

فیزیک مکانیک

فصل دهم: دوران

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

فصل دهم: دوران

- انرژی جنبشی دوران
- محاسبه لختی دورانی



آنچه گذشت...

قوانین نیرو: این قوانین، مقدار و جهت نیروی وارد شده بر یک جسم را در شرایط مختلف و با استفاده از آزمایش های دقیق بیان می کنند.

قانون گرانش نیوتن برای دو جرم نقطه ای:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

قانون کولن برای دو بار نقطه ای:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

قانون هوک برای جرم متصل به فنر

$$F = -kx$$

نیروی عمودی سطح، کشش نخ، نیروی ارشمیدس و ...

این دو دسته قانون، طیف بسیار گسترده ای از پدیده های فیزیکی را به درستی توضیح می دهند.

قوانین حرکت:

یکی از راه های نوشتن قوانین حرکت، استفاده از سه قانون حرکت نیوتن است. این شکل از علم مکانیک کلاسیک را مکانیک نیوتنی می نامند. نوشتن قوانین مکانیک به شکل های دیگر، مانند مکانیک لاگرانژی، هامیلتونی و ... هم ممکن است. ما در این کتاب مکانیک نیوتنی را بررسی خواهیم کرد.

قانون اول: وقتی برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد، جسم حالت حرکت خود را حفظ خواهد کرد. یعنی اگر ساکن باشد، ساکن خواهد ماند و اگر با سرعت در حال حرکت باشد، با همان سرعت به حرکت خود ادامه خواهد داد.

قانون دوم: رابطه شتاب و نیرو

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

قانون سوم نیوتن: هر عملی را عکس العملی است، با مقدار مساوی و در جهت خلاف آن

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

قوانین نیوتن فقط در دستگاه های لخت برقرار هستند.

پرسش: حرکت یک جسم صلب (یک نوع خاص از سیستم ذره که در آن فاصله ذرات تغییر نمی کند) چگونه است؟

جمع بندی روابط بین متغیرهای زاویه ای

سرعت زاویه ای لحظه ای عبارت است از مشتق موقعیت زاویه ای؛ به عبارت دیگر، سرعت زاویه ای شیب نمودار موقعیت زاویه ای است. از طرف دیگر، موقعیت زاویه ای برابر است با مساحت زیر نمودار سرعت زاویه ای-زمان:

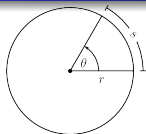
$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad d\theta = \omega(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_0^t \omega(t)dt$$

شتاب زاویه ای لحظه ای عبارت است از مشتق سرعت زاویه ای لحظه ای؛ به عبارت دیگر، شتاب زاویه ای شیب نمودار سرعت زاویه ای لحظه ای است. از طرف دیگر، سرعت زاویه ای برابر است با مساحت زیر نمودار شتاب زاویه ای-زمان:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad d\omega = \alpha(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_0^t \alpha(t)dt$$

برای درک درست این روابط، به سه مثال زیر دقت کنید.

ارتباط بین متغیرهای دورانی و خطی



فرض کنید که جسم صلبی در حال دوران است. در این صورت، اگر نقطه ای از این جسم به اندازه زاویه θ بر حسب رادیان دوران کند، فاصله طی شده توسط این نقطه برابر است با

$$s = r\theta$$

یعنی فاصله خطی طی شده در طول دوران با فاصله زاویه ای طی شده رابطه دارد.

با توجه به اینکه فاصله نقطه مورد نظر تا محور دوران (یعنی r) تغییر نمی کند (چون جسم صلب است)، داریم:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} r\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$$v = r\omega$$

و یا

به همین صورت، می توانیم تغییر در اندازه بردار سرعت را بیابیم:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} r\omega = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

و یا شتاب مماسی (که در اثر تغییر در اندازه بردار سرعت بوجود می آید) برابر است با

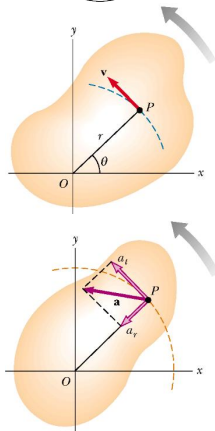
$$a_t = r\alpha$$

سه رابطه اساسی بالا فقط در صورتی برقرار هستند که کمیت های زاویه ای بر حسب رادیان سنجیده شوند.

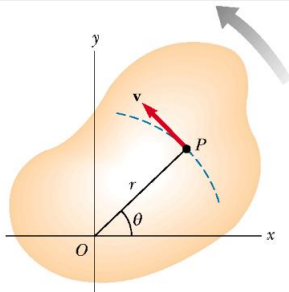
یادآوری شتاب مرکزگرا (که در اثر تغییر در جهت بردار سرعت بوجود می آید) برابر است با

$$a_r = v^2/r = r\omega^2$$

شکل ها از ویرایش هشتم مبانی فیزیک هالیدی.



انرژی جنبشی کل یک جسم در حال دوران



شکل از ویرایش دهم فیزیک هالیدی.

برای پیدا کردن انرژی جنبشی یک جسم در حال دوران، فرض می‌کنیم که این جسم از ذرات بسیار زیادی تشکیل شده است. جرم ذره i ام برابر m_i و سرعت آن برابر v_i می‌باشد. انرژی جنبشی این ذره خاص برابر است با

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

همچنین، انرژی جنبشی کل جسم برابر است با مجموع انرژی‌های جنبشی تک تک ذرات. یعنی

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

همچنین برای هر ذره i از یک جسم صلب داریم:

$$v_i = r_i \omega$$

زیرا تمام اجزاء جسم صلب با یک سرعت دورانی مشخص می‌چرخند (وگرنه جسم صلب نخواهد بود!). با توجه به این نکته می‌توانیم انرژی جنبشی کل را به صورت زیر بنویسیم:

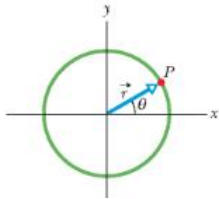
$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

کمیت زیر را لختی دورانی جسم (rotational inertia) حول محور z می‌نامند:

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

در اینجا محور z محور دوران است. لختی دورانی را در فارسی گاهی ”مان اینرسی“ هم می‌نامند. موضوع جلسه امروز بررسی دقیق لختی دورانی است.

انرژی جنبشی کل یک جسم در حال دوران



برای محاسبه لختی دورانی هر شکل دلخواه می توان از تعریف لختی دورانی یک جرم نقطه ای شروع کرد و با انتگرال گیری، لختی دورانی جسم مورد نظر را یافت. بنا به تعریف، لختی دورانی یک جرم نقطه ای m که به فاصله r از مرکز دوران قرار دارد برابر است با

$$I = mr^2 \quad \text{for a point particle}$$

به شکل بالا توجه کنید.

حال لختی دورانی هر جسم صلب دلخواه را که در یک صفحه در حال دوران است (شکل پایین) می توان به صورت مجموع لختی دورانی تک تک اجرام m_i نوشت:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{for a system of particles}$$

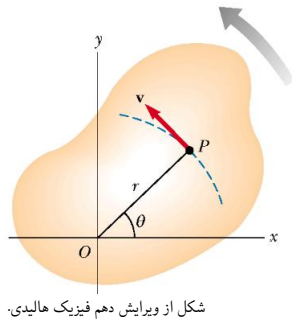
که در حالت حدی وقتی که جرم های m_i بسیار کوچک باشند، به انتگرال زیر تبدیل می شود:

$$I = \int r^2 dm \quad \text{for a continuous mass distribution}$$

در بدست آوردن لختی دورانی اجسام گوناگون از این روابط بسیار بهره خواهیم برد.

در این جلسه روش کلی محاسبه لختی دورانی اجسامی را که از نظر هندسی تا حدی متقارن هستند بررسی خواهیم کرد. محاسبه لختی دورانی اجسام با شکل دلخواه نیاز به محاسبات مفصل عددی دارد که از موضوع بحث جاری خارج است.

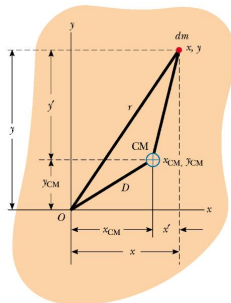
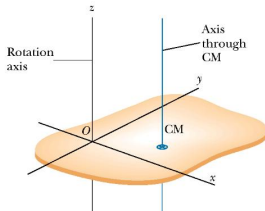
برای محاسبه لختی دورانی برخی اجسام، ممکن است نیاز به قضیه محورهای موازی داشته باشیم.



شکل از ویرایش دهم فیزیک هالیدی.



قضیه محوره‌های موازی



قضیه محوره‌های موازی: لختی دورانی یک جسم حول محوری خارج از مرکز جرم آن برابر است با لختی دورانی حول مرکز جرم جسم I_{CM} به علاوه جرم جسم ضرب در فاصله محور تا مرکز جرم

$$I = I_{CM} + MD^2 \quad \text{یعنی } MD^2 \text{ به توان دو}$$

اثبات: لختی دورانی در دو دستگاه متفاوت xy (که از محور دوران z می‌گذرد) و $x'y'$ (که از محور دوران مرکز جرم CM می‌گذرد)، را به دست آورده و با هم مقایسه می‌کنیم. لختی دورانی در دستگاه مختصات xy برابر است با

$$I = \int (x^2 + y^2) dm$$

در حالی که لختی دورانی در دستگاه مرکز جرم برابر است با

$$I_{CM} = \int (x'^2 + y'^2) dm$$

حال با توجه به شکل داریم:

$$x = x_{CM} + x'$$

$$y = y_{CM} + y'$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2 + y^2) dm = \int ([x_{CM} + x']^2 + [y_{CM} + y']^2) dm \\ &= \int (x'^2 + y'^2) dm \Rightarrow I_{CM} \\ &+ 2x_{CM} \int x' dm + 2y_{CM} \int y' dm \Rightarrow \text{???} \\ &+ (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) \int dm \Rightarrow MD^2 \end{aligned}$$

پایان اثبات (شکل از ویرایش هشتم فیزیک هالیدی).

لختی دورانی یک سیستم ذره

لختی دورانی سیستم ذره مقابل را حول محورهای الف (x ، y و z) به دست آورید. انرژی جنبشی سیستم ذره را، در صورتی که سرعت دورانی ω باشد، در هر مورد بیابید.

پاسخ الف:
$$I_x = \sum_i m_i r_i^2 = M \times a^2 + M \times a^2 + m \times b^2 + m \times b^2 = 2mb^2$$

$$K_x = \frac{1}{2} I_x \omega^2 = mb^2 \omega^2$$

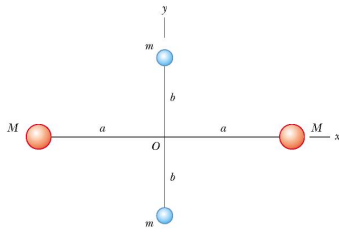
پاسخ ب:
$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = M \times a^2 + M \times a^2 + m \times a^2 + m \times a^2 = 2Ma^2$$

$$K_y = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = Ma^2 \omega^2$$

پاسخ پ:
$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = M \times a^2 + M \times a^2 + m \times b^2 + m \times b^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$K_z = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = (Ma^2 + mb^2) \omega^2$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.



روش کلی پیدا کردن لختی دورانی توزیع جرم های پیوسته

برای محاسبه لختی دورانی اجسام مختلف از روش کلی زیر استفاده می کنیم.

۱ جسم را به المان هایی (اجزا یا *elements*) با لختی دورانی شناخته شده تقسیم میکنیم. این لختی های دورانی دیفرانسیلی (بسیار کوچک) را dI می نامیم.

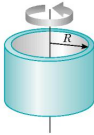
۲ با استفاده از تناسب، جرم المان dm را بر حسب جرم کل جسم M می یابیم.

۳ از لختی دورانی دیفرانسیلی dI انتگرال گیری می کنیم تا لختی دورانی کل پیدا شود. دقت کنید که حدود انتگرال با توجه به توزیع جرم معلوم می شود.

روش المان گیری: مسائل بسیار پیچیده را به مساله های کوچک تر و قابل حل تجزیه کنید. این مسائل کوچک را حل کرده و سپس سعی کنید مساله بسیار پیچیده اولیه را به کمک آنها بازسازی کرده و جواب را به دست آورید.

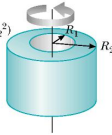
شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

Hoop or cylindrical shell
 $I_{CM} = MR^2$

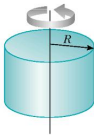


Hollow cylinder

$$I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$

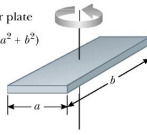


Solid cylinder or disk
 $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$



Rectangular plate

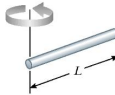
$$I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



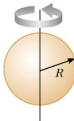
Long thin rod with rotation axis through center
 $I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$



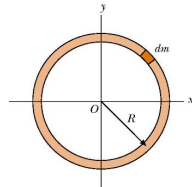
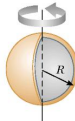
Long thin rod with rotation axis through end
 $I = \frac{1}{3} ML^2$



Solid sphere
 $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$



Thin spherical shell
 $I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$



انواع توزیع جرم (خطی، سطحی و حجمی)



توزیع خطی جرم: در این توزیع، جرم در یک جهت مشخص فضایی گسترده شده است و در دو جهت دیگر، ابعاد جسم بسیار کوچک است.

$$\bar{\lambda} = \frac{M}{L} \quad \text{چگالی خطی جرم متوسط:}$$

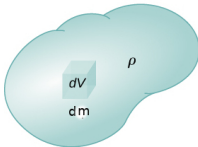
$$\lambda = \frac{dm}{dl} \quad \text{چگالی خطی جرم نقطه ای:}$$



توزیع سطحی جرم: در این توزیع، جرم در دو جهت مشخص فضایی گسترده شده است و در جهت دیگر، اندازه جسم بسیار کوچک است.

$$\bar{\sigma} = \frac{M}{A} \quad \text{چگالی سطحی جرم متوسط:}$$

$$\sigma = \frac{dm}{dA} \quad \text{چگالی سطحی جرم نقطه ای:}$$



توزیع حجمی جرم: در این توزیع، جرم در هر سه جهت فضایی گسترده شده است.

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} \quad \text{چگالی حجمی جرم متوسط:}$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \text{چگالی حجمی جرم نقطه ای:}$$

در مسائلی که در ادامه می آید، باید نوع توزیع جرم را به دقت بدانیم تا بتوانیم لختی دورانی آن را به دست آوریم.

لختی دورانی یک میله همگن حول مرکز جرمش (مثالی از توزیع جرم یک بعدی)

برای پیدا کردن لختی دورانی یک میله حول مرکز جرم آن، مطابق روال سه مرحله ای اشاره شده در بالا، در ابتدا ذره ای به جرم dm را از میله انتخاب میکنیم. مطابق شکل مقابل این ذره در فاصله x از محور y قرار دارد.

با توجه به رابطه مربوطه، لختی دورانی این ذره برابر است با $dI = x^2 dm$ که در آن مقادیر dm و dI بسیار کوچک (دیفرانسیلی) هستند.

جرم dm در طول dx پخش شده در حالی که جرم کل میله M در طول L پخش شده است. یعنی

$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{L}$$

که با توجه به تناسب بالا خواهیم داشت $dm = \frac{M}{L} dx$.

حال dm را از رابطه بالا در رابطه dI قرار داده و از طرفین رابطه انتگرال میگیریم.

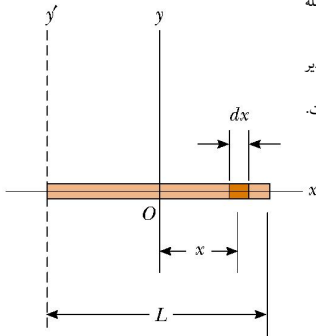
$$I = \int_0^I dI = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{M}{L} dx$$

$$= \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{M}{3L} \left(\left(\frac{L}{2} \right)^3 - \left(-\frac{L}{2} \right)^3 \right)$$

که با توجه به آن لختی دورانی میله به صورت زیر معلوم می شود: $I = \frac{1}{12} ML^2$.

دقت کنید که حدود انتگرال گیری با توجه به توزیع جرم میله روی محور x تعیین شده است.

شکل از ویرایش هشتم مبانی فیزیک هالیدی.



توزیع جرم یک بعدی - تمرین

تمرین: با استفاده از قضیه محورهای موازی و رابطه به دست آمده در اسلاید قبل برای لختی دورانی میله حول مرکز جرم، ثابت کنید که لختی دورانی میله حول یک انتهای آن برابر است با

$$I_{y'} = \frac{1}{3} ML^2$$

تمرین: روش دیگر برای پیدا کردن لختی دورانی حول یک انتهای میله این است که انتگرال بالا را نسبت به محور y' در شکل مقابل محاسبه کنید؛ یعنی، انتگرال زیر را به دست آورید:

$$I_{y'} = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx$$

تمرین: لختی دورانی یک میله ناهمگن، که جرم در آن با فاصله به صورت $\frac{dm}{dx} = C \frac{x^2}{L^3}$ تغییر می کند، را حول مرکز جرم آن بیابید. در اینجا C یک ثابت است. راهنمایی: در این نوع مسائل، المان جرم به شما داده شده است:

$$dm = C \frac{x^2}{L^3} dx$$

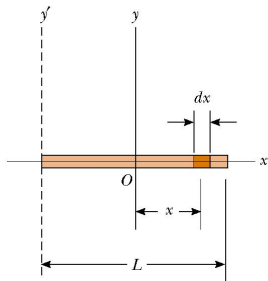
بنابراین به روش زیر عمل کنید:
الف: از عبارت بالا انتگرال گرفته و جرم کل را برحسب پارامتر C بیابید:

$$M = \int dm = \int C \frac{x^2}{L^3} dx$$

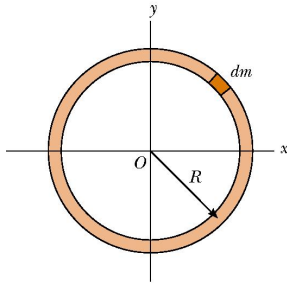
ب: با استفاده از رابطه

$$I = \int x^2 dm$$

لختی دورانی را بیابید.
شکل از ویرایش هشتم مبانی فیزیک هالیدی.



لختی دورانی یک حلقه همگن حول محور مرکزی اش (مثالی از توزیع جرم یک بعدی)



برای پیدا کردن لختی دورانی یک حلقه همگن حول محور مرکزی اش، در اینجا محور عمود بر صفحه کاغذ یعنی z ، مطابق روال سه مرحله ای اشاره شده در بالا عمل می کنیم.

حلقه را به جرم های دیفرانسیلی بسیار کوچک dm تجزیه میکنیم (شکل مقابل را ببینید) . فاصله همه این المان ها از مرکز دوران برابر R است. بنابراین: $dI = R^2 dm$.

با توجه به اینکه R^2 ثابت است لازم نیست که dm را بر حسب R بنویسیم زیرا که انتگرال گیری به راحتی انجام خواهد شد؛ هرچند که در بخش های بعد مقدار dm مربوط به یک حلقه را بر حسب شعاع پیدا خواهیم کرد.

حال از طرفین رابطه لختی دورانی انتگرال میگیریم:

$$I = \int_0^I dI = \int R^2 dm = R^2 \int dm = M R^2$$

در اینجا M جرم کل حلقه است.
بنابراین لختی دورانی یک حلقه حول محور مرکزی اش برابر است با

$$I = M R^2 \quad (1)$$

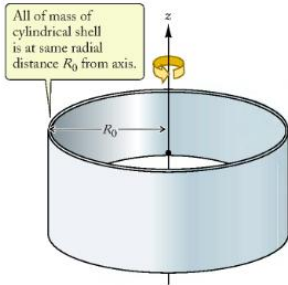
شکل از ویرایش هشتم مبانی فیزیک هالیدی.

مثال از توزیع جرم دو بعدی - تمرین

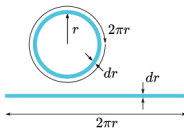
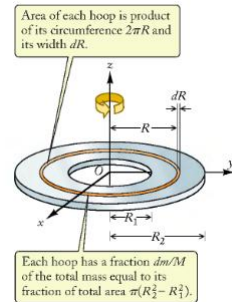
تمرین: استدلال کنید که لختی دورانی یک پوسته استوانه ای حول محور مرکزی اش (شکل مقابل) برابر است با

$$I = M R_0^2. \quad (2)$$

شکل از اوهانیان.



لختی دورانی یک قرص توخالی حول محور مرکزی اش (مثالی از توزیع جرم دو بعدی)



شکل بالا از اوهانیان.

برای پیدا کردن لختی دورانی یک قرص توخالی حول محور مرکزی اش، در اینجا محور z ، مطابق روال سه مرحله ای اشاره شده در بالا عمل می کنیم.

قرص مورد نظر را به حلقه های زیادی تبدیل میکنیم. شکل مقابل را ببینید. با توجه به بخش های قبل (رابطه ۱) می دانیم که لختی دورانی حلقه ای به شعاع R و جرم dm برابر است با

$$dI = R^2 dm. \quad (3)$$

با توجه به شکل مقابل میبینیم که جرم dm در مساحت بسیار کوچک $\pi R dR$ پخش شده است. برای فهم این نکته، حلقه را از یک نقطه دلخواه ببرید. حال یک مستطیل به طول $2\pi R$ و ضخامت dR دارید که مساحت آن برابر است با $2\pi R dR$. از طرفی، جرم کل دیسک M نیز در مساحت $\pi(R_2^2 - R_1^2)$ پخش شده است؛ یعنی مساحت قرص داخلی کم شده است. بنابراین تناسب زیر را داریم:

$$dm = \frac{\pi R dR}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} M = \frac{R dR}{(R_2^2 - R_1^2)} M$$

حال از رابطه ۳ انتگرال میگیریم:

$$I = \int_0^I dI = \int R^2 dm = \int R^2 \frac{\pi M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} R dR = \frac{\pi M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} R^3 dR$$

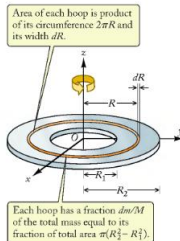
$$I = \frac{\pi M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left(\frac{1}{4} R^4 \right)_{R_1}^{R_2} = \frac{M}{4(R_2^2 - R_1^2)} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{M}{4} (R_2^2 + R_1^2)$$

دقت کنید که حدود انتگرال، یعنی $\int_{R_1}^{R_2}$ ، را حدود جرم تعیین میکند.

پس لختی دورانی یک قرص توخالی حول محور مرکزی اش برابر است با

$$I = \frac{M}{4} (R_2^2 + R_1^2) \quad (4)$$

تمرین



تمرین: لختی دورانی قرص توخالی ناهمگن را، که چگالی سطحی آن به صورت

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = C R^2$$

تغییر می کند، به دست آورید (شکل بالا).

تمرین: ثابت کنید که لختی دورانی یک استوانه توخالی حول محور مرکزی اش (شکل پایین سمت چپ) برابر است با

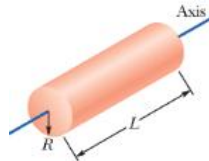
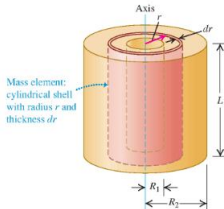
$$I = \frac{M}{2} (R_2^2 + R_1^2) \quad (5)$$

که R_1 و R_2 شعاع های داخلی و خارجی استوانه اند.

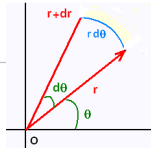
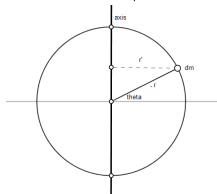
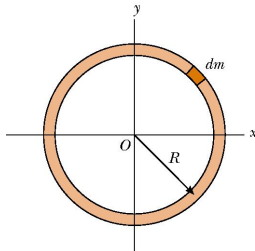
تمرین: با استفاده از رابطه ۵ ثابت کنید که لختی دورانی یک استوانه توپر حول محور مرکزی اش (شکل پایین) نیز برابر است با

$$I = \frac{M}{2} R^2 \quad (6)$$

که در آن R شعاع استوانه است.
شکل ها از اوهانیان.



لختی دورانی یک حلقه حول یک قطر دلخواهش (مثالی از توزیع جرم یک بعدی)



برای پیدا کردن لختی دورانی یک حلقه حول یک قطر دلخواهش، در اینجا مثلاً محورهای x و y مطابق روال سه مرحله ای اشاره شده در بالا عمل می‌کنیم.

با توجه به رابطه لختی دورانی یک ذره نقطه ای، لختی دورانی جرم بسیار کوچک dm حول محور دوران برابر است با

$$dI = r'^2 dm \quad (۷)$$

که در آن $r' = r \cos \theta$ فاصله از محور دوران است. شکل پایین سمت چپ را ببینید. المان جرم dm در طول $dl = r d\theta$ پخش شده در حالی که کل جرم حلقه M در محیط دایره $2\pi r$ پخش شده است. بنابراین تناسب زیر را داریم

$$\frac{2\pi r}{M} dm = \frac{M}{2\pi r} d\theta$$

که از آن می‌توانیم المان جرم dm را به صورت $dm = \frac{M}{2\pi r} d\theta$ بیابیم.

حال از طرفین رابطه ۷ انتگرال میگیریم:

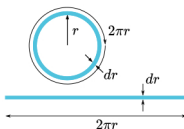
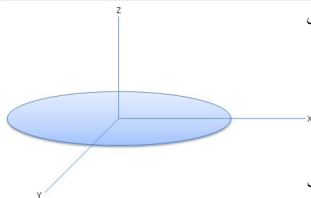
$$\begin{aligned} I &= \int_0^I dI = \int_0^{2\pi} r'^2 dm = \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \theta \left(\frac{M}{2\pi r} d\theta \right) \\ &= \frac{Mr^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{Mr^2}{2\pi} \frac{1}{2} (\theta + \sin 2\theta) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} M R^2 \end{aligned}$$

بنابراین لختی دورانی یک حلقه حول یک قطرش برابر است با

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \quad (۸)$$

شکل بالا از ویرایش هشتم مبانی فیزیک هالیدی.

لختی دورانی یک قرص حول محور گذرنده از قطرش (مثالی از توزیع جرم دو بعدی)



فرض کنید که قرصی، مانند شکل مقابل، حول محور x و یا y می چرخد. در این صورت می توان قرص مورد نظر را به تعداد زیادی حلقه که حول قطر خود می چرخند تقسیم کرد.

برای چنین حلقه هایی با توجه به رابطه ۸ داریم

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm \quad (9)$$

که در آن r و dm به ترتیب شعاع و جرم حلقه های دیفرانسیلی اند.

المان جرم dm در مساحت $2\pi r dr$ پخش شده در حالی که کل جرم حلقه M در مساحت

πR^2 پخش شده است. بنابراین تناسب زیر را داریم

$$\frac{2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{dm}{M}$$

که از آن می توانیم المان جرم dm را به صورت $dm = \frac{2M}{R^2} r dr$ بیابیم.

حال با استفاده از المان جرم بالا از رابطه ۹ انتگرال میگیریم:

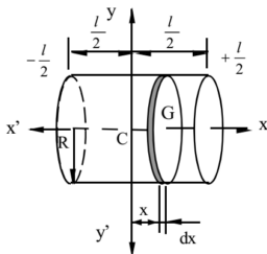
$$I = \int_0^R dI = \int_0^R \frac{1}{2} r^2 dm = \int_0^R \frac{1}{2} r^2 \frac{2M}{R^2} r dr = \frac{M}{R^2} \left(\frac{r^4}{4} \right)_0^R$$

که در آن حدود انتگرال با توجه به توزیع جرم مشخص شده است. نتیجه نهایی، پس از کمی محاسبه، به صورت زیر است:

$$I = \frac{1}{4} M R^2 \quad (10)$$

شکل ها از نت.

لختی دورانی یک استوانه توپر حول محور گذرنده از قطر اصلی اش (مثالی از توزیع جرم سه بعدی)



استوانه مورد نظر را به تعداد بسیار زیادی دیسک تبدیل میکنیم. شکل مقابل را ببینید که یکی از دیسک ها به ضخامت dx و به فاصله x از مبدا قرار گرفته است.

با توجه به رابطه $I_{CM} = \frac{1}{2} R^2 dm$ ، لختی دورانی این دیسک حول قطرش برابر است با $dI_{CM} = \frac{1}{2} R^2 dm$. هرچند که ما به دنبال لختی دورانی حول مبدا مختصات هستیم، این المان را میتوانیم با استفاده از قضیه محورهای موازی به صورت زیر بیابیم:

$$dI = dI_{CM} + x^2 dm = \left(\frac{1}{2} R^2 + x^2 \right) dm \quad (11)$$

جرم دیسک دیفرانسیلی dm در ضخامت dx پخش شده در حالی که جرم کل استوانه M در طول L پخش شده است. بنابراین با استفاده از تناسب داریم:

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

حال از رابطه ۱۱ انتگرال میگیریم:

$$I = \int_0^L dI = \int_0^L \left(\frac{1}{2} R^2 + x^2 \right) dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{1}{2} R^2 + x^2 \right) \frac{M}{L} dx$$

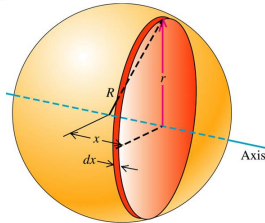
$$I = \frac{M R^2}{2L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx + \frac{M}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx$$

که نتیجه نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2 \quad (12)$$

شکل از نت.

لختی دورانی یک پوسته نازک کروی (مثالی از توزیع جرم دو بعدی)



منبع شکل: فیزیک دانشگاهی سرز.

مطابق شکل مقابل پوسته نازک کروی مورد نظر را به تعداد زیادی حلقه به شعاع $r = R \sin \theta$ و جرم dm تقسیم میکنیم.

لختی دورانی هر حلقه، بنا به رابطه ۱، برابر با عبارت زیر می باشد:

$$dI = r^2 dm \quad (۱۳)$$

جرم کل پوسته M بر روی مساحت کره $4\pi R^2$ توزیع شده است، در حالی که جرم دیفرانسیلی حلقه dm بر روی مساحت دیفرانسیلی $2\pi r(Rd\theta)$ پخش گردیده است. برای فهم رابطه اخیر، دقت کنید که محیط حلقه برابر $2\pi r$ و ضخامت آن برابر $Rd\theta$ می باشد. از تناسب یاد شده در این قسمت داریم:

$$dm = \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi r(Rd\theta)$$

حال از رابطه ۱۳ انتگرال میگیریم و dm را از رابطه بالا جایگزین میکنیم:

$$I = \int_0^I dI = \int r^2 dm = \int (R \sin \theta)^2 \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi R \sin \theta (Rd\theta)$$

$$I = \frac{MR^2}{2} \int \sin^3 \theta d\theta = \frac{MR^2}{2} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

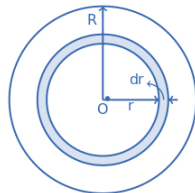
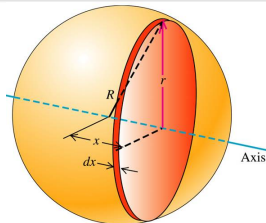
اگر تغییر متغیر $u = \cos \theta$ را به کارگیریم، انتگرال بالا به راحتی به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$I = -\frac{MR^2}{2} \int_1^{-1} (1 - u^2) du = -\frac{MR^2}{2} \left(u - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^{-1}$$

به یاد داشته باشید که $du = -\sin \theta d\theta$. پس از کمی محاسبه، نتیجه انتگرال اخیر را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$I = \frac{2}{3} MR^2 \quad (۱۴)$$

لختی دورانی یک کره توپر (مثالی از توزیع جرم سه بعدی)

منبع شکل: فیزیک دانشگاهی
سرز.

می توان یک کره توپر را به تعداد زیادی قرص توپر به شعاع r تقسیم کرد. شکل مقابل، بالا، را ببینید.

با توجه به رابطه ۴، المان لختی دورانی قرص برابر است با

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm \quad (۱۵)$$

که در آن dm جرم دیفرانسیلی قرص است. با توجه به شکل بالا در می یابیم که $r^2 = R^2 - x^2$

جرم dm در حجم $\pi r^2 dx$ توزیع شده است. در اینجا πr^2 مساحت قرص و dx ضخامت آن است. از طرف دیگر، جرم کل کره M در حجم $\frac{4}{3}\pi R^3$ قرار دارد. بنابراین:

$$dm = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \pi r^2 dx = \frac{3M}{4R^3} (R^2 - x^2) dx.$$

با انتگرال گیری از رابطه ۱۵ داریم:

$$I = \int_0^I dI = \int r^2 dm = \int \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx$$

$$I = \frac{2}{5} MR^2.$$

که نتیجه آن برابر است با

تمرین: لختی دورانی یک کره توپر را با تقسیم کره مورد نظر به تعداد بسیار زیادی پوسته نازک کروی بدست آورید. شکل پایین را ببینید.

تمرین: لختی دورانی یک کره توپر همسانگرد را در صورتی که تغییرات چگالی حجمی به صورت $\frac{dm}{dV} = \rho_0 \frac{r}{R}$ باشد به دست آورید. راهنمایی: برای یک پوسته کروی به شعاع r و ضخامت dr (که لختی دورانی آن را از پیش می دانیم)، المان حجم برابر است با $dV = 4\pi r^2 dr$.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اساسی لختی دورانی و نحوه محاسبه آن را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

- ۱ برداشت فیزیکی شما از لختی دورانی چیست؟
- ۲ تعریف لختی دورانی را برای یک جسم نقطه ای نسبت به یک محور دوران بنویسید.
- ۳ تعریف لختی دورانی را برای یک سیستم ذره نسبت به یک محور دوران بنویسید.
- ۴ تعریف لختی دورانی را برای یک محیط پیوسته نسبت به یک محور دوران بنویسید.
- ۵ روش کلی پیدا کردن لختی دورانی (سه مرحله) را بیان کنید.
- ۶ اگر چگالی جسم ثابت باشد، چطور می توان با استفاده از تناسب، مقدار المان جرم را یافت؟
- ۷ اگر چگالی جسم ثابت نباشد، چطور می توان مقدار المان جرم را یافت؟
- ۸ قضیه محورهای موازی را بیان کنید. کاربرد این قضیه چیست؟

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

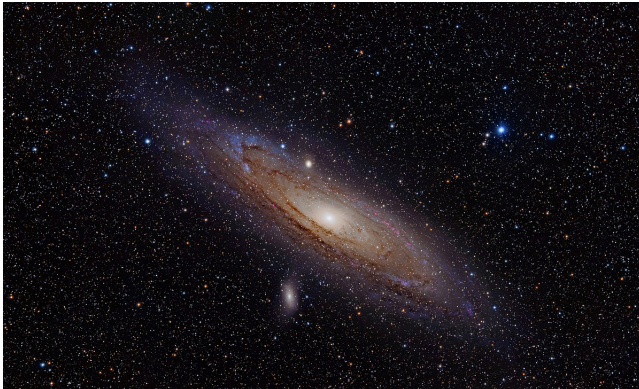
فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ” درونی سازی ” مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات این درس (که بیشتر در متن درس مطرح شده اند) محک زده و تقویت کنید.

تمرین

تمرین: توزیع جرم در کهکشان های دیسکی، مانند کهکشان راه شیری و یا کهکشان آندرومدا (که تصویر آن در اینجا آورده شده است)، به صورت توانی زیر است:

$$\Sigma = \Sigma_0 e^{-r/R_d}$$

که در آن r شعاع هر نقطه فرضی تا مرکز کهکشان، R_d شعاع مشخصه دیسک کهکشان و Σ_0 چگالی سطحی مرکزی کهکشان است. لختی دورانی این نوع کهکشان ها را، حول محور اصلی و همچنین محور گذرنده از قطر آنها، بیابید. راهنمایی: کهکشان مورد نظر را به تعداد زیادی حلقه هم مرکز تقسیم کنید. کهکشان آندرومدا- منبع عکس: ویکی پدیا



مبحث بعدی: قانون دوم نیوتن در حالت دورانی



با دانستن مفهوم لختی دورانی، حال می توانیم قانون دوم نیوتن در حالت دورانی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

در اینجا بردار $\vec{\tau}$ نشان دهنده گشتاور است.

در جلسه آینده این قانون را به دست می آوریم. سپس، از این قانون برای بررسی دینامیک اجسام دورانی استفاده خواهیم کرد.

شکل از مبانی فیزیک، ویرایش هشتم.

مراجع

- ❶ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❷ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

کلاس های دیگر فیزیک مکانیک

کلاس های درس فیزیک یک دانشگاه صنعتی شریف (مثلا کلاس درس دکتر محمد رضا اجتهادی و یا دکتر محمود بهمن آبادی) را می توانید از مرکز آموزش های الکترونیک دانشگاه صنعتی شریف (و یا حتی از سایت مکتب خونه) دریافت کنید.
<http://ocw.sharif.edu/>

کلاس درس دکتر والتر لوین از دانشگاه MIT در مرکز آموزش های الکترونیک این دانشگاه و یوتیوب:
<https://ocw.mit.edu/index.htm>
<https://www.youtube.com/watch?v=X9c0MRooBzQ>

The screenshot shows the MIT OpenCourseWare website in Persian. The header includes the MIT logo and navigation links. A search bar is present. Below, there's a list of courses under the heading 'فصل های آموزشی' (Educational Chapters). The list includes courses like 'فصل 1: واحدها، ابعاد، و استدلال مقیاسی' (Chapter 1: Units, Dimensions, and Scaling Arguments) and 'فصل 2: حرکت یک جسم' (Chapter 2: Motion of a Body). Each course entry has a brief description and a link to the course page.

The screenshot shows a YouTube video player. The video is titled 'Lec 01: Units, Dimensions, and Scaling Arguments | 8.01 Classical Mechanics (Walter Lewin)'. The video is 10 minutes and 34 seconds long. The video shows a man in a blue shirt standing in front of a blackboard, gesturing with his hands while speaking. The video player interface includes a search bar, a play button, and various controls.

The screenshot shows a website with a map of Sharif University of Technology on the left and a list of courses on the right. The map shows the university's location in Tehran. The list of courses includes 'فیزیک مکانیک' (Mechanics) and 'فیزیک الکترونیک' (Electronics). The website also features a search bar and a navigation menu.

با سپاس از توجه شما