

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

ویژگی های سری توانی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

ویژگی های سری توانی

ویژگی های سری توانی

قضیه یکتایی

بررسی صورت های مبهم با استفاده از بسط توانی

وارون بسط توانی

سری های توانی

- همانطور که گفته شد، سری های توانی نوع بسیار مهمی از سری های نامتناهی هستند. این گونه سری ها را می توان با استفاده از بسط مکلورن (مکلارن) و یا روش های دیگر به دست آورد. به هرحال، به هر روشی که سری های توانی را به دست آوریم، شکل کلی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

که در آن ضرایب a_n مقادیری مستقل از x هستند.

- همگرایی بسط بالا را می توان به راحتی با استفاده از آزمون ریشه کوشی و یا آزمون نسبت دالامبر سنجید. در واقع اگر داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = R^{-1}$$

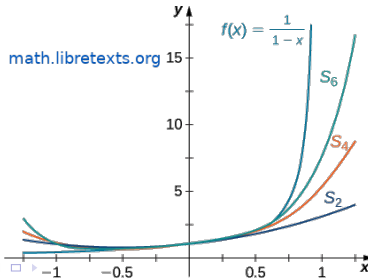
آنگاه می گوییم که سری توانی برای تمام $-R < x < R$ همگراست. این بازه را بازه همگرایی و یا شعاع همگرایی سری می نامند. همگرایی در نقاط $x = \pm R$ نیازمند بررسی ویژه است که در ادامه (با بررسی چند مثال) به آن خواهیم پرداخت.

معنی شعاع همگرایی

- برای درک مفهوم شعاع همگرایی، تابع $f(x) = 1/(1-x)$ را در نظر بگیرید. بسط توانی این تابع برابر است با

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- حال جمع بندی جزئی $S_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n$ را در نظر بگیرید. این جمع بندی را برای مقادیر کوچک $N = 2, 4, 6$ در زیر رسم شده است. از این نمودار می توان دید که با افزایش N ، مقدار سری جزئی به مقدار واقعی تابع نزدیکتر می شود. در واقع برای $-1 < x < 1$ سری همگراست و شعاع همگرایی آن $R = 1$ است (اثبات: $R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$) ولی برای $|x| > 1$ سری واگراست.
- تمرین: نشان دهید که سری بالا در $x = \pm 1$ واگراست.



مثال از یافتن شعاع همگرایی

● شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ را بیابید.

پاسخ:

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right|$$

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

بنابراین شعاع همگرایی سری بالا $R = \infty$ است و سری برای تمام نقاط $-\infty < x < \infty$ همگراست.

● شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ را بیابید.

پاسخ:

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

بنابراین برای سری بالا شعاع همگرایی $R = 0$ می باشد و سری برای تمام نقاط $x \neq 0$ واگراست.

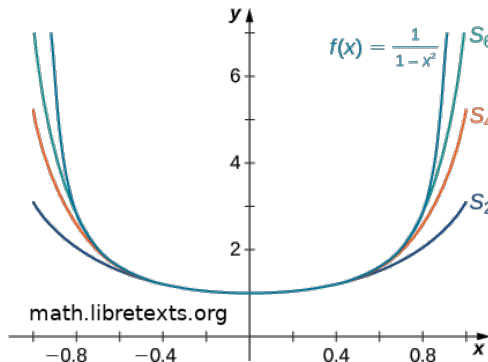
تمرین

تمرین: الف) درباره شعاع همگرایی بسط توانی تابع $f(x) = 1/(1-x^2)$ با توجه به شکل پایین بحث کنید.

ب) بسط توانی این تابع را بنویسید و شعاع همگرایی آن را بیابید.

پ) شعاع همگرایی این بسط سری را با استفاده از تعریف شعاع همگرایی بیابید.

ت) درباره همگرایی سری در $x = \pm 1$ بحث کنید.



برخی ویژگی های سری های توانی

• به برخی ویژگی های سری های توانی دقت کنید:

۱ اگر سری توانی مورد نظر ما در بازه $-R < x < R$ همگرا باشد، آنگاه این سری در هر زیر بازه از بازه همگرایی نیز همگراست. تمرین: این گزاره را با استفاده از آزمون وایرستراس اثبات کنید.

۲ از آنجا که هر جمله از سری توانی $(u_n = a_n x^n)$ خود تابعی پیوسته از متغیر x است و سری $f(x) = \sum a_n x^n$ هم در بازه همگرایی دارای همگرایی یکنواخت است، نتیجه می گیریم که تابع $f(x)$ نیز باید در بازه مورد نظر پیوسته باشد. (به همین دلیل برای بسط توابع دندان اره ای - sawtooth - از بسط توانی استفاده نمی شود بلکه از بسط مثلثاتی بهره می بریم).

۳ با توجه به پیوستگی u_n و همگرایی یکنواخت $\sum a_n x^n$ ، می توان اثبات کرد که با مشتق گیری (و یا انتگرال گیری) جمله به جمله از بسط بالا یک سری پیوسته جدید با همان شعاع همگرایی سری اولیه تشکیل خواهد شد.

۴ فاکتورهای وارد شده در اثر مشتق گیری و یا انتگرال گیری نتیجه آزمون نسبت و یا ریشه را تغییر نخواهند داد. در نتیجه می توان از سری توانی به تعداد نیاز مشتق و یا انتگرال گرفت! و نتیجه همچنان در بازه همگرایی همگرا خواهد بود.

قضیه یکتایی سری های توانی

در سرتاسر مباحث ریاضی-فیزیک به توابعی برخورد خواهیم کرد که به صورت سری توانی نوشته شده و یا توسط سری های توانی تعریف می شوند. در ادامه می خواهیم اثبات کنیم که بسط توانی یک تابع همیشه یکتاست.

اثبات: فرض می کنیم که ما توانسته ایم دو بسط توانی متفاوت از یک تابع یکسان بسازیم. همچنین فرض می کنیم که دو بازه همگرایی این دو بسط (که آنها را با R_a و R_b نشان می دهیم) با هم همپوشانی دارند و البته هر دو بازه شامل مبدا مختصات اند:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad -R_a < x < R_a$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad -R_b < x < R_b$$

می خواهیم ثابت کنیم که برای همه مقادیر n داریم $a_n = b_n$. در نتیجه این دو بسط در واقع هم ارز هستند. با توجه به اینکه دو بسط در واقع یک تابع را نشان می دهند، می توان نوشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad -R < x < R$$

که در آن پارامتر R کمینه مقادیر R_a و R_b می باشد. حال مقدار $x = 0$ را در دو بسط قرار می دهیم و در نتیجه به رابطه $a_0 = b_0$ می رسم.

قضیه یکتایی سری های توانی

در سرتاسر مباحث ریاضی-فیزیک به توابعی برخورد خواهیم کرد که به صورت سری توانی نوشته شده و یا توسط سری های توانی تعریف می شوند. در ادامه می خواهیم اثبات کنیم که بسط توانی یک تابع همیشه یکتاست.

ادامه اثبات: حال از طرفین رابطه بالا مشتق می گیریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}$$

باز هم مقدار $x = 0$ را در دو بسط قرار می دهیم و در نتیجه به رابطه $a_1 = b_1$ می رسیم. به همین ترتیب با مشتقات متوالی می توانیم برابری $a_n = b_n$ را اثبات کنیم. در نتیجه دو سری با هم برابر هستند و بسط سری توانی یک تابع مفروض یکتاست.

قضیه یکتایی بسط توانی در بررسی جواب های معادلات دیفرانسیل نقش بسیار مهمی دارد. در واقع یکتایی بسط توانی به صورت مکرر در فیزیک نظری ظاهر می شود. مهمترین مثال در این زمینه بررسی های مبتنی بر نظریه اختلال در فیزیک کلاسیک (مکانیک، الکترومغناطیس، سیالات و ...) و نظریه کوانتومی اختلال است.

بررسی صورت های مبهم

● بسط توانی سری ها می تواند بررسی صورت های مبهم (مانند $\frac{0}{0}$) را ساده تر کند. در واقع بسط توانی پایه اثبات قاعده هوییتال است.

● قاعده هوییتال: اگر نسبت دو تابع مشتق پذیر مانند $f(x)$ و $g(x)$ مبهم شود (به شکل $\frac{0}{0}$)، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

تمرین: قاعده هوییتال را اثبات کنید.

● در واقع بسیاری اوقات راحت تر این است که از بسط سری ها به جای قاعده هوییتال استفاده کنیم. مثال بعد را ببینید.

● مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ را بیابید.

پاسخ: با استفاده از بسط مکلورن تابع کسینوس می توان نوشت

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots)}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots$$

و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

رابطه بسط توانی و بسط مکلورن

- با توجه به قضیه یکتایی بسط توانی می توان دید که ضرایب بسط توانی در واقع الزاما همان مشتقات در سری مکلورن هستند:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n,$$

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

یادآوری صورت های مبهم و روش رفع ابهام آنها

در زیر صورت های مبهم و روش رفع ابهام آنها آورده شده است. با جزئیات این روش ها پیشتر در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا شده اید.

Indeterminate form	Conditions	Transformation to $0/0$	Transformation to ∞/∞
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$	—	$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$	—
$0 \cdot \infty$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{1/g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{1/f(x)}$
$\infty - \infty$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/(f(x)g(x))}$	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \ln \lim_{x \rightarrow c} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}$
0^0	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0^+, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$
1^∞	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$
∞^0	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$

وارون بسط توانی

- ما معمولا در بررسی های اختلالی خود می خواهیم تابع y را بر حسب بسط توانی متغیر x حول نقطه x_0 بنویسیم:

$$y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

هرچند گاهی اوقات لازم است که وارون این بسط را به دست آوریم؛ یعنی می خواهیم رابطه

$$x - x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (y - y_0)^n,$$

را بیابیم. در اینجا ضرایب b_n پارامترهایی هستند که با فرض دانستن ضرایب a_n باید تعیین شوند.

- یک روش مستقیم (ولی طاقت فرسا!) برای تعیین ضرایب b_n این است که معادله اول را در معادله دوم

قرار دهیم. سپس با مساوی قرار دادن ضرایب جملات $(x - x_0)^n$ در هر دو طرف و استفاده از قضیه یکتایی بسط توانی، می توانیم پارامترهای b_n را به صورت مقابل بیابیم:

$$b_1 = \frac{1}{a_1},$$

تمرین (اختیاری): ضریب b_5 را بیابید.

$$b_3 = \frac{1}{a_1^3} (2a_2^2 - a_1 a_3),$$

توجه: پیدا کردن ضرایب دیگر بسیار مشکل است ولی خوشبختانه این ضرایب در جدول ها موجودند.

$$b_4 = \frac{1}{a_1^4} (5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3),$$

مثلا Dwight ۱۹۶۱ را ببینید.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید ویژگی های سری توانی و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ منظور از بازه همگرایی و شعاع همگرایی چیست؟
- ۲ روش تعیین شعاع همگرایی سری ها را توضیح دهید.
- ۳ چهار ویژگی اصلی سری های توانی را بیان کنید.
- ۴ درباره ویژگی های دیگر سری های توانی تحقیق کنید.
- ۵ قضیه یکتایی سری توانی را بیان کنید.
- ۶ توضیح دهید که چطور می توان از بسط سری برای رفع ابهام صورت های مبهم استفاده کرد.
- ۷ توضیح دهید که چطور می توان وارون یک بسط توانی را ساخت.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین ها

- تمرینات موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- تمرینات موجود در صفحات ۳۲ و ۳۳ از ویرایش هفتم آرفکن پاسخ دهید.

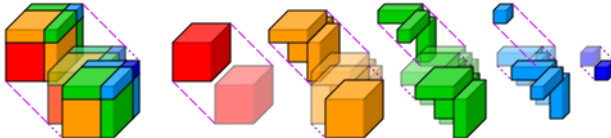
مبحث بعدی: قضیه بسط دوجمله ای

در جلسه بعد با قضیه بسط دوجمله ای آشنا خواهیم شد.

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$


$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$


$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$


منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

