنبرگ انجام می شوند. بنابراین عملگرهای مورد نظر ما (مانند a, p, x و $a^\dagger$) وابسته به زمان هستند؛ هرچند در برخی روابط این موضوع به وضوح نیامده است.

- معادله حرکت هایزنبرگ را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dt}A^{(H)}(t) = \frac{1}{i\hbar} [A^{(H)}, H]$$

با استفاده از این معادله می توان تحول زمانی موقعیت و تکانه را به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$$

این یک دستگاه معادلات جفت شده است که پیشتر در درس ”معادله حرکت هایزنبرگ و قضیه اهرنفست” حل شده است. ولی معادلات تحول عملگرهای نردبانی جفت شده نیستند و به سادگی حل می شوند:

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{m} - i\omega x \right) = -i\omega a \quad \Rightarrow \quad a(t) = a(0) \exp(-i\omega t)$$

$$\frac{da^\dagger}{dt} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{m} + i\omega x \right) = i\omega a^\dagger \quad \Rightarrow \quad a^\dagger(t) = a^\dagger(0) \exp(i\omega t)$$

- تمرین: با استفاده از معادلات بالا نشان دهید که عملگرهای شمارش $N = a^\dagger a$ و هامیلتونی در تصویر هایزنبرگ مستقل از زمان هستند.

تحول زمانی نوسانگر هارمونیک ساده

- حال با بازگشت به عملگرهای موقعیت و تکانه می توان نوشت:

$$x(t) + \frac{ip(t)}{m\omega} = x(0) \exp(-i\omega t) + i \left[\frac{p(0)}{m\omega} \right] \exp(-i\omega t),$$

$$x(t) - \frac{ip(t)}{m\omega} = x(0) \exp(i\omega t) - i \left[\frac{p(0)}{m\omega} \right] \exp(i\omega t).$$

- تمرین: از فرمول اوایلر $\exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ استفاده کرده و بخش های هرمیتی و پادهرمیتی معادلات بالا را بیابید. نشان دهید که عملگرهای موقعیت و تکانه به صورت زیر با زمان تغییر می کنند:

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \left[\frac{p(0)}{m\omega} \right] \sin \omega t$$

$$p(t) = -m\omega x(0) \sin \omega t + p(0) \cos \omega t.$$

دقت کنید که پیشتر این معادلات را با حل مستقیم دستگاه معادلات جفت شده موقعیت و تکانه به دست آورده ایم و دو جواب با هم توافق دارند.

- تمرین: جواب های بالا را با جواب های نوسانگر کلاسیک مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟ به مجموعه درس حالت های همدوس مراجعه کنید.

تحول زمانی عملگرهای موقعیت و تکانه در تصویر هایزنبرگ: لم بیکر-هاسدورف

- به دلایل آموزشی مساله تحول زمانی سیستم نوسانگر را به طریق دیگری نیز حل خواهیم کرد. این روش بر لم بیکر-هاسدورف استوار است و در ابتدا ممکن است پیچیدگی آن غیرضرور به نظر آید. هرچند، این روش در محاسبات مدرن و تحقیقات روز به وفور خود را نشان می دهد.
- در واقع می خواهیم عملگر زیر را محاسبه کنیم:

$$x(t) = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right) x(0) \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right)$$

و برای این کار از لم بیکر-هاسدورف استفاده می کنیم که اثبات آن در بخش بعد خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \exp(iG\lambda)A\exp(-iG\lambda) &= A + i\lambda [G,A] + \left(\frac{i^2\lambda^2}{2!}\right) [G,[G,A]] + \\ &\dots + \left(\frac{i^n\lambda^n}{n!}\right) [G,[G,[G,\dots[G,A]]]\dots] + \dots \end{aligned}$$

در اینجا G یک عملگر هرمیتی و λ یک پارامتر حقیقی است.

تحول زمانی عملگرهای موقعیت و تکانه در تصویر هایزنبرگ: لم بیکر-هاسدورف

● با به کار بستن لم بیکر-هاسدورف در رابطه تحول زمانی عملگر موقعیت در تصویر هایزنبرگ داریم:

$$\exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)x(0)\exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right)$$

$$= x(0) + \left(\frac{it}{\hbar}\right)[H, x(0)] + \left(\frac{i^2 t^2}{2! \hbar^2}\right)[H, [H, x(0)]] + \dots$$

پس از محاسبه چند جمله از جملات در سمت راست رابطه بالا متوجه می شویم که با استفاده از دو جابجاگر

$$[H, p(0)] = i\hbar m \omega^2 x(0) \quad [H, x(0)] = \frac{-i\hbar p(0)}{m}$$

می توان همه جملات بسط را محاسبه کرد. همچنین باید از بسط توابع سینوس و کسینوس به صورت زیر نیز استفاده کنیم.

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

تحول زمانی عملگرهای موقعیت و تکانه در تصویر هایزنبرگ: لم بیکر-هاسدورف

- با مرتب نویسی جملات می توانیم تحول زمانی عملگر موقعیت را به صورت زیر بیابیم:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right) x(0) \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) &= x(0) + \left[\frac{p(0)}{m}\right] t - \left(\frac{1}{2!}\right) t^2 \omega^2 x(0) \\ &\quad - \left(\frac{1}{3!}\right) \frac{t^3 \omega^2 p(0)}{m} + \dots \\ &= x(0) \cos \omega t + \left[\frac{p(0)}{m\omega}\right] \sin \omega t, \end{aligned}$$

دقت کنید که نتیجه به دست آمده با نتایجی که به دو روش سابق به دست آمدند توافق دارد.

- تمرین: به همین ترتیب تحول زمانی عملگر تکانه را بیابید و با نتایج قبلی مقایسه کنید.

روش اول اثبات لم بیکر-کمپل-هاسدورف

• لم بیکر-کمپل-هاسدورف را در نظر بگیرید.

$$e^{iG\lambda} A e^{-iG\lambda} = A + i\lambda [G, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [G, [G, A]] + \dots + \frac{(i\lambda)^n}{n!} \underbrace{[G, [G, [G, \dots [G, A]]]]}_{n \text{ times}} \dots$$

برای اثبات این لم ما از بسط تابع نمایی استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} e^{iG\lambda} A e^{-iG\lambda} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(iG\lambda)^p}{p!} A \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-iG\lambda)^q}{q!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{(i\lambda)^{p+q}}{p!q!} G^p A G^q \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^s (-1)^d \frac{(i\lambda)^s}{d!(s-d)!} G^{s-d} A G^d \\ &= A + i\lambda [G, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [G, [G, A]] + \dots + \frac{(i\lambda)^n}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} G^{n-k} A G^k + \dots \end{aligned}$$

پس در واقع باید درستی رابطه زیر را نشان دهیم.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} G^{n-k} A G^k = \underbrace{[G, [G, [G, \dots [G, A]]]]}_{n \text{ times}} \dots \quad *$$

برای انجام این کار از روش استقرا استفاده خواهیم کرد. یعنی فرض می کنیم که رابطه بالا درست است و درستی رابطه برای $n+1$ را نشان خواهیم داد.

روش اول اثبات لم بیکر-هاسدورف

توجه کنید که می توان نوشت:

$$\underbrace{[G, [G, [G, \dots [G, A]]]] \dots]}_{n+1 \text{ times}} = \underbrace{[G, [G, [G, \dots [G, [G, A]]]] \dots]}_{n \text{ times}}$$

در نتیجه با توجه به رابطه * اسلاید قبل داریم:

$$\begin{aligned} \underbrace{[G, [G, [G, \dots [G, A]]]] \dots]}_{n+1 \text{ times}} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} G^{n-k} (GA - AG) G^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} G^{n+1-k} AG^k - \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} G^{n-k} AG^{k+1} \\ &= G^{n+1} A + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} G^{n+1-k} AG^k - \sum_{k'=1}^n (-1)^{k'-1} \binom{n}{k'-1} G^{n+1-k'} AG^{k'} \\ &\quad + (-1)^{n+1} AG^{n+1} \quad ** \end{aligned}$$

توجه کنید که در سطر آخر، جمله اول از سری اول و جمله آخر از سری دوم را به صورت جداگانه نوشته ایم. در این حالت می توان دو سری موجود را با هم جمع کرد.

روش اول اثبات لم بیکر-هاسدورف

- حال از رابطه زیر استفاده کرده

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

و می نویسیم:

$$\begin{aligned} ** &= G^{n+1}A + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n+1}{k} G^{n+1-k} A G^k + (-1)^{n+1} A G^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} G^{n+1-k} A G^k \end{aligned}$$

بنابراین درستی رابطه برای n را فرض کرده و درستی لم در حالت $n+1$ را نشان دادیم.

- منبع: math.stackexchange.com

- بهتر است از نامگذاری بیکر-کمپبل-هاسدورف (Baker – Campbell – Hausdorff) برای این لم استفاده شود.

- در ادامه اثبات دیگری برای این لم آمده است.

روش دوم اثبات لم بیکر-هاسدورف

● فرض کنید $f(i\lambda) = e^{iG\lambda} A e^{-iG\lambda}$ آنگاه بسط تیلور این تابع به صورت زیر نوشته می شود:

$$f(i\lambda) = f(0) + i\lambda f'(0) + \frac{(i\lambda)^2}{2} f''(0) + \dots + \frac{(i\lambda)^n}{n!} f^n(0) + \dots$$

برای جمله شماره ۱ بسط داریم:

$$\begin{aligned} f'(i\lambda) &= \frac{d}{d(i\lambda)} (e^{iG\lambda}) A e^{-iG\lambda} + e^{iG\lambda} A \frac{d}{d(i\lambda)} (e^{-iG\lambda}) \\ &= e^{iG\lambda} G A e^{-iG\lambda} - e^{iG\lambda} A G e^{-iG\lambda} = e^{iG\lambda} [G, A] e^{-iG\lambda} \end{aligned}$$

در نتیجه در $\lambda = 0$ داریم $f'(0) = [G, A]$ و در نتیجه درستی جمله شماره ۱ معلوم می شود.
حال فرض کنید برای جمله شماره n داریم:

$$f^n(i\lambda) = e^{iG\lambda} \underbrace{[G, \dots, [G, A] \dots]}_{n \text{ times}} e^{-iG\lambda}$$

در نتیجه برای جمله بعدی می توان نوشت:

$$f^{n+1}(i\lambda) = \frac{d}{d(i\lambda)} (e^{iG\lambda}) \underbrace{[G, \dots, [G, A] \dots]}_{n \text{ times}} e^{-iG\lambda} + e^{iG\lambda} \underbrace{[G, \dots, [G, A] \dots]}_{n \text{ times}} \frac{d}{d(i\lambda)} (e^{-iG\lambda})$$

روش دوم اثبات لم بیکر-هاسدورف

● جمله اخیر را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f^{n+1}(i\lambda) = e^{iG\lambda} G \underbrace{[G, \dots, [G, A] \dots]}_{n \text{ times}} e^{-iG\lambda} - e^{iG\lambda} \underbrace{[G, \dots, [G, A] \dots]}_{n \text{ times}} G e^{-iG\lambda}$$

$$= e^{iG\lambda} \underbrace{[G, \dots, [G, A] \dots]}_{n+1 \text{ times}} e^{-iG\lambda}$$

در نتیجه در $\lambda = 0$ داریم

$$f^{n+1}(0) = \underbrace{[G, \dots, [G, A] \dots]}_{n+1 \text{ times}}$$

پس درستی لم بیکر-هاسدورف به روش استقرا اثبات می شود:

$$e^{iG\lambda} A e^{-iG\lambda} = A + i\lambda [G, A] - \frac{(i\lambda)^2}{2} [G, [G, A]] + \dots - \frac{(i\lambda)^n}{n!} \underbrace{[G, \dots, [G, A] \dots]}_{n \text{ times}} + \dots$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم تحول زمانی نوسانگر کوانتومی و بسط بیکر-هاسدورف را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

دو روش به کار رفته برای پیدا کردن تحول زمانی سیستم نوسانگر را توضیح دهید.

وابستگی زمانی عملگرهای موقعیت و تکانه در سیستم نوسانگر چگونه است.

بسط بیکر-کمپیل-هاسدورف را بنویسید.

درباره صورت های دیگر بسط بیکر-کمپیل-هاسدورف، به ویژه شکل انتگرالی آن، تحقیق کنید.

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

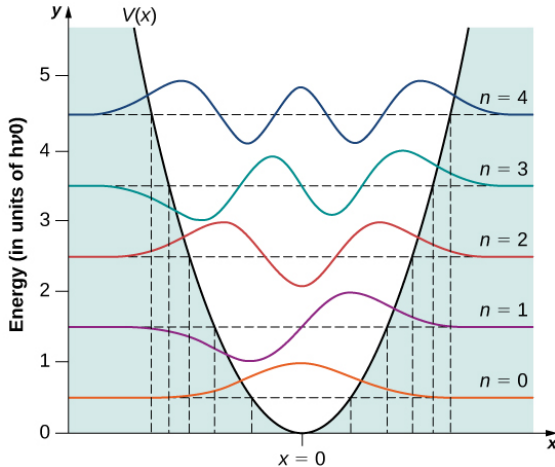


تمرین

- مسائل موجود در متن درس را حل کنید.

مبحث بعدی: حل معادله شرودینگر برای نوسانگر هارمونیک ساده

در جلسه بعد با حل معادله شرودینگر برای نوسانگر هارمونیک ساده آشنا خواهیم شد.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما

