

دینامیک سیستم های کوانتومی

کت های پایه و دامنه گذار در مکانیک کوانتومی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- کت های پایه و دامنه گذار در مکانیک کوانتومی
- کت های پایه در تصویر شرودینگر و هایزنبرگ
- تحول زمانی دامنه گذار

- کت های پایه در تصویر شرودینگر و هایزنبرگ
- تحول زمانی دامنه گذار

تحول کت های پایه

• برخی اوقات گفته می شود که همه کت ها در تصویر شرودینگر با زمان تحول پیدا می کنند و در تصویر هایزنبرگ ثابت اند. ولی این ادعا درست نیست و رفتار "کت های پایه" متفاوت است. این موضوع را در جلسه امروز بررسی خواهیم کرد.

• پیشتر آموختیم که می توان از ویژه کت های مشاهده پذیرها به عنوان کت های پایه استفاده کرد. حال این سوال را مطرح می کنیم که رابطه اساسی ویژه مقداری

$$A |a_i\rangle = a_i |a_i\rangle \quad *$$

چطور با زمان تغییر می کند؟

• در تصویر شرودینگر مشاهده پذیر A با زمان تغییر نمی کند. در نتیجه کت های پایه ای که از رابطه بالا به دست می آیند نیز در زمان ثابت (پایا) هستند. نتیجه:

• در تصویر شرودینگر کت های حالت با زمان تغییر می کنند ولی کت های پایه با زمان تغییر نمی کنند.

• از طرف دیگر، در تصویر هایزنبرگ رابطه $A^{(H)} = U^\dagger A^{(\circ)} U$ را برای تحول زمانی عملگرها داریم. حالا معادله $*$ را از سمت چپ در $U^\dagger$ ضرب و به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$U^\dagger A^{(\circ)} U U^\dagger |a_i\rangle = a_i U^\dagger |a_i\rangle \quad \Rightarrow \quad A^{(H)} (U^\dagger |a_i\rangle) = a_i (U^\dagger |a_i\rangle) \quad **$$

• بنا به معادله بالا، بردارهای $|a_i, t\rangle_H = U^\dagger |a_i\rangle$ کت های پایه عملگر $A^{(H)}$ در تصویر هایزنبرگ

هستند.

تحول کت های پایه

- فرض کنید $\mathcal{U}(t) = \exp(-iHt/\hbar)$ و بنابراین $\mathcal{U}^\dagger(t) = \exp(iHt/\hbar)$. در نتیجه با توجه به رابطه $|a_i, t\rangle_H = \mathcal{U}^\dagger |a_i\rangle$ می فهمیم که دوران کت های پایه در تصویر هایزنبرگ در جهت عکس نسبت به دوران کت های حالت در تصویر شرودینگر است. در واقع می توان نشان داد که معادله شرودینگر حاکم بر تحول کت های پایه در تصویر هایزنبرگ علامت متفاوتی با معادله شرودینگر در تصویر شرودینگر دارد:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a_i, t\rangle_H = -H |a_i, t\rangle_H$$
 تمرین: درستی رابطه بالا را نشان دهید.

- از معادله ** واضح است که ویژه مقادیر با زمان تغییر نمی کنند. البته با توجه به بحثی که قبلاً درباره "مشاهده پذیرهای یکانی-همسان" در درس "تغییر پایه های فضا در مکانیک کوانتومی" داشته ایم، انتظار این نتیجه می رفت.

- پرسش: مشاهده پذیر A در تصویر هایزنبرگ و برحسب کت های پایه چطور نوشته می شود؟ پاسخ:

$$A^{(H)} = \sum_i |a_i, t\rangle_H a_i \langle a_i, t|$$

که البته معادل با همان تعریف سابق برای مشاهده پذیر A در تصویر هایزنبرگ است، زیرا

$$\begin{aligned} A^{(H)} &= \sum_{a_i} |a_i, t\rangle_H a_i \langle a_i, t| = \sum_{a_i} \mathcal{U}^\dagger |a_i\rangle a_i \langle a_i| \mathcal{U} \\ &= \mathcal{U}^\dagger \left(\sum_{a_i} |a_i\rangle a_i \langle a_i| \right) \mathcal{U} = \mathcal{U}^\dagger A^{(S)} \mathcal{U} \end{aligned}$$

ضرایب بسط در تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ

دقت کنید که ضرایب بسط در تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ کاملاً با هم برابر هستند:

$$c_{a'}(t) = \underbrace{\langle a' |}_{\text{base bra}} \cdot \underbrace{(\mathcal{U} | \alpha, t_0 = 0 \rangle)}_{\text{state ket}} \quad (\text{the Schrödinger picture})$$

$$c_{a'}(t) = \underbrace{(\langle a' | \mathcal{U})}_{\text{base bra}} \cdot \underbrace{| \alpha, t_0 = 0 \rangle}_{\text{state ket}} \quad (\text{the Heisenberg picture}).$$

از لحاظ هندسی، در تصویر شرودینگر ما کت حالت را به صورت پادساعتگرد دوران داده و کت های پایه را بدون تغییر نگه داشته ایم. از طرفی در تصویر هایزنبرگ، کت حالت بدون تغییر است ولی کت های پایه به صورت ساعتگرد دوران می یابند. برابری بالا به این معناست که کسینوس زاویه بین دو بردار حالت در هر دو مورد یکسان اند.

همین نتایج را می توان برای کت های پایه با طیف پیوسته هم به دست آورد. مثلاً برای تابع

موج در فضای موقعیت $\langle \vec{r}' | \alpha \rangle$ می توان دو تفسیر ارائه کرد:
 ۱ در تفسیر شرودینگر، کمیت $\langle \vec{r}' | \alpha \rangle$ به معنی ضرب داخلی برا bra ی پایه و ثابت در زمان موقعیت در کت حالت در حال تحول $|\alpha\rangle$ است.

۲ در تفسیر هایزنبرگ، کمیت $\langle \vec{r}' | \alpha \rangle$ به معنی ضرب داخلی برا bra ی پایه و در حال تحول موقعیت در کت پایای (ثابت) $|\alpha\rangle$ است.

مساله نوسانگر هامونیک را ببینید.

تحول زمانی دامنه گذار

- در مبحث انتگرال مسیر فاینمن، شناخت دامنه گذار و تحول آن اهمیت اساسی خواهد داشت. بنابراین در اینجا این مساله را بررسی خواهیم کرد.
- فرض کنید که سیستم در ابتدا در یکی از ویژه حالت های عملگر A با ویژه مقدار a' قرار دارد. حال سوال ما این است که دامنه احتمال حضور این ذره در زمان t در ویژه حالت $|b'\rangle$ از عملگر B چقدر است؟ این دامنه را دامنه گذار (transition amplitude) می نامند.
- دقت کنید که عملگرهای A و B می توانند برابر و یا نابرابر باشند.

۱ در تصویر شرودینگر کت حالت سیستم با زمان به صورت $\mathcal{U}|a'\rangle$ تحول پیدا می کند در حالی که کت های پایه $|a'\rangle$ و $|b'\rangle$ در زمان ثابتند. بنابراین دامنه گذار به صورت زیر نوشته می شود:

$$\underbrace{\langle b'|}_{\text{base bra}} \cdot \underbrace{(\mathcal{U}|a'\rangle)}_{\text{state ket}}$$

۲ در تصویر هایزنبرگ کت حالت سیستم با زمان تغییر نمی کند در حالی که کت های پایه $|a'\rangle$ در جهت معکوس تحول زمانی پیدا می کنند. بنابراین دامنه گذار به صورت زیر نوشته می شود:

$$\underbrace{(\langle b'|\mathcal{U})}_{\text{base bra}} \cdot \underbrace{|a'\rangle}_{\text{state ket}}$$

واضح است که هر دو عبارت برابرند: $\langle b'|\mathcal{U}(t,0)|a'\rangle$

جمع بندی نتایج این جلسه

- نتایج این جلسه را می توان در جدول زیر از کتاب ساکورایی جمع بندی کرد:

Table 2.1 The Schrödinger Picture Versus the Heisenberg Picture		
	Schrödinger picture	Heisenberg picture
State ket	Moving: (2.5), (2.27)	Stationary
Observable	Stationary	Moving: (2.84), (2.93)
Base ket	Stationary	Moving oppositely: (2.115), (2.116)

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم کت های پایه و دامنه گذار در مکانیک کوانتومی را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

- اختلاف در تحول کت های حالت در تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ را توضیح دهید.
 - اختلاف در تحول کت های پایه در تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ را توضیح دهید.
 - معادله شرودینگر برای تحول کت های پایه در تصویر هایزنبرگ را بنویسید.
 - آیا تحول زمانی دامنه گذار در تصویر شرودینگر با این کمیت در تصویر هایزنبرگ متفاوت است؟ چرا؟
- اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

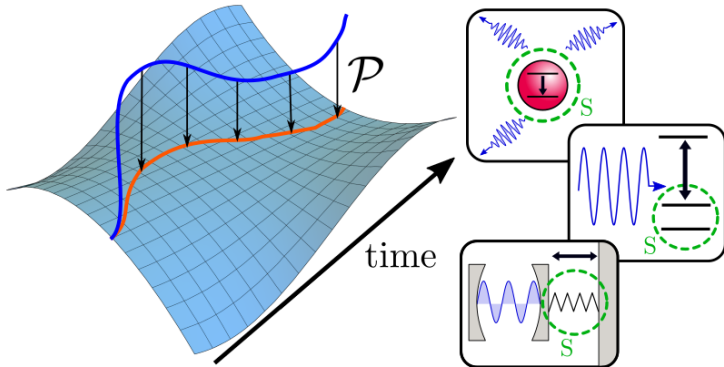


تمرین

● این جلسه تمرین نداریم.

مبحث بعدی: مسائل پیشرفته در تحول زمانی سیستم های کوانتومی

- احتمالا در آینده برخی مسائل پیشرفته تر در مبحث تحول زمانی سیستم های کوانتومی به این مجموعه اضافه خواهند شد.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما

