

فیزیک مکانیک

فصل نهم: سیستم های ذرات، مرکز جرم و تکانه خطی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

- ۱ فصل نهم: سیستم های ذرات، مرکز جرم و تکانه خطی
- مرکز جرم
- قانون دوم نیوتن برای مجموعه ای از ذرات
- تکانه خطی

آنچه گذشت...

- قوانین حرکت:
یکی از راه های نوشتن قوانین حرکت، استفاده از سه قانون حرکت نیوتن است. این شکل از علم مکانیک کلاسیک را مکانیک نیوتنی می نامند. نوشتن قوانین مکانیک به شکل های دیگر، مانند مکانیک لاگرانژی، هامیلتونی و ... هم ممکن است.
ما در این کتاب مکانیک نیوتنی را بررسی خواهیم کرد.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

قانون کولن برای دو بار نقطه ای:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

قانون هوک برای جرم متصل به فنر

$$F = -kx$$

نیروی عمودی سطح، کشش نخ، نیروی ارشمیدس و ...

این دو دسته قانون، طیف بسیار گسترده ای از پدیده های فیزیکی را به درستی توضیح می دهند.

قانون اول: وقتی برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد، جسم حالت حرکت خود را حفظ خواهد کرد. یعنی اگر ساکن باشد، ساکن خواهد ماند و اگر با سرعت در حال حرکت باشد، با همان سرعت به حرکت خود ادامه خواهد داد.

قانون دوم: رابطه شتاب و نیرو

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

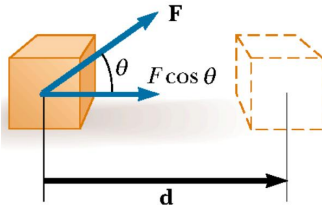
قانون سوم نیوتن: هر عملی را عکس العملی است، با مقدار مساوی و در جهت خلاف آن

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

قوانین نیوتن فقط در دستگاه های لخت برقرار هستند.

پرسش: تاکنون قوانین مکانیک را برای یک تک ذره نوشته ایم. آیا می توان این قوانین را برای سیستم های ذره نیز نوشت؟

کار، انرژی جنبشی و قضیه کار-انرژی جنبشی



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

انرژی جنبشی: اگر جسمی به جرم m با سرعت v در حال حرکت باشد، انرژی جنبشی آن برابر است با

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

کار نیروی ثابت: اگر نیروی "ثابت" $\vec{F}$ در مسیری به طول d بر جسم وارد شود، آنگاه کار (Work) انجام شده توسط نیروی ثابت برابر است با

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{F} = F d \cos \theta$$

لطفا مفهوم ضرب داخلی (اسکالر) دو بردار را از فصل سوم مرور کنید.

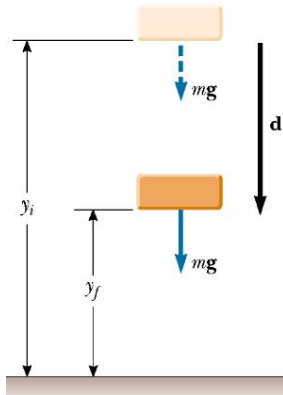
کار نیروی متغیر تعمیمی از کار نیروی ثابت است:

$$W = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N F_{x,i} \Delta x \equiv \int F(x) dx$$

قضیه کار-انرژی جنبشی: تغییر در انرژی جنبشی یک جسم بر روی یک مسیر مشخص برابر است با کار کل انجام شده توسط همه نیروهای عمل کننده بر جسم:

$$W_t = \sum W_i = \Delta K = K_f - K_i$$

نیروهای پایستار، انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی مکانیکی



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

نیروهای پایستار: نیروهایی که کار انجام شده توسط آنها به مسیر ربطی ندارد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی ربط دارد را نیروهای پایستار می نامیم.

مثال هایی از نیروهای پایستار: نیروی گرانش، نیروی فنر، نیروی کولن و ...

نیروهای ناپایستار: نیروهایی هستند که کار انجام شده توسط آنها به مسیر ربط دارد. برای چنین نیروهایی نمی توان انرژی پتانسیل تعریف کرد زیرا مقدار آن یکتا نخواهد بود.

مثالی هایی از نیروهای ناپایستار: نیروی اصطکاک، نیروهای وابسته به سرعت و ...

قضیه: کار کل انجام شده توسط یک نیروی پایستار در یک مسیر بسته برابر صفر است.

اگر نیروی پایستار F_x بر یک جسم وارد شود و جسم از موقعیت x_i به نقطه x_f منتقل شود، آنگاه تغییر در انرژی پتانسیل جسم برابر است با منفی کار انجام شده توسط نیروی F_x و یا

$$\Delta U = -W = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

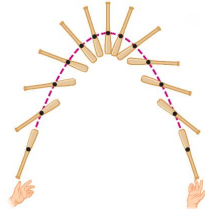
منظور از اختلاف در انرژی پتانسیل $\Delta U \equiv U_f - U_i$ می باشد.

در یک سیستم بسته که فقط نیروهای پایستار باعث تبدیل انرژی می شوند، مجموع انرژی های جنبشی و پتانسیل ثابت است. این مجموع را انرژی

مکانیکی می نامند:

$$E_{mech} = K + U = cte$$

هدف ما در ادامه: بررسی سیستم های ذرات و مشخصا بررسی اجسام صلب



شکل ها از ویرایش دهم مبانی
فیزیک هالیدی و نت.

۱ تاکنون فقط حرکت یک تک ذره را در نظر گرفته ایم. در ادامه می خواهیم حرکت سیستم های ذرات را بررسی کنیم. برای اینکار باید با مفاهیم زیر آشنا شویم:

- مرکز جرم
- قانون دوم نیوتن برای مجموعه ای از ذرات
- تکانه خطی، برخورد و ضربه
- پایداری تکانه خطی
- تکانه و انرژی جنبشی در برخورد؛ برخوردهای کشسان و ناکشسان
- سیستم های با جرم متغیر

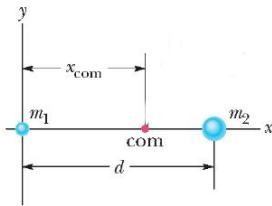
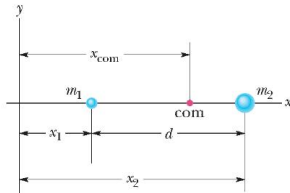
۲ اگر سیستم ذره مورد نظر صلب محسوب شود (یعنی فاصله ذرات تشکیل دهنده آن در طی حرکت تغییری نکند) آنگاه می توان حرکت خطی و دورانی سیستم را به راحتی تعمیم داد:

• اجسام صلب و قانون دوم نیوتن برای دوران اجسام صلب

۳ شاره ها



چگونه مرکز جرم را بیابیم؟



اهمیت مرکز جرم: بنا به قضیه ای که در ادامه درس اثبات خواهیم کرد، نیروی کل خارجی وارده بر یک سیستم ذره برابر است با حاصلضرب جرم سیستم در شتاب "مرکز جرم". این قضیه اهمیت بنیادی به مفهوم مرکز جرم می دهد.

ایده مرکز جرم بسیار شبیه به ایده پیدا کردن میانگین نمرات است:

$$\frac{3 \times 14.5 + 1 \times 17.0 + 3 \times 12.75 + 2 \times 15.25 + 3 \times 17.5}{3 + 1 + 3 + 2 + 3} = ?$$

میانگین نمرات عبارت است از مجموع تعداد واحد هر درس ضربدر نمره آن درس تقسیم بر مجموع واحدها.

مرکز جرم (center of mass) یک سیستم دو جرمی:

$$x_{com} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

اگر دستگاه مختصات را عوض کنیم، مکان مرکز جرم عوض می شود؛ مثلاً در دستگاه مختصات شکل پایین داریم:

$$x_{com} = \frac{m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

هرچند، نکته مهم این است که فاصله نسبی مرکز جرم تا هرکدام از ذرات ربطی به دستگاه مختصات ندارد.

تمرین: نشان دهید که فاصله مرکز جرم تا هرکدام از ذرات، یعنی $x_1 - x_{com}$ و $x_2 - x_{com}$ در هرکدام از دو شکل روبه رو ثابت است.

شکل ها از ویرایش دهم مبانی فیزیک هالیدی.

تعمیم به سیستم های چند ذره ای

برای سیستم های چند ذره ای می توانیم تعریف مرکز جرم را به صورت زیر تعمیم دهیم:

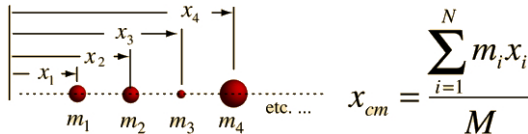
$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$$x_{com} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i \quad \text{و یا}$$

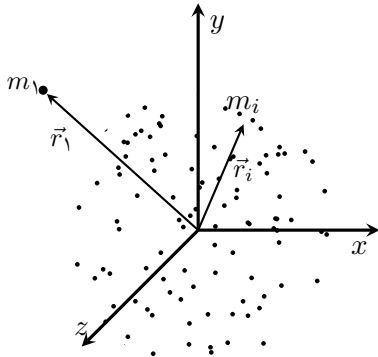
در اینجا، m_i جرم ذره i ام است که در موقعیت x_i قرار دارد. همچنین، N تعداد ذرات سیستم و $M = \sum_{i=1}^N m_i$ جرم کل سیستم است.

مرکز جرم، بنا به تعریفش، به جسم سنگین تر نزدیک تر خواهد بود.

شکل از *hyperphysics*.



تعمیم به سیستم های چند ذره ای سه بعدی



برای سیستم های چند ذره ای، که در هر سه جهت فضایی گسترده شده اند، نیز می توان ایده بالا را به راحتی تعمیم داد:

$$x_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

$$y_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i$$

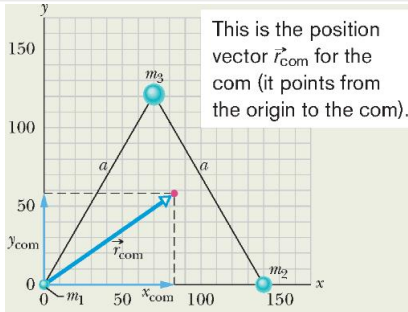
$$z_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i$$

و یا به صورت خلاصه:

$$\vec{r}_{com} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

در اینجا، m_i جرم ذره i ام است که در موقعیت $\vec{r}_i$ قرار دارد. همچنین، N تعداد ذرات سیستم و $M = \sum_{i=1}^N m_i$ جرم کل سیستم است.

مثال: مرکز جرم یک سیستم ذره



مرکز جرم شکل مقابل را ببینید.

$$m_1 = 1.2 \text{ kg} \quad m_2 = 2.5 \text{ kg} \quad m_3 = 3.4 \text{ kg}$$

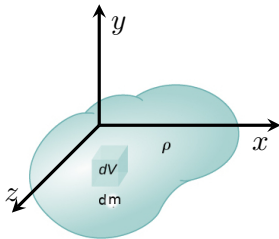
شکل ها از فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

پاسخ:

$$\begin{aligned} x_{com} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} \\ &= \frac{(1.2 \text{ kg})(0) + (2.5 \text{ kg})(140 \text{ cm}) + (3.4 \text{ kg})(70 \text{ cm})}{7.1 \text{ kg}} \\ &= 83 \text{ cm} \quad (\text{Answer}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{and } y_{com} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} \\ &= \frac{(1.2 \text{ kg})(0) + (2.5 \text{ kg})(0) + (3.4 \text{ kg})(120 \text{ cm})}{7.1 \text{ kg}} \\ &= 58 \text{ cm.} \quad (\text{Answer}) \end{aligned}$$

تعمیم به سیستم های چند ذره ای سه بعدی



برای پیدا کردن مرکز جرم محیط های پیوسته، می توان این محیط ها را به اجزاء بسیار کوچک جرم Δm_i (المان و یا *element*) تجزیه کرده و هرکدام از این اجزاء را به عنوان یک ذره مجزا در نظر گرفت. در این حالت باز هم مرکز جرم از رابطه بالا به دست خواهد آمد:

$$\vec{r}_{com} \simeq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{r}_i$$

در حالت حدی، وقتی Δm_i فوق العاده کوچک باشد، و یا تعداد المان ها بسیار زیاد باشد $N \rightarrow \infty$ ، جمع بندی بالا به انتگرال تبدیل می شود:

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M} \int \vec{r}_i dm$$

$$M = \int dm \quad \text{که در آن}$$

جرم کل سیستم است.

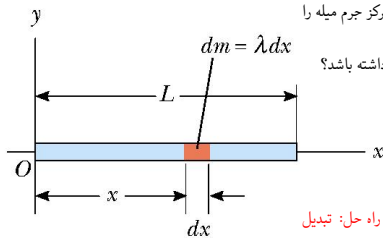
دقت کنید که برای محاسبه این انتگرال، باید سه انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$x_{com} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$y_{com} = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$z_{com} = \frac{1}{M} \int z dm$$

مرکز جرم یک میله همگن



فرض کنید که جرم M یک میله به طول L به صورت همگن پخش شده است. مرکز جرم میله را بیابید.

پیش از حل سوال، از خودتان بپرسید که مرکز جرم علی الاصول باید در کجا قرار داشته باشد؟ چون میله فقط یک بعد دارد، کافی است که انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$x_{com} = \frac{1}{M} \int x dm$$

به عبارت دیگر $y_{com} = 0$ و $z_{com} = 0$.
در حل این انتگرال، یک مشکل اساسی داریم: دو متغیر در یک انتگرال یگانه!! راه حل: تبدیل یکی از متغیرها به دیگری.

باید مقدار المان جرم dm را بیابیم. برای اینکار از "تناسب" زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{M}{L} = \frac{dm}{dx} \Rightarrow dm = dx \frac{M}{L}$$

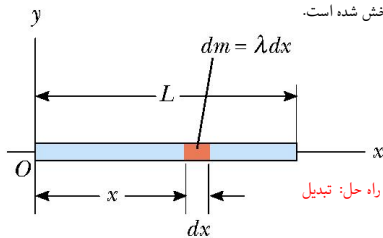
حال مرکز جرم برابر است با:

$$\begin{aligned} x_{com} &= \frac{1}{M} \int_0^L x dm = \frac{1}{M} \frac{M}{L} \int_0^L x dx = \frac{1}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{L^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

همانطور که انتظار داشتیم، مرکز جرم میله همگن در مرکز آن است.

شکل از ویرایش هشتم میانی
فیزیک هالیدی.

مرکز جرم یک میله ناهمگن



فرض کنید که جرم M یک میله به طول L به صورت ناهمگن $\frac{dm}{dx} = \alpha x$ پخش شده است. مرکز جرم میله را بیابید.

چون میله فقط یک بعد دارد، کافی است که انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$x_{com} = \frac{1}{M} \int x dm$$

به عبارت دیگر $y_{com} = 0$ و $z_{com} = 0$.
در حل این انتگرال، یک مشکل اساسی داریم: دو متغیر در یک انتگرال یگانه!! راه حل: تبدیل یکی از متغیرها به دیگری.

باید مقدار المان جرم dm را بیابیم. برای اینکار داریم:

$$\frac{dm}{dx} = \alpha x \quad \Rightarrow \quad dm = \alpha x dx$$

از اینجا جرم کل میله برابر است با

$$M = \int dm = \int_0^L \alpha x dx = \alpha \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{\alpha L^2}{2}$$

حال مرکز جرم برابر است با:

$$\begin{aligned} x_{com} &= \frac{1}{M} \int_0^M x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \alpha x dx = \frac{\alpha}{M} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L \\ &= \frac{\alpha}{M} \left[\frac{L^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{\alpha}{\frac{\alpha L^2}{2}} \frac{L^3}{3} = \frac{2}{3} L \end{aligned}$$

شکل از ویرایش هشتم مبانی
فیزیک هالیدی.

با انواع توزیع جرم (خطی، سطحی و حجمی) بعداً بیشتر آشنا خواهیم شد.



توزیع خطی جرم: در این توزیع، جرم در یک جهت مشخص فضایی گسترده شده است و در دو جهت دیگر، ابعاد جسم بسیار کوچک است.

$$\bar{\lambda} = \frac{M}{L} \quad \text{چگالی خطی جرم متوسط:}$$

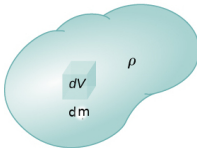
$$\lambda = \frac{dm}{dl} \quad \text{چگالی خطی جرم نقطه ای:}$$



توزیع سطحی جرم: در این توزیع، جرم در دو جهت مشخص فضایی گسترده شده است و در جهت دیگر، اندازه جسم بسیار کوچک است.

$$\bar{\sigma} = \frac{M}{A} \quad \text{چگالی سطحی جرم متوسط:}$$

$$\sigma = \frac{dm}{dA} \quad \text{چگالی سطحی جرم نقطه ای:}$$



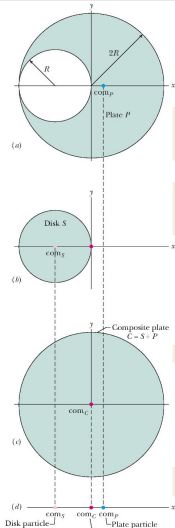
توزیع حجمی جرم: در این توزیع، جرم در هر سه جهت فضایی گسترده شده است.

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} \quad \text{چگالی حجمی جرم متوسط:}$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \text{چگالی حجمی جرم نقطه ای:}$$

با انواع این توزیع جرم، و نحوه استفاده از آنها، در فصل دهم بیشتر آشنا خواهیم شد.

مثالی دیگر



از یک صفحه دایره ای همگن به شعاع $2R$ دایره ای به شعاع R را جدا می کنیم. شکل مقابل را ببینید. مرکز جرم این سیستم را بیابید.

محاسبه مستقیم مرکز جرم این مساله بسیار مشکل است زیرا شامل محاسبه انتگرال های "دوگانه" با حدود کاملاً غیربدهی است. ما در اینجا از یک روش غیر مستقیم برای پیدا کردن مرکز جرم استفاده می کنیم.

فرض کنید قسمت تهی شده دایره اصلی را برگردانده ایم. در این صورت، یک دایره همگن داشته که مرکز جرم آن در مرکز مختصات خواهد بود.

$$x_{S+P} = \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_P = -x_S \frac{m_S}{m_P}$$

بنابراین برای پیدا کردن جواب، باید نسبت جرم های m_S/m_P را بیابیم. این نسبت برابر است با نسبت مساحت های دو قطعه:

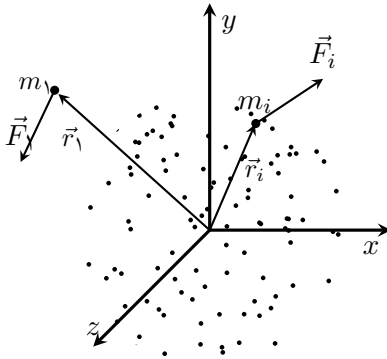
$$\frac{m_S}{m_P} = \frac{A_S}{A_P} = \frac{\pi R^2}{\pi (2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}$$

$$x_P = -x_S \frac{m_S}{m_P} = -(-R) \frac{m_S}{m_P} = \frac{R}{3}$$

بنابراین:

شکل ها از ویرایش دهم مبانی فیزیک هالیدی.

حرکت سیستم های ذره



tot : total

ext : external

قضیه: نیروی کل خارجی وارده به یک سیستم ذره برابر است با جرم کل سیستم ضربدر شتاب مرکز جرم:

$$\vec{F}_{tot, ext} = M \vec{a}_{com}$$

اثبات: از تعریف مرکز جرم داریم:

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \Rightarrow M \vec{r}_{com} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

و یا

$$M \vec{r}_{com} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N$$

در اینجا N تعداد ذرات سیستم و M جرم کل سیستم است.
حال با محاسبه مشتق زمانی معادله بالا داریم:

$$\frac{d}{dt} M \vec{r}_{com} = \frac{d}{dt} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N)$$

$$M \vec{v}_{com} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N$$

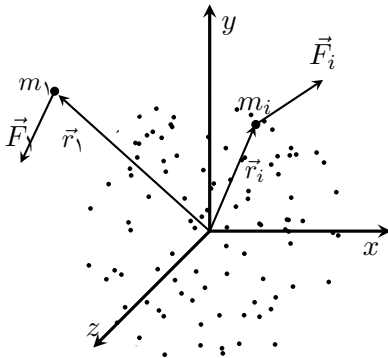
یعنی حاصلضرب جرم کل سیستم در سرعت مرکز جرم برابر است با مجموع حاصلضرب های جرم در سرعت تمام ذرات. حاصلضرب جرم در سرعت را

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

تکانه می نامند:

↓↓↓

حرکت سیستم های ذره



قضیه: نیروی کل خارجی وارده به یک سیستم ذره برابر است با جرم کل سیستم ضربدر شتاب مرکز جرم:

$$\vec{F}_{tot,ext} = M\vec{a}_{com}$$

ادامه اثبات: مشتق زمانی معادله اخیر را نیز محاسبه می کنیم:

$$\frac{d}{dt} M\vec{v}_{com} = \frac{d}{dt} (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_N\vec{v}_N)$$

$$M\vec{a}_{com} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots + m_N\vec{a}_N$$

$$M\vec{a}_{com} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$$

$$M\vec{a}_{com} = \vec{F}_{tot,ext} \quad \text{و یا}$$

پایان اثبات.

سوال: چرا نیروهای داخلی سهمی در معادله بالا ندارند؟

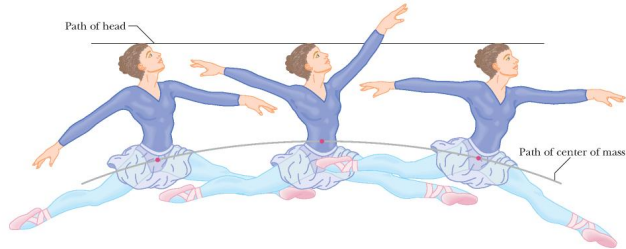
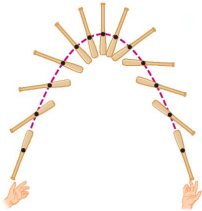
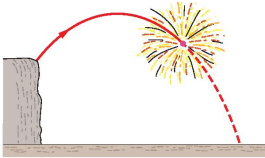
اهمیت قضیه

قضیه: نیروی کل خارجی وارده به یک سیستم ذره برابر است با جرم کل سیستم ضربدر شتاب مرکز جرم:

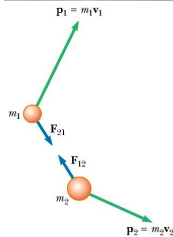
$$\vec{F}_{tot, ext} = M \vec{a}_{com}$$

اهمیت قضیه بالا در این نکته است که بررسی حرکت تک تک اجزاء سیستم ممکن است بسیار سخت (و حتی ناممکن) باشد؛ ولی همیشه می توان با محاسبه نیروهای خارجی وارد بر سیستم، که معمولاً سراسر است، حرکت مرکز جرم سیستم را محاسبه کرد.

شکل ها از مبانی فیزیک، ویرایش دهم.



مفهوم تکانه (اندازه حرکت)



حاصلضرب جرم جسم در سرعت آن را بردار تکانه خطی (*linear momentum*) و یا بردار اندازه حرکت خطی جسم می نامند:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

قانون دوم نیوتن برای یک ذره را می توان با استفاده از مفهوم تکانه به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

اگر جرم جسم ثابت باشد آنگاه رابطه بالا به شکل معمول قانون دوم نیوتن تبدیل می شود:

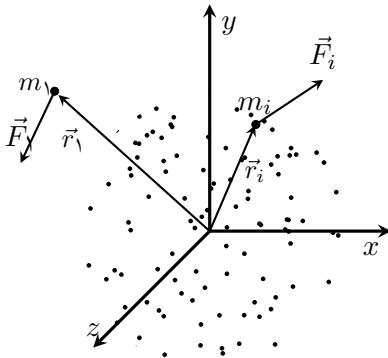
$$\sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v} = m \frac{d}{dt} \vec{v} = m\vec{a}$$

در همه مواردی که مکانیک نیوتنی آزموده شده است، رابطه $\sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$ برقرار بوده است (حتی برای سیستم های با جرم متغیر).

نکته تاریخی: نیوتن اولین بار قانون دوم را به صورت $\sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$ معرفی کرده است.

شکل ها مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش های هشتم و دهم.

بازنویسی معادله حرکت سیستم های ذره با استفاده از تکانه



قضیه: نیروی کل خارجی وارده به یک سیستم ذره برابر است با آهنگ تغییر در تکانه کل سیستم:

$$\vec{F}_{tot, ext} = \frac{d}{dt} \vec{P}$$

اثبات: از تعریف مرکز جرم داریم:

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \Rightarrow M \vec{r}_{com} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

و یا

$$M \vec{r}_{com} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N$$

در اینجا N تعداد ذرات سیستم و M جرم کل سیستم است.
حال با محاسبه مشتق زمانی معادله بالا داریم:

$$\frac{d}{dt} M \vec{r}_{com} = \frac{d}{dt} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N)$$

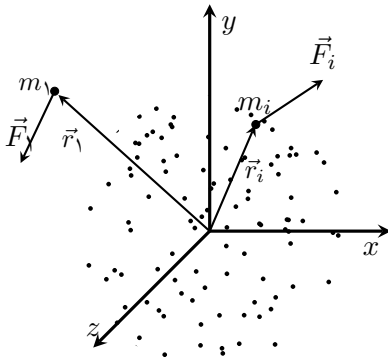
$$M \vec{v}_{com} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N$$

$$M \vec{v}_{com} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = \vec{P}$$

یعنی تکانه خطی کل سیستم برابر است با حاصلضرب جرم سیستم در سرعت مرکز جرم.

↓↓↓

بازنویسی معادله حرکت سیستم های ذره با استفاده از تکانه



قضیه: نیروی کل خارجی وارده به یک سیستم ذره برابر است با آهنگ تغییر در تکانه کل سیستم:

$$\vec{F}_{tot, ext} = \frac{d}{dt} \vec{P}$$

ادامه اثبات: مشتق زمانی معادله اخیر را نیز محاسبه می کنیم:

$$\frac{d}{dt} M \vec{v}_{com} = \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N) = \frac{d}{dt} \vec{P}$$

$$M \vec{a}_{com} = \frac{d}{dt} \vec{P} \quad \text{و یا}$$

از طرفی بنا به بحث قبل داریم:

$$M \vec{a}_{com} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_N \vec{a}_N$$

$$M \vec{a}_{com} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \vec{F}_{tot, ext}$$

$$\vec{F}_{tot, ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{بنابراین:}$$

پایان اثبات.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اساسی بحث مرکز جرم، حرکت سیستم های ذره و تکانه خطی را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

- ۱ مرکز جرم چیست؟
- ۲ مرکز جرم را چگونه می توان برای سیستم های گسسته پیدا کرد؟
- ۳ مرکز جرم را چگونه می توان برای سیستم های پیوسته پیدا کرد؟
- ۴ توزیع جرم های خطی، سطحی و حجمی را به صورت خلاصه توضیح دهید.
- ۵ نیروی کل خارجی وارده به یک سیستم چه ارتباطی به شتاب مرکز جرم دارد؟
- ۶ تکانه خطی چیست؟ تعریف آن را بنویسید.
- ۷ نیروی کل خارجی وارده به یک سیستم چه ارتباطی به تکانه خطی کل سیستم دارد؟

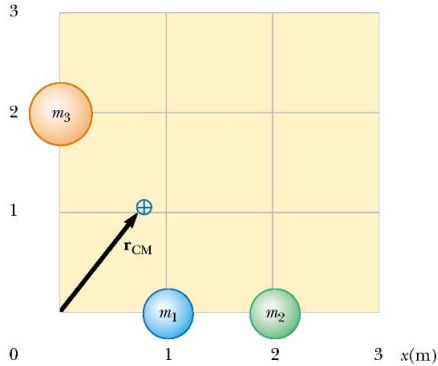
اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

$y(m)$



مرکز جرم شکل مقابل را بیابید.

$$m_1 = 1.0 \text{ kg} \quad m_2 = 1.0 \text{ kg} \quad m_3 = 2.0 \text{ kg}$$

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

تمرین

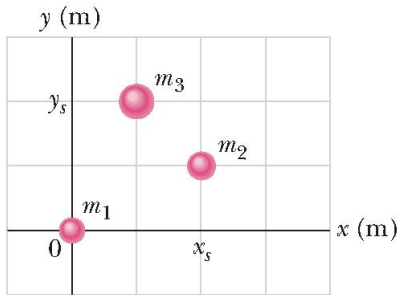
مرکز جرم شکل مقابل را بیابید.

$$m_1 = 1.0 \text{ kg} \quad m_2 = 2.0 \text{ kg} \quad m_3 = 4.0 \text{ kg}$$

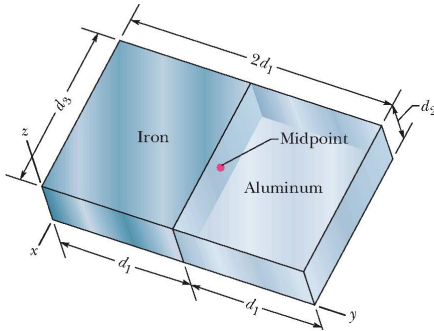
همچنین

$$x_s = 3.0 \text{ m} \quad y_s = 3.0 \text{ m}$$

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.



تمرین



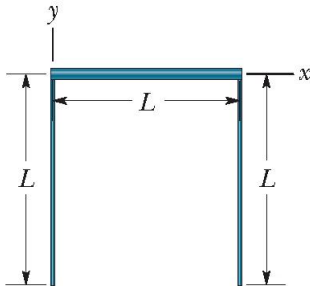
در شکل مقابل، دو قطعه آلومینیوم و آهن با ابعاد d_1 13 cm ، $d_2 = 3.5\text{ cm}$ و $d_3 = 16\text{ cm}$ را در نظر بگیرید. چگالی آلومینیوم برابر 2700 g/cm^3 و چگالی آهن نیز برابر 7850 g/cm^3 می باشد. مختصات x ، y و z مرکز جرم را بیابید.

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

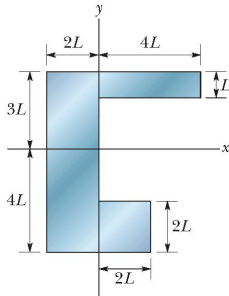
تمرین

در شکل مقابل، $L = 10\text{ cm}$ و جرم قطعه افقی سه برابر جرم هرکدام از قطعات عمودی است. مرکز جرم را بیابید.

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.



تمرین



قطعه فلزی همگنی به صورت مقابل، برش خورده است. مرکز جرم قطعه را بیابید.

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

مبحث بعدی: سیستم های ذرات و پایداری تکانه خطی



- در دو جلسه آینده می آموزیم که چگونه می توان از مفاهیم معرفی شده در اینجا برای بررسی مساله برخورد استفاده کرد. همچنین قانون پایداری تکانه خطی را اثبات خواهیم کرد.

- به علاوه، می آموزیم که چگونه می توان حرکت سیستم های با جرم متغیر را پیش بینی نمود.

- شکل از مبانی فیزیک، ویرایش هشتم.

مراجع

- ❶ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❷ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

کلاس های دیگر فیزیک مکانیک

کلاس های درس فیزیک یک دانشگاه صنعتی شریف (مثلا کلاس درس دکتر محمد رضا اجتهادی و یا دکتر محمود بهمن آبادی) را می توانید از مرکز آموزش های الکترونیک دانشگاه صنعتی شریف (و یا حتی از سایت مکتب خونه) دریافت کنید.
<http://ocw.sharif.edu/>

کلاس درس دکتر والتر لوین از دانشگاه MIT در مرکز آموزش های الکترونیک این دانشگاه و یوتیوب:
<https://ocw.mit.edu/index.htm>
<https://www.youtube.com/watch?v=X9c0MRooBzQ>

با سپاس از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.