

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

فصل اول: بار الکتریکی و قانون کولن

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در بهار سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

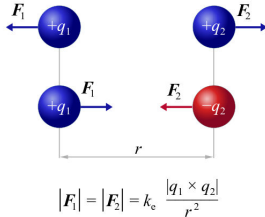
h.shenavar@gmail.com

فصل اول: بار الکتریکی و قانون کولن

قانون کولن
نیروی ناشی از بارهای پیوسته و تکنیک المان ها



یادآوری



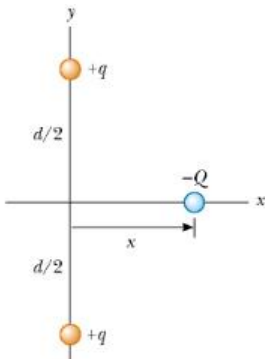
شکل از ویکی پدیا

برای درک مفاهیم یاد شده یکی از تمرین های جلسه قبل را حل می کنیم

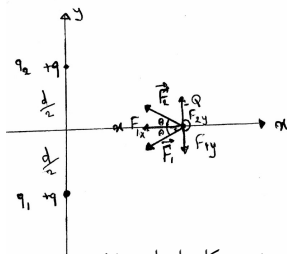
- نیروی بین دو بار الکتریکی با اندازه هرکدام از آن دو بار متناسب است.
- نیروی بین دو بار الکتریکی با عکس مجذور فاصله آن دو بار متناسب است.
- نیروی بین بارهای همنام دافعه و نیروی بین بارهای غیرهمنام جاذبه است.
- نیروی الکتریکی (مثل هر نیروی دیگری) یک کمیت برداری است.
- اصل برهمنهی: نیروی کل وارد بر یک بار از طرف یک مجموعه بار برابر است با جمع برداری تک تک نیروها.

تمرین

قانون کولن:

الف) در شکل مقابل دو بار $+q$ چه نیروی کلی به بار $-Q$ وارد می کنند؟ اندازه و جهت این نیرو را تعیین کنید.ب) با استفاده از بسط $(1 \pm \epsilon)^n = 1 \pm n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\epsilon^2 + \dots$ نیروی بدست آمده را با فرض $x \ll d$ بسط دهید.پ) نشان دهید که این نیرو وقتی $x \ll d$ می باشد، با فاصله x متناسب است.
ت) حرکت جسم در این حالت چه نوع حرکتی است؟

پاسخ



الف) نیروهای وارده از طرف دو بار $+q$ به بار $-Q$ را در شکل مقابل نمایش داده ایم. اندازه این نیروها برابر است با

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = \frac{KqQ}{r^2}$$

که در آن $r = \sqrt{(\frac{d}{2})^2 + x^2}$ همچنین،

بنا به اصل برهمتهی نیروی کل برابر است

با مجموع نیروها؛ یعنی $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. حال می‌خواهیم مولفه های افقی و عمودی نیروی کل را بیابیم. نخست، توجه می‌کنیم که

$$F_{1x} = F_1 \cos \theta = F_{2x} = F_2 \cos \theta = \frac{KqQ}{(\frac{d}{2})^2 + x^2} \cos \theta$$

$$F_{1y} = F_1 \sin \theta = F_{2y} = F_2 \sin \theta = \frac{KqQ}{(\frac{d}{2})^2 + x^2} \sin \theta$$

که در آن $\cos \theta = x / \sqrt{(\frac{d}{2})^2 + x^2}$ و $\sin \theta = \frac{d}{2} / \sqrt{(\frac{d}{2})^2 + x^2}$

پاسخ- ادامه

از شکل بالا مشخص است که نیروها در جهت x همدیگر را تقویت کرده و در جهت y همدیگر را تضعیف می کنند. بنابراین می توان مولفه های نیروی کل را، با توجه به شکل بالا، به صورت زیر نوشت:

$$F_x = F_{\backslash x} + F_{\nearrow x} = 2 \frac{KqQ}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} \cos \theta = 2 \frac{KqQ}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2}} = \frac{2KqQx}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$F_y = F_{\backslash y} - F_{\nearrow y} = 0$$

جهت نیروی F_x به سمت چپ است (در واقع جهت F_x در این مساله همیشه بر خلاف علامت x می باشد زیرا اگر x منفی باشد، جهت F_x به سمت راست خواهد بود).

ب) وقتی که بار $-Q$ در فواصل بسیار نزدیک نسبت به مرکز قرار می گیرد، یعنی وقتی داریم $d/2 \gg x$ ، می توان نیروی F_x را به صورت زیر بسط داد:

$$F_x = F_{\backslash x} + F_{\nearrow x} = \frac{2KqQx}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2\right)^{3/2}} = \frac{2KqQx}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{d/2}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$F_x = \frac{2KqQx}{\left(\frac{d}{2}\right)^3} \left(1 + \left(\frac{2x}{d}\right)^2\right)^{-3/2} = \frac{16KqQx}{d^3} \left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2x}{d}\right)^2 + \dots\right)$$

پاسخ- ادامه

پ) واضح است که در فواصل بسیار نزدیک داریم $x/d \ll 1$ ؛ بنابراین توان های بالاتر x/d همیشه سهم کوچکتري دارند؛ یعنی

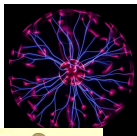
$$x/d \gg (x/d)^2 \gg (x/d)^3 \gg \dots$$

پس نیروی F_x را در مرتبه اول تقریب می توان به صورت زیر نوشت:

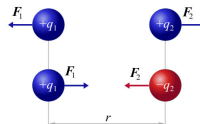
$$F_x \simeq \frac{16KqQ}{d^3}x$$

ت) اندازه نیروی بدست آمده با x متناسب بوده و جهت آن همیشه با خلاف جهت x است (بنا به بحث بالا). حرکت ناشی از چنین نیروی یک حرکت نوسانی خواهد بود.

تکنیک المان ها



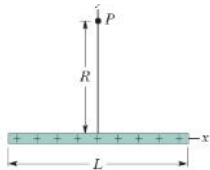
شکل ها از ویکی پدیا



$$|F_1| = |F_2| = k_e \frac{|q_1 \times q_2|}{r^2}$$

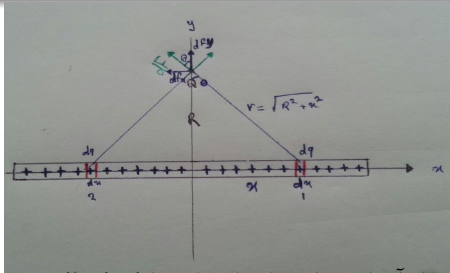
- قانون نیروی کولن "فقط" برای بارهای نقطه ای درست است.
- اکثر مسائل الکترومغناطیس شامل توزیع های گسترده و (با تقریب خوبی) پیوسته بار هستند. شکل های مقابل را ببینید.
- می توان با استفاده از شکل نقطه ای قانون کولن، مسائل مربوط به توزیع پیوسته بار را نیز حل کرد.
- برای اینکار به روش المان ها نیاز داریم ↓↓↓.
- ابتدا با یک مثال کاربرد این تکنیک را می بینیم؛ سپس، روش کلی به کار بردن تکنیک المان ها را جمع بندی می کنیم.

مثالی از تکنیک المان



۳- انتگرال گیری مستقیم برای پیدا کردن نیرو:
 در شکل مقابل، بار نقطه ای Q در نقطه P قرار دارد.
 میله ای به طول L و بار کل q ، که به صورت همگن
 روی آن توزیع شده است، را در فاصله R از بار نقطه
 ای در نظر بگیرید. نیروی کل وارد بر بار نقطه ای از طرف میله را بیابید.
 شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

پاسخ



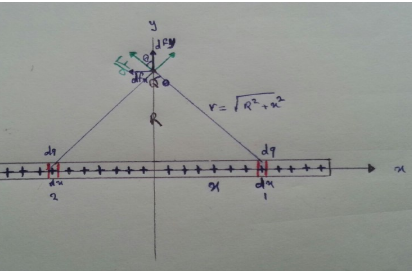
(۱) در ابتدا توجه می کنیم که میله یک بار نقطه ای نیست؛ بنابراین نمی توان جواب مساله را به صورت ساده $\frac{KQq}{R^2}$ و ... نوشت. جواب نهایی، همانطور که خواهیم دید، پیچیده تر است و باید به روش انتگرال گیری (المان ها) بدست آید.

(۲) با وجودی که میله مورد نظر یک بار نقطه ای نیست، می توان آن را به تعداد بسیار زیادی بار بسیار کوچک (که در حالت حدی نقطه ای اند) تجزیه کرد. مثلاً بار بسیار کوچک dq به طول بسیار کوچک dx در نقطه ۱ شکل مقابل را در نظر بگیرید. چنین باری در حالت حدی $dx \rightarrow 0$ یک بار نقطه ای خواهد بود. حال دو بار نقطه ای Q و dq داریم که اندازه نیروی کولنی بین آن دو به صورت زیر است:

$$|d\vec{F}| = \frac{KQdq}{r^2}$$

دقت کنید که با توجه به اینکه dq یک کمیت بسیار کوچک (المان و یا دیفرانسیل) است، نیروی $d\vec{F}$ هم یک کمیت بسیار کوچک خواهد بود. دلیل استفاده از نماد دیفرانسیل d برای این نیرو هم همین است.

پاسخ- ادامه



۳) نیروی $d\vec{F}$ یاد شده در بالا را می توان به مولفه هایش در جهت های x و y تجزیه کرد:

$$dF_x = |d\vec{F}| \sin \theta, \quad dF_y = |d\vec{F}| \cos \theta$$

که در آن بنا به شکل بالا داریم

$$\cos \theta = R/r, \quad x/r$$

از اینجا به سادگی می توان دید که مقدار کل نیرو در جهت x باید صفر شود زیرا شکل متقارن است. به عبارت دیگر، برای هر نقطه ۱ نقطه ۲ نیز وجود دارد. همین نکته را می توان به روش دقیق ریاضی (انتگرال گیری) هم اثبات کرد. ادامه بحث را ببینید.

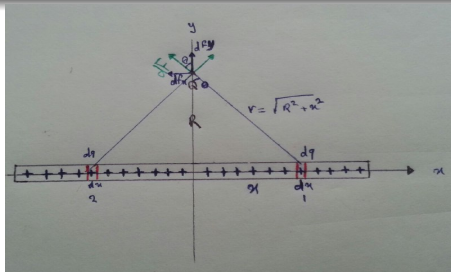
۴) همچنین لازم است که مقدار بار دیفرانسیلی dq را نیز به دست آوریم. اینکار را معمولاً از طریق تناسب انجام می دهیم. دقت کنید که مقدار بار کل میله، یعنی q ، در طول L پخش شده است. از طرفی، بار dq در طول dx پخش شده است؛ بنابراین تناسب زیر را داریم:

$$q \quad L$$

$$\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \quad dq = q \frac{dx}{L}$$

$$dq \quad dx$$

پاسخ- ادامه



(۵) حال برای پیدا کردن نیروی کل وارده بر بار Q باید اثرات دیگر بارهای بسیار کوچک روی میله را نیز پیدا کرده و آنها را، بنا به اصل برهمه‌نی، با هم جمع کنیم.

جمع بندی در اینجا یعنی انتگرال گیری.

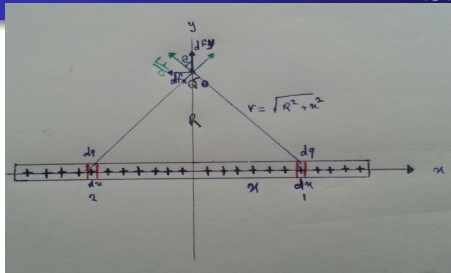
برای پیدا کردن نیروی کل در جهت y داریم:

$$\int_0^{F_y} dF_y = F_y = \int |d\vec{F}| \cos \theta = KQ \int \frac{dq}{R^2 + x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

انتگرال اخیر یک انتگرال یگانه است، ولی شامل دو متغیر dq و x می باشد. انتگرال یگانه نمی تواند شامل دو متغیر باشد. بنابراین باید یکی از دو متغیر dq و x را به دیگری تبدیل کنیم. اینکار را با استفاده از نتیجه تناسب (نکته ۴) انجام می دهیم:

$$F_y = KQR \int \frac{q \, dx/L}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

پاسخ- ادامه



با خارج کردن ثوابت، انتگرال مورد نظر به صورت زیر تبدیل می شود:

$$F_y = \frac{KQR\lambda}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

دو نکته درباره نتیجه اخیر:

الف) حدود انتگرال با توجه به مکان

های حضور بار روی میله تعیین می شود. میدانیم که بار روی میله در بازه $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ وجود دارد؛ بنابراین حدود انتگرال بالا نیز به همین صورت نوشته شده است.

ب) پاسخ انتگرال مورد نظر را می توان با تغییر متغیر $x = R \tan \theta$ به دست آورد. توجه می کنیم که $\frac{dx}{d\theta} = R(1 + \tan^2 \theta)$ ؛ بنابراین داریم:

$$dx = R(1 + \tan^2 \theta) d\theta$$

که با توجه به آن انتگرال مورد نظر به صورت زیر تبدیل می شود:

$$F_y = \frac{KQR\lambda}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{KQR\lambda}{L} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{R(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{(R^2 + R^2 \tan^2 \theta)^{3/2}}$$

پاسخ- ادامه

با کمی ساده سازی، و با توجه به اینکه $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$ داریم:

$$F_y = \frac{KQq}{LR^2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{(1 + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{KQq}{LR} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\frac{d\theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \frac{KQq}{LR} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos \theta d\theta = \frac{KQq}{LR} [\sin \theta]_{-\theta_0}^{\theta_0}$$

طبق معمول، برای تعیین نتیجه انتگرال معین، راحت تر است که متغیرها را به صورت اولیه تبدیل کنیم. از آنجا که $\sin \theta = x / \sqrt{R^2 + x^2}$ بنابراین می توان نوشت:

$$F_y = \frac{KQq}{LR} [\sin \theta]_{-\theta_0}^{\theta_0} = \frac{KQq}{LR} \left[\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{KQq}{LR} \left[\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2})^2}} - \frac{\frac{-L}{2}}{\sqrt{R^2 + (\frac{-L}{2})^2}} \right]$$

که با کمی محاسبه به جواب

$$F_y = \frac{KQq}{R\sqrt{R^2 + L^2/4}}$$

می رسم.

پاسخ- ادامه

(۶) چک کردن جواب ناشی از انتگرال برای اطمینان خاطر بسیار مهم است. باید همیشه این نکته را چک کنیم که اگر فاصله بین بار آزمون Q و بار گسترده (در اینجا میله) بسیار زیاد شود، یعنی $R \gg L$ ، آنگاه باید به قانون نیروی کولن برسیم:

$$\lim_{R \gg L} \frac{KQq}{R\sqrt{R^2 + L^2/4}} = \frac{KQq}{R^2}.$$

(۷) می توان با انتگرال گیری به سادگی دید که نیرو در جهت محور x صفر است:

$$F_x = \int_0^{F_x} dF_x = \int |d\vec{F}| \sin \theta = KQ \int \frac{dq}{R^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$F_x = \frac{KQq}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{x dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = 0.$$

چرا؟

راهنمایی: به تقارن انتگرال آخر دقت کنید.

جمع بندی روش المان ها

- این روش برای حل نیرو (و یا میدان، پتانسیل و ...) ناشی از بارهای پیوسته به کار می رود.
- بار پیوسته اولیه (در مساله قبل میله) را به تعدادی بسیار زیادی بارهای کوچک، که نیروی ناشی از هر کدام را می دانید، تبدیل کنید.
- نیروی ناشی از هر بار کوچک را بنویسید.
- اگر مساله مورد نظر یک بعدی نیست، نیروی یاد شده را در جهت های عمود بر هم تجزیه کنید. معمولاً نیرو در یکی از جهت ها (بنا به تقارن) صفر است.
- از نیروی دیفرانسیلی به دست آمده انتگرال بگیرید تا نیروی کل به دست آید.
- اگر در انتگرال خود دو متغیر داشتید، با استفاده از تناسب یکی از متغیرها را حذف کنید.
- نتیجه نهایی به دست آمده را با استفاده از شکل نقطه ای قانون کولن چک کنید (فواصل زیاد).

اهمیت روش المان ها در اینجاست که با حل مسائل کوچکتر و ساده تر، می توان از نتایج آنها استفاده کرده و مسائل بزرگتری را حل کرد. مثلاً اگر جواب مربوط به یک حلقه را به دست آوریم، می توانیم از آن استفاده کرده و جواب مربوط به یک دیسک (قرص) را بیابیم. در فصل بعد به تفصیل در این زمینه بحث خواهیم کرد.

قضیه های پوسته در الکتروستاتیک

- قضیه اول پوسته: یک پوسته کروی که به صورت همگن باردار شده است، به باری درون خود هیچگونه نیرویی وارد نمی کند.
- قضیه دوم پوسته: یک پوسته کروی که به صورت همگن باردار شده است، به یک ذره خارج از خود نیرویی معادل با وقتی که کل بار پوسته در مرکز آن جمع شده باشد، وارد می کند.
- اثبات قضایای پوسته در شکل گرانشی شان در فصل ۱۳ آمده است و شامل انتگرال های نسبتا پیچیده است. اثبات این قضایا در الکتروستاتیک نیز عینا همانند مورد گرانشی است.
- ما در فصل سوم (قانون گوس) قضایای پوسته را مجددا بیان و با استفاده از قانون گوس اثبات می کنیم. روش گوس برای اثبات قضایای پوسته بسیار آسانتر و شهودی تر است.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید خصوصیات اصلی روش المان ها را بیان کنید. یعنی:

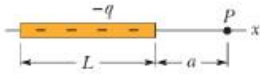
- ۱ روش المان ها برای حل چه مسائلی به کار می رود؟
- ۲ المان در یک مساله را توضیح دهید؟
- ۳ مراحل مختلف روش المان ها را بیان کنید.
- ۴ در حالتی که دو متغیر در انتگرال ظاهر می شوند باید چکار کنیم؟
- ۵ چگونه می توانیم نتیجه به دست آمده از روش المان ها را چک کنیم؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای جذب مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل مسائل زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین



۱- انتگرال گیری

مستقیم نیرو برای یک توزیع بار پیوسته:

در شکل بالا بار آزمون q_0 در نقطه P قرار دارد. میله ای باردار به طول L و بار کل $-q$ ، که به صورت همگن روی میله توزیع شده است، را در نظر بگیرید. نیرویی را که میله به بار آزمون وارد می کند بیابید.

تمرین



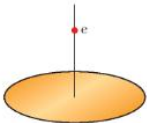
۲- انتگرال گیری مستقیم نیرو:

حلقه باردار مقابل که بار به صورت همگن روی آن توزیع شده است را در نظر بگیرید.

(الف)

اگر چگالی خطی بار این حلقه λ باشد، بار جزء بسیار کوچک به طول ds چقدر است؟
(ب) نیروی بسیار کوچک dF که این بار بسیار کوچک بر یک

بار آزمون Q در فاصله z از مرکز حلقه ایجاد میکند (یعنی در نقطه P) چقدر است؟
(پ) نیروی کل را با انتگرال گیری بیابید.



۳- انتگرال گیری مستقیم نیرو:

قرص نازک مقابل

به شعاع R و چگالی بار سطحی یکنواخت σ را در نظر بگیرید. (الف) نیروی ناشی از

این قرص بر یک بار آزمون e در فاصله z از مرکز آن بیابید. (ب) رفتار نیروی ناشی از

قرص در $R \gg z$ چگونه است؟ (پ) رفتار نیروی قرص در $R \ll z$ چگونه است؟

مبحث بعدی: میدان و کاربرد آن

در جلسات بعد به ساده سازی مفاهیم برای آسان تر کردن درک مسائل ادامه خواهیم داد. به همین منظور، به جای مفهوم نیرو (که کمیتی وابسته به دو بار الکتریکی است) مفهوم میدان را معرفی می کنیم. میدان الکتریکی در هر نقطه برابر است با نیروی وارد شده بر یک بار آزمون در آن نقطه بخش بر واحد بار:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}$$

خواهیم دید که میدان الکتریکی فقط وابسته به یک بار الکتریکی (و یا توزیع بار الکتریکی) است؛ بنابراین، بررسی اثرات الکتریکی با مفهوم میدان تا حدی ساده تر خواهد شد. اگر میدان الکتریکی در یک نقطه را داشته باشیم؛ آنگاه، پیدا کردن نیروی وارده بر هر ذره Q در آن نقطه بسیار راحت خواهد بود:

$$\vec{F} = Q\vec{E}.$$

مراجع

- ❶ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❷ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

با سپاس از توجه شما

