

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

تبدیل های یکانی در مکانیک کوانتومی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ تبدیل های یکانی در مکانیک کوانتومی
- ویژگی های تبدیلات یکانی
- تبدیل های یکانی در مکانیک کوانتومی

آنچه گذشت: تغییر پایه های فضا در مکانیک کوانتومی

- قضیه: اگر دو مجموعه کامل و یکامتعامد (مانند $|a_i\rangle$ و $|b_i\rangle$) از کت های پایه داشته باشیم که فضای هیلبرت یکسانی را توصیف می کنند، آنگاه یک عملگر یکانی $U = \sum_k |b_k\rangle \langle a_k|$ وجود دارد به طوری که $|b_i\rangle = U|a_i\rangle$

تعریف عملگر یکانی: عملگر یکانی (unitary) عملگری است که در شرایط زیر صدق کند. به عبارت دیگر مزدوج هرمیتی و وارون یک عملگر یکانی با هم برابرند:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \Rightarrow U^\dagger = U^{-1}$$

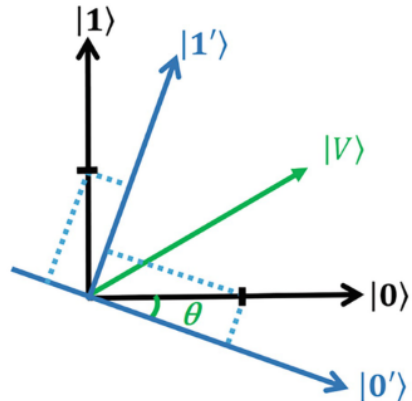
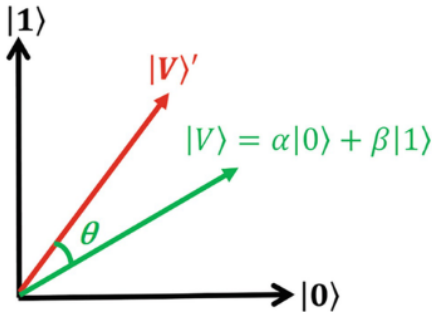
حالت سیستم در پایه های جدید را می توان با استفاده از رابطه (Old) $(U^\dagger)$ = (New) از پایه های قدیم به دست آورد.

- تبدیل تشابهی یک ماتریس مانند X را به صورت $X' = U^\dagger X U$ می نویسند که در آن X' ماتریس در دستگاه جدید، X ماتریس در دستگاه قدیم و U ماتریس یکانی است.

- قضیه: دو مجموعه یکامتعامد $\{|a_i\rangle\}$ و $\{|b_i\rangle\}$ را در نظر بگیرید که توسط رابطه $U|a_i\rangle = |b_i\rangle$ به هم مربوط می شوند. حال می توان با دانستن ماتریس یکانی U تبدیل یکانی عملگر A را به صورت UAU^{-1} ساخت که ویژه مقادیر یکسانی با عملگر A دارد. می گوئیم این دو مشاهده پذیر یکانی-همسان (unitary – equivalent) هستند؛ یعنی مجموعه $\{|b_i\rangle\}$ ویژه کت های عملگر UAU^{-1} با ویژه مقادیر a_i هستند.

اهداف این جلسه

- در این جلسه می خواهیم درباره ویژگی های تبدیلات یکانی بحث کنیم. همچنین می خواهیم بدانیم چرا این تبدیلات در مکانیک کوانتومی از اهمیت اساسی برخوردار هستند. مثلاً عملگرهای جابجایی و تحول زمانی و چند عملگر بسیار مهم دیگر با استفاده از تبدیلات یکانی توصیف می شوند. همچنین، تقارن های هامیلتونی توسط گروهی از تبدیلات یکانی بیان می شوند.



تبدیلات یکانی

یک تبدیل یکانی تبدیلی است که وارون آن با مزدوج هرمیتی اش برابر باشد:

$$U^{-1} = U^{\dagger}$$

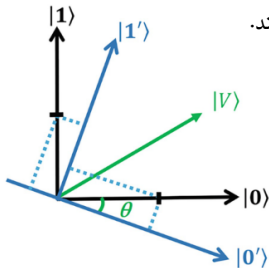
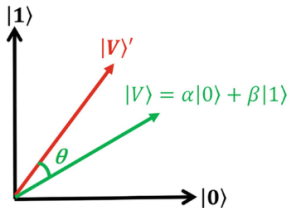
البته گاهی اوقات این تعریف به صورت دیگری هم نوشته می شود. یادآوری می کنیم که وارون یک عملگر، عملگری است که با ضرب آن در عملگر اصلی به عملگر همانی ۱ برسیم:

$$X^{-1}X = XX^{-1} = 1$$

حال با توجه به تعریف ابتدایی عملگر یکانی، به تعریف معادلی برای یکانی بودن می رسم:

$$U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = 1$$

پس این دو تعریف معادل هستند.



ویژگی های تبدیلات یکانی

- حاصلضرب دو تبدیل یکانی هم یکانی است.

اثبات: دو عملگر یکانی U و V را در نظر بگیرید. با توجه به یکانی بودن این عملگرها می توان به راحتی یکانی بودن حاصلضرب شان را نشان داد:

$$(UV)^\dagger UV = V^\dagger U^\dagger UV = V^\dagger 1 V = V^\dagger V = 1$$

- معادله ویژه مقداری عملگر یکانی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$U|u_i\rangle = u_i|u_i\rangle$$

فرض می کنیم که ویژه کت های $|u_i\rangle$ نرمال هستند. توجه کنید که عملگر یکانی در حالت کلی هرمیتی نیست؛ بنابراین ویژه مقادیر معادله ویژه مقداری بالا می توانند در حالت کلی مختلط باشند (و معمولاً مختلط هستند!). دوگان این معادله را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\langle u_i|U^\dagger = u_i^* \langle u_i|$$

حال از ضرب این دو معادله ویژه مقداری در هم داریم:

$$\langle u_i|U^\dagger U|u_i\rangle = u_i^* u_i \langle u_i|u_i\rangle \Rightarrow \langle u_i|u_i\rangle = u_i^* u_i \langle u_i|u_i\rangle \Rightarrow u_i^* u_i = 1$$

این نتیجه بدان معنی است که ویژه مقادیر عملگر یکانی اعدادی با اندازه واحد هستند: $|u_i| = 1$. می دانیم که هر عدد مختلط با اندازه واحد را می توان به شکل کلی زیر نوشت:

$$u_i = e^{i\theta_i} = \cos \theta_i + i \sin \theta_i \quad \theta_i \in \mathcal{R}$$

ویژگی های عملگر یکانی

- نتیجه: ویژه مقادیر عملگر یکانی اعدادی مختلط با اندازه واحد هستند. مقایسه کنید با ویژه مقادیر عملگرهای هرمیتی که اعدادی حقیقی با اندازه های دلخواه اند.

- توجه: $U^\dagger |u_i\rangle = e^{-i\theta_i} |u_i\rangle$

اثبات:

$$|u_i\rangle = U^\dagger U |u_i\rangle = U^\dagger (U |u_i\rangle) = U^\dagger e^{i\theta_i} |u_i\rangle = e^{i\theta_i} (U^\dagger |u_i\rangle)$$

و بنابراین $U^\dagger |u_i\rangle = e^{-i\theta_i} |u_i\rangle$ از اینجا می توان نتیجه گرفت:

$$\langle u_i | U = e^{i\theta_i} \langle u_i |$$

- در معادله ویژه مقداری عملگر یکانی، ویژه کت های متناظر با ویژه مقادیر متفاوت بر هم عمودند.

اثبات: معادله ویژه مقداری برای دو ویژه مقدار متفاوت را در نظر بگیرید:

$$\langle u_j | (U |u_i\rangle) = u_i \langle u_j | u_i\rangle \quad (\langle u_j | U) |u_i\rangle = u_j \langle u_j | u_i\rangle$$

با کم کردن این دو معادله از هم داریم:

$$0 = (u_i - u_j) \langle u_j | u_i\rangle$$

- در نتیجه برای دو ویژه مقدار متفاوت خواهیم داشت $\langle u_j | u_i\rangle = 0$. و یا به عبارت دیگر، در معادله ویژه مقداری عملگر یکانی، ویژه کت های متناظر با ویژه مقادیر متفاوت بر هم عمودند.

اعمال تبدیلات یکانی به حالت های کوانتومی

• از این به بعد می خواهیم نتیجه اعمال تبدیلات یکانی به حالت های کوانتومی مختلف و یا عملگرها را بررسی کنیم.

• تبدیلات یکانی ضرب داخلی ها را حفظ می کنند.
اثبات: حاصل اعمال یک تبدیل یکانی به دو حالت متفاوت را در نظر بگیرید:

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad |\phi'\rangle = U|\phi\rangle$$

حالا به نتیجه ضرب داخلی این دو حالت دقت کنید:

$$\langle\psi'|\phi'\rangle = \langle\psi'|U^\dagger U|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$$

• توجه: اهمیت اساسی تبدیلات یکانی در مکانیک کوانتومی در همین نکته نهفته است: تبدیلات یکانی مقدار ضرب داخلی را حفظ می کنند. استفاده از تبدیلات یکانی به ما اجازه می دهد که یک حالت مشخص را تحول دهیم، در فضا جابجا کنیم و ... بدون اینکه نرمال بودن حالت را تغییر دهیم. همین!

• یادآوری: تبدیلات متعامد (orthogonal transformation) مقدار ضرب داخلی بردارها در فضای سه بعدی حقیقی را تحت دوران و ... حفظ می کردند. تبدیلات یکانی تعمیم تبدیلات متعامد در فضای مختلط (فضای هیلبرت) هستند.

اعمال تبدیلات یکانی به عملگرهای کوانتومی

● تبدیل عملگرها توسط ماتریس های یکانی را با علامت پرایم نشان می دهیم. فرض کنید که پایه های فضا را با $|a_i\rangle$ نشان می دهیم که تحت تبدیل یکانی به پایه های $|a'_i\rangle = U|a_i\rangle$ تبدیل می شوند.

تعریف: می گوئیم عملگر A' از تبدیل یکانی عملگر A به دست آمده است اگر عناصر ماتریس A' در پایه های $|a'_i\rangle$ برابر با عناصر ماتریس A در پایه های $|a_i\rangle$ باشند؛ و یا

$$\langle a'_i | A' | a'_j \rangle = \langle a_i | A | a_j \rangle$$

البته مرسوم این است که این تعریف را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\langle a'_i | A' | a'_j \rangle = \langle a_i | U^\dagger A' U | a_j \rangle = \langle a_i | A | a_j \rangle$$

$$A = U^\dagger A' U \quad \Leftrightarrow \quad A' = U A U^\dagger = U A U^{-1} \quad \text{و یا}$$

رابطه بالا اساس تبدیل یکانی عملگرها را به ما می دهد. این رابطه را با تبدیل تشابهی معرفی شده در جلسه پیش مقایسه کنید.

ویژگی های تبدیل یکانی عملگرها

• اگر A یک عملگر هرمیتی باشد، آنگاه تبدیل یکانی آن نیز هرمیتی است.

اثبات: $(A')^\dagger = (UAU^\dagger)^\dagger = (U^\dagger)^\dagger A^\dagger U^\dagger = UAU^\dagger = A'$

• توان های یک عملگر مانند A چطور تحت تبدیل یکانی تبدیل می شوند؟

پاسخ: $(A')^m = (A^m)'$

اثبات:

$$(A')^m = (UAU^\dagger)(UAU^\dagger) \dots (UAU^\dagger)(UAU^\dagger) = UA^m U^\dagger = (A^m)'$$

در واقع با توجه به اینکه توابع عملگری در مکانیک کوانتومی با استفاده از بسط توانی آنها تعریف می شوند، می توان اثبات کرد که تبدیل یکانی هر تابعی از یک عملگر برابر است با تابع تبدیل یکانی آن عملگر:

$$[f(A)]' = f(A')$$

• همچنین در جلسه پیش اثبات کردیم که عملگرهای یکانی-همسان ویژه مقادیر (طیف) یکسانی دارند:

$$A |a_i\rangle = a_i |a_i\rangle \Rightarrow (UAU^{-1}) |b_i\rangle = a_i |b_i\rangle$$

رابطه تبدیلات یکانی با عملگرهای هرمیتی

- فرض کنید که $A = A^\dagger$ یک عملگر هرمیتی است. آنگاه عملگر $T \equiv e^{iA}$ یک عملگر یکانی است.
اثبات:

$$T^\dagger = (e^{iA})^\dagger = \left(\sum_n \frac{(iA)^n}{n!} \right)^\dagger = \sum_n \frac{(-iA^\dagger)^n}{n!} = \sum_n \frac{(-iA)^n}{n!} = e^{-iA}$$

حال می توان نوشت:

$$T^\dagger T = e^{-iA} e^{iA} = 1 \qquad TT^\dagger = e^{iA} e^{-iA} = 1$$

یعنی T یکانی است. این نتایج را با توجه به جابجا شدن A با خودش و فرمول بیگر-کمپبل-هاسدورف (Baker – Campbell – Hausdorff formula) به دست آورده ایم.

- مثال های زیادی در مکانیک کوانتومی وجود دارد که عملگر یکانی با استفاده از یک عملگر هرمیتی و به صورت $T \equiv e^{iA}$ تعریف می شود. مثال هایی از این وضعیت (مانند عملگر جابجایی) را در درس های بعد خواهیم دید.

عملگرهای یکانی بینهایت کوچک

عملگر یکانی $U(\epsilon)$ را در نظر بگیرید که به پارامتر حقیقی بسیار کوچک ϵ وابسته است. این وابستگی به گونه ای است که وقتی ϵ به سمت صفر میل می کند، عملگر $U(\epsilon)$ به عملگر همانی تبدیل می شود:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} U(\epsilon) = \hat{1}$$

در حالت کلی می توان چنین عملگری را تا مرتبه اول ϵ به صورت زیر بسط داد:

$$U(\epsilon) = \hat{1} + \epsilon G + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

که مزدوج مختلط آن به صورت $U^\dagger(\epsilon) = \hat{1} + \epsilon G^\dagger + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ نوشته می شود. البته شرط یکانی بودن عملگر $U(\epsilon)$ باید حفظ شود، یعنی

$$U(\epsilon)U^\dagger(\epsilon) = \hat{1} + \epsilon(G + G^\dagger) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \hat{1}$$

در نتیجه عملگر $G = -G^\dagger$ یک عملگر پادهرمیتی است. البته ما معمولاً ترجیح می دهیم که با عملگرهای هرمیتی کار کنیم؛ بنابراین عملگرهای یکانی بینهایت کوچک را معمولاً از طریق رابطه $F = iG$ تعریف می کنیم:

$$U(\epsilon) = \hat{1} - i \epsilon F + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

در جلسات بعد به وفور از این ویژگی عملگرهای یکانی بینهایت کوچک استفاده خواهیم کرد. مثلاً مبحث عملگر تحول زمانی را ببینید:

$$U(t + dt, t) = \hat{1} - i \frac{H(t) dt}{\hbar} + \dots$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید عملگر یکانی و مفهوم آن را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ دو تعریف معادل عملگر یکانی را بیان کنید.
- ۲ ویژه مقدارهای یک عملگر یکانی چه ویژگی هایی دارند؟ ویژه بردارها چگونه؟
- ۳ توضیح دهید که چرا عملگرهای یکانی در مکانیک کوانتومی اهمیت دارند.
- ۴ یک حالت مشخص تحت تبدیل یکانی چگونه تغییر می کند؟ رابطه مربوطه را بنویسید.
- ۵ چگونه می توان با استفاده از یک عملگر هرمیتی یک عملگر یکانی ساخت؟
- ۶ منظور از عملگرهای یکانی بینهایت کوچک چیست؟
- ۷ درباره کاربرد عملگرهای یکانی بینهایت کوچک در مکانیک کوانتومی تحقیق کنید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراغوش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

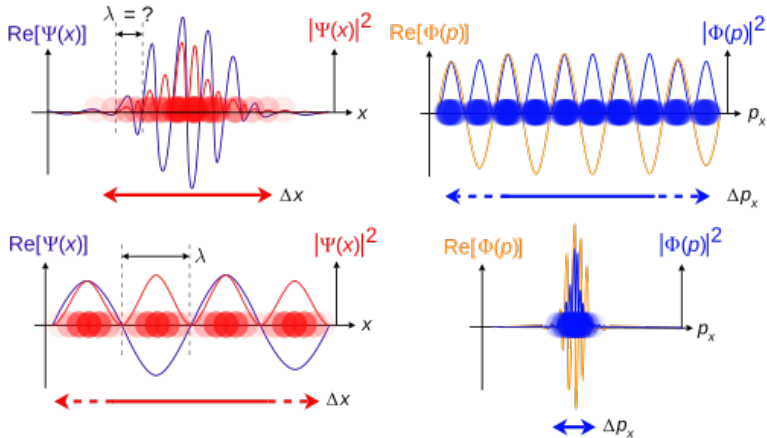


تمرین ها: زمان تحویل ۳۰ آذرماه

- لطفا تمرین های ۲۴ تا ۲۶ از فصل اول کتاب ساکورایی را پاسخ دهید.
- لطفا تمرین ها و پرسش های بالا را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: موقعیت و تکانه در مکانیک کوانتومی

- در جلسه بعد درباره موقعیت ذره، تکانه آن و مفهوم جابجایی در مکانیک کوانتومی بحث می کنیم.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما

