

نوسانگر هارمونیک در مکانیک کوانتومی

تابع موج نوسانگر هارمونیک ساده

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ تابع موج نوسانگر هارمونیک ساده
- تابع موج نوسانگر هارمونیک ساده
- مقدار چشمداشتی موقعیت و تکانه

نوسانگر هارمونیک ساده در مکانیک کوانتومی

- در جلسه قبل دیدیم که هامیلتونی نوسانگر هارمونیک ساده به صورت زیر نوشته می شود:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

- هرچند، در ادامه کار دیدیم که با معرفی عملگرهای افزایشنده و کاهشنده (خلق و فنا) می توان مساله نوسانگر را به سادگی حل کرد:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right) \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right)$$

- از دو رابطه بالا می توان به سادگی عملگرهای موقعیت و تکانه را برحسب عملگرهای خلق و فنا یافت:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (-a + a^\dagger)$$

- تمرین: در جلسه قبل مولفه های ماتریسی عملگرهای خلق و فنا را به صورت زیر یافتیم.

$$\langle n' | a | n \rangle = \sqrt{n} \delta_{n', n-1}, \quad \langle n' | a^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} \delta_{n', n+1}$$

این دو عملگر را در نمایش ماتریسی بنویسید. پاسخ در اسلاید بعد آمده است.

نوسانگر هارمونیک ساده در مکانیک کوانتومی

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{n} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \sqrt{n} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

• نمایش ماتریسی عملگرهای خلق و فنا را ببینید و درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

• تمرین: با استفاده از شکل ماتریسی عملگرهای خلق و فنا، شکل ماتریسی عملگر هامیلتونی

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

را بیابید. پاسخ در ادامه آمده است.

نوسانگر هارمونیک ساده در مکانیک کوانتومی

- شکل ماتریسی عملگر هامیلتونی برای نوسانگر هماهنگ ساده به صورت زیر است:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- تمرین: نشان دهید که مولفه های ماتریس های موقعیت و تکانه در ویژه کت های عملگر شمارش به صورت زیرند:

$$\langle n' | x | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n} \delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{n',n+1}),$$

$$\langle n' | p | n \rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (-\sqrt{n} \delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{n',n+1}).$$

- تمرین: شکل ماتریسی عملگرهای موقعیت-تکانه را بیابید. پاسخ برای موقعیت در زیر آمده است.

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

ویژه کت های انرژی در فضای موقعیت

- توجه کنید که عملگر های $x, p, a, a^\dagger$ در پایه های عملگر N غیرقطری هستند؛ زیرا این عملگرها با N جابجا نمی شوند.
- در ادامه می خواهیم ویژه کت های انرژی، یعنی $|n\rangle$ ، را در فضای موقعیت بنویسیم. برای اینکار دقت کنید که می توان رابطه ویژه مقداری $\langle a|0\rangle = 0$ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\langle x'|a|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \langle x'| \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right) |0\rangle = 0.$$

حال با استفاده از رابطه $p = -i\hbar d/dx$ می توان معادله بالا را به شکل معادله دیفرانسیل زیر نوشت:

$$\left(x' + x_0^2 \frac{d}{dx'} \right) \langle x'|0\rangle = 0,$$

که در آن $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ طول مشخصه نوسانگر هارمونیک کوانتومی است.

- تمرین: از معادله بالا نسبت به زمان انتگرال گرفته و نشان دهید که جواب آن برابر است با

$$\langle x'|0\rangle = \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{x_0}} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x'}{x_0} \right)^2 \right]$$

حالت های برانگیخته در فضای موقعیت

تمرین: در جلسه قبل نشان دادیم که با n بار تاثیر عملگر افزایش دهنده می توان حالت سیستم را به کت $|n\rangle$ منتقل کرد:

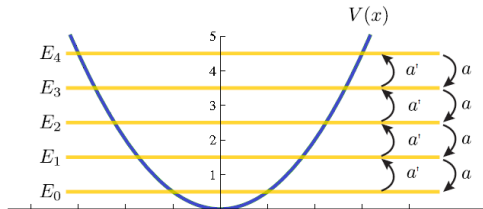
$$|1\rangle = a^\dagger |0\rangle,$$

$$|2\rangle = \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{2}}\right) |1\rangle = \left[\frac{(a^\dagger)^2}{\sqrt{2}}\right] |0\rangle,$$

$$|3\rangle = \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{3}}\right) |2\rangle = \left[\frac{(a^\dagger)^3}{\sqrt{3!}}\right] |0\rangle,$$

$$\vdots$$

$$|n\rangle = \left[\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\right] |0\rangle.$$



حال با توجه به رابطه $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right)$ نشان دهید که تابع حالت سیستم برای حالت های برانگیخته در فضای موقعیت به صورت زیر به دست می آید:

$$\langle x' | 1 \rangle = \langle x' | a^\dagger | 0 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}x_0} \right) \left(x' - x_0^2 \frac{d}{dx'} \right) \langle x' | 0 \rangle,$$

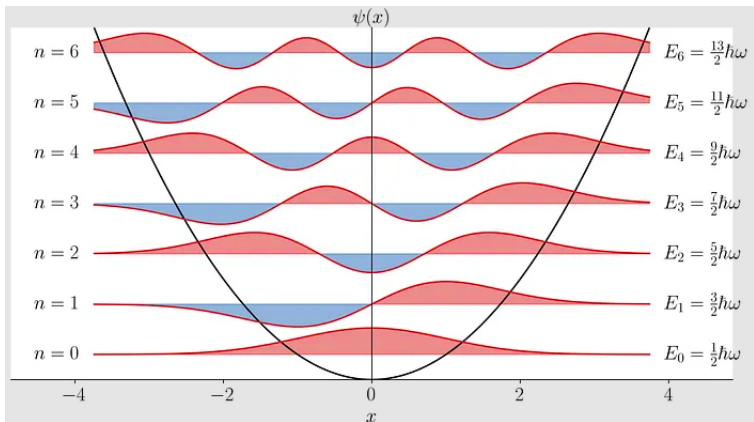
$$\langle x' | 2 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \langle x' | (a^\dagger)^2 | 0 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2!}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}x_0} \right)^2 \left(x' - x_0^2 \frac{d}{dx'} \right)^2 \langle x' | 0 \rangle, \dots$$

$$\langle x' | n \rangle = \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \right) \left(\frac{1}{x_0^{n+1/2}} \right) \left(x' - x_0^2 \frac{d}{dx'} \right)^n \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x'}{x_0} \right)^2 \right]$$

حالت های برانگیخته در فضای موقعیت

- تمرین: به هر زبان دلخواه یک کد نوشته و ویژه کت های انرژی در فضای موقعیت و دامنه های احتمال را رسم کنید. پاسخ را می توانید به زبان پایتون در لینک زیر ببینید. البته این جواب ها به کمک توابع هرمتیت تولید شده اند.

<https://scipython.com/blog/the-harmonic-oscillator-wavefunctions/>



مقدار چشمداشتی موقعیت و تکانه و برخی دیگر از مشاهده پذیرها

- در ادامه ما مقدار چشمداشتی مقادیر x^2 و p^2 (و برخی مشاهده پذیرهای دیگر) در حالت پایه نوسانگر هارمونیک را محاسبه می کنیم و محاسبه این مقادیر در حالت های برانگیخته را به عنوان تمرین قرار می دهیم.

- در ابتدا توجه کنید که

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger)$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (-a + a^\dagger)$$

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a)$$

$$p^2 = \frac{m\hbar\omega}{2} (-a^2 - a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a)$$

از اینجا می توانیم مقدار چشمداشتی مقادیر x و p و x^2 و p^2 در حالت پایه نوسانگر هارمونیک

را محاسبه می کنیم:

$$\langle 0|x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle 0|(a + a^\dagger)|0\rangle = 0$$

$$\langle 0|p|0\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \langle 0|(-a + a^\dagger)|0\rangle = 0$$

$$\langle 0|x^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0|(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a)|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle 0|p^2|0\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2} \langle 0|(-a^2 - a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a)|0\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}$$

مقدار چشمداشتی موقعیت و تکانه و برخی دیگر از مشاهده پذیرها

- همچنین می توان مقدار چشمداشتی انرژی جنبشی و پتانسیل نوسانگر هارمونیک در کت حالت پایه را به دست آورد:

$$\langle \circ | \frac{m \omega^2 x^2}{2} | \circ \rangle = \frac{\hbar \omega}{4} = \langle \circ | \frac{H}{2} | \circ \rangle$$

$$\langle \circ | \frac{p^2}{2m} | \circ \rangle = \frac{\hbar \omega}{4} = \langle \circ | \frac{H}{2} | \circ \rangle$$

که البته با توجه به قضیه ویریال انتظار آن می رفت.

- همچنین عدم قطعیت در کمیت های موقعیت و تکانه در کت حالت پایه به صورت زیرند:

$$\langle \circ | (\Delta x)^2 | \circ \rangle = \langle \circ | x^2 | \circ \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle \circ | (\Delta p)^2 | \circ \rangle = \langle \circ | p^2 | \circ \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}$$

بنابراین نوسانگر کوانتومی در کت پایه خود در حداقل عدم قطعیت قرار دارد:

$$\langle \circ | (\Delta x)^2 | \circ \rangle \langle \circ | (\Delta p)^2 | \circ \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$

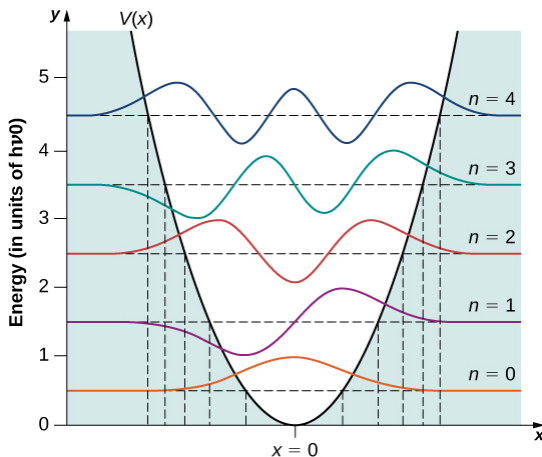
- پرسش: همانطور که پیشتر دیدیم، تابع حالت سیستم در کت پایه یعنی $\langle x' | \circ \rangle$ گوسی است. تحقیق کنید که آیا عدم قطعیت برای توابع حالت گوسی همیشه کمینه است؟

رابطه عدم قطعیت در حالت های برانگیخته

تمرین بسیار مهم: به روش معرفی شده در بالا نشان دهید که رابطه عدم قطعیت در کت حالت برانگیخته $|n\rangle$ به صورت زیر نوشته می شود.

$$\langle n | (\Delta x)^2 | n \rangle \langle n | (\Delta p)^2 | n \rangle = \hbar^2 \left(n + \frac{1}{4} \right)^2$$

تفسیر فیزیکی این نتیجه چیست؟



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم تابع موج نوسانگر هارمونیک ساده را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

- نمایش ماتریسی هامیلتونی نوسانگر هارمونیک ساده، عملگرهای خلق و فنا، موقعیت و تکانه این نوسانگر را بنویسید.
- ویژه کت های انرژی در فضای موقعیت برای نوسانگر هارمونیک ساده چطور نوشته می شوند؟
- چرا عدم قطعیت در کت پایه نوسانگر هارمونیک کمینه است؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

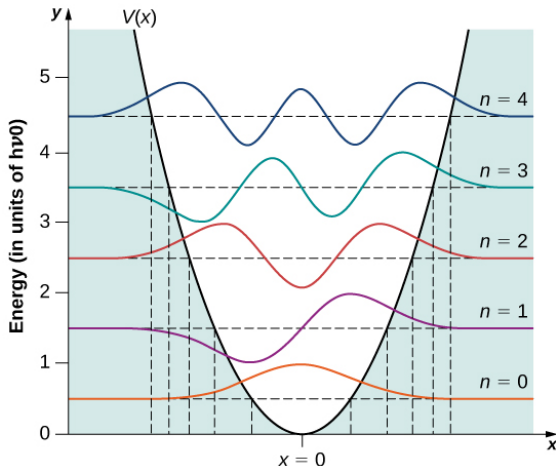


تمرین

- مسائل ۱۱ تا ۲۰ از فصل دوم کتاب ساکورایی (ویرایش سوم) را حل کنید.

مبحث بعدی: تحول زمانی نوسانگر کوانتومی و بسط بیکر-کمپل-هاسدورف

در جلسه بعد تحول زمانی نوسانگر هارمونیک کوانتومی را بررسی خواهیم کرد. همچنین با بسط بیکر-هاسدورف آشنا خواهیم شد.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما