

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

مشاهده پذیرهای ناسازگار در مکانیک کوانتومی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



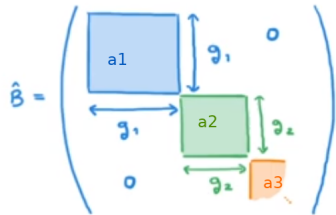
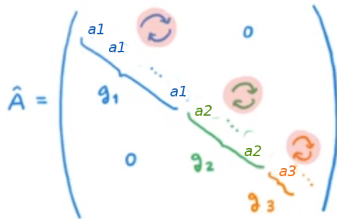
دانشگاه هرمزگان

- حسین شناور مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

- ۱ مشاهده پذیرهای ناسازگار در مکانیک کوانتومی
- مشاهده پذیرهای ناسازگار
- اندازه گیری بر روی مشاهده پذیرهای ناسازگار

آنچه گذشت: مشاهده پذیرهای سازگار در مکانیک کوانتومی

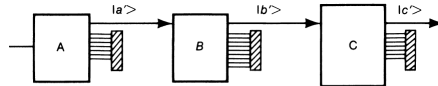
- قضیه: فرض کنید که A و B دو مشاهده پذیر سازگارند و ویژه مقادیر A غیر تبهگن هستند. آنگاه عناصر ماتریس $\langle a_j | B | a_i \rangle$ قطری هستند.
- اگر عملگرهای هرمیتی A و B جابجا شوند $[A, B] = 0$ ، آنگاه همیشه (حتی در حالت تبهگن) می توان ویژه کت هایی یکامتعامدی را در فضای حالت یافت که این دو عملگر را به صورت همزمان قطری کنند.
- قضیه: اگر عملگرهای هرمیتی A و B ویژه پایه های مشترکی داشته باشند آنگاه A و B جابجا می شوند.



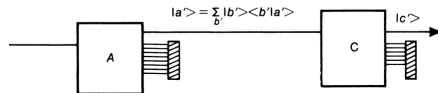
اهداف این جلسه

چرا مشاهده پذیرهای سازگار مهم هستند؟ پاسخ: چون ویژگی های فیزیکی را که به مشاهده پذیرهای سازگار نسبت می دهیم می توان به صورت همزمان (مشترک) توصیف کرد. در نتیجه اندازه گیری های پیاپی بر روی مشاهده پذیرهای سازگار اختلالی در یکدیگر به وجود نخواهد آورد.

ولی اگر دو مشاهده پذیر سازگار نباشند، مانند موقعیت و تکانه ذره، آنگاه ناممکن است که آن دو را به صورت همزمان با دقت دلخواه اندازه گیری کرد. در واقع اندازه گیری های دو مشاهده پذیر ناسازگار با یکدیگر اختلال ایجاد خواهند کرد. این وضعیت منجر به اصل عدم قطعیت می شود که یکی از شگفت ترین ویژگی های مکانیک کوانتومی است. در این جلسه ما به موضوع مشاهده پذیرهای ناسازگار می پردازیم و در جلسه بعد رابطه عدم قطعیت را معرفی خواهیم کرد.



(a)



تعریف مشاهده پذیرهای ناسازگار

• دو مشاهده پذیر را سازگار می نامند اگر آن دو با هم جابجا شوند و ناسازگار می نامند اگر با هم جابجا نشوند:

$$[A, B] = 0 \quad [A, B] \neq 0$$

• اولین نکته درباره مشاهده پذیرهای ناسازگار این است که آن ها نمی توانند ویژه کت های مشترکی تشکیل دهند که به صورت کامل فضا را بسط دهند. برای اثبات این نکته از برهان خلف استفاده می کنیم.

• اثبات به روش برهان خلف: فرض کنید که مجموعه ای از ویژه کت های مشترک برای دو مشاهده پذیر ناسازگار A و B موجودند که فضا را به صورت کامل بسط می دهند:

$$|\psi\rangle = \sum_i \sum_j c_{ij} |a_i, b_j\rangle$$

بنابراین می توان نوشت:

$$(AB - BA) |\psi\rangle = \sum_i \sum_j c_{ij} (a_i b_j - a_j b_i) |a_i, b_j\rangle = 0$$

ولی این نتیجه با فرض ناسازگاری دو مشاهده پذیر A و B در تضاد است. پس مشاهده پذیرهای ناسازگار نمی توانند ویژه کت های مشترک کامل تشکیل دهند.

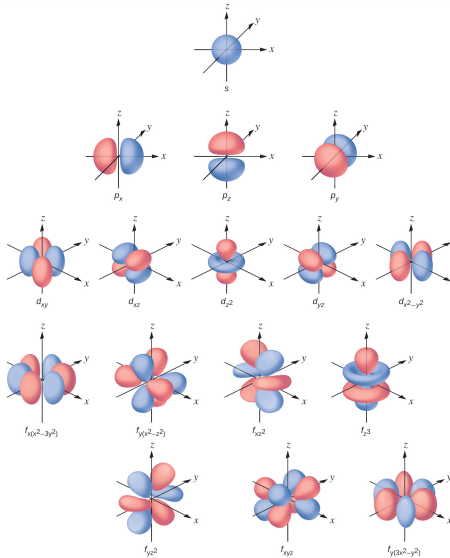
یک استثنای جالب!

البته ممکن است که یک زیرفضا مانند $|\psi\rangle_1$ از فضای حالت کوانتومی موجود باشد که برای آن رابطه

$$(AB - BA) |\psi\rangle_1 = 0$$

برقرار باشد؛ با وجودی که این رابطه برای تمام فضا برقرار نیست. مثال: در مساله اندازه حرکت زاویه ای کوانتومی، حالت $l = 0$ متناظر با حالت اربیتال s است (شکل مقابل را ببینید). برای چنین حالتی، ویژه مقادیر هر دو عملگر L_x و L_z صفر است (به تقارن کروی اربیتال دقت کنید)؛ با این وجود عملگرهای L_x و L_z در حالت کلی جابجا نمی شوند.

توجه: دو عملگر ناسازگار A و B می توانند در زیرفضای $|\psi\rangle_1$ ویژه کت مشترک داشته باشند. هرچند در بقیه فضای حالت تعریف ویژه کت های مشترک برای این دو عملگر ممکن نیست.



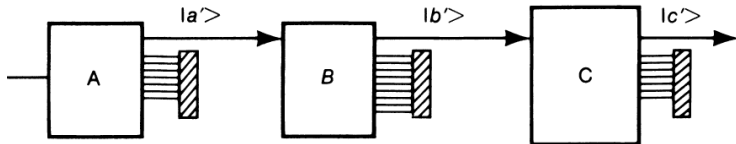
باز هم اشتراک-گراخ

- حالا می خواهیم به آزمایش اشتراک-گراخ برگردیم و برخی نتایج آن را به صورت دقیقتر توضیح دهیم. فرض کنید A، B و C سه مشاهده پذیر دلخواه (سازگار و یا ناسازگار) هستند.

- آزمایش های متوالی شکل زیر را در نظر بگیرید. در هر آزمایش کت حالت رمبش کرده و به یکی از ویژه حالت ها می رود (به ترتیب به ویژه حالت $|a'\rangle$ ، $|b'\rangle$ و $|c'\rangle$) و بقیه ویژه کت ها در هر حالت فیلتر می شوند. با فرض اینکه حالت ها نرمال باشند، ما می خواهیم احتمال یافتن کت $|c'\rangle$ به عنوان خروجی را بیابیم.

- پاسخ: احتمال یافتن ویژه کت $|b'\rangle$ در ویژه حالت $|a'\rangle$ برابر است با $|\langle b' | a' \rangle|^2$. همچنین احتمال یافتن ویژه کت $|c'\rangle$ در ویژه حالت $|b'\rangle$ برابر است با $|\langle c' | b' \rangle|^2$. به علاوه، با توجه به اینکه احتمالات در هر حالت از هم مستقل اند، احتمال یافتن کت $|c'\rangle$ به عنوان خروجی برابر است با

$$|\langle b' | a' \rangle|^2 |\langle c' | b' \rangle|^2$$



مساله اندازه گیری

• حالا می خواهیم به آزمایش اشترن-گرلاخ برگردیم و برخی نتایج آن را به صورت دقیقتر توضیح دهیم. فرض کنید A، B و C سه مشاهده پذیر دلخواه (سازگار و یا ناسازگار) هستند.

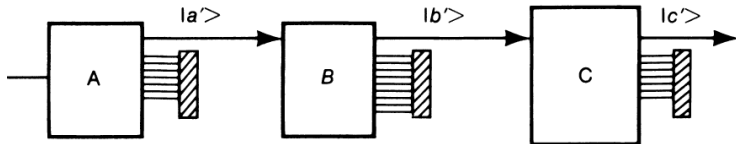
• حال فرض کنید که در اندازه گیری B خروجی $|b'\rangle$ را بسته و یک خروجی دیگر مانند $|b''\rangle$ را باز نگه داشته ایم. در این صورت احتمال یافتن $|c'\rangle$ برابر است با

$$|\langle b'' | a' \rangle|^2 |\langle c' | b'' \rangle|^2$$

اگر همین کار را با تمام خروجی های ممکن $|b'\rangle$ انجام دهیم، احتمال کل یافتن کت $|c'\rangle$ برابر است با

$$\sum_{b'} |\langle b' | a' \rangle|^2 |\langle c' | b' \rangle|^2 = \sum_{b'} \langle c' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle$$

یعنی بر روی همه مقادیر ممکن b' جمع بسته ایم.



یک آزمایش متفاوت

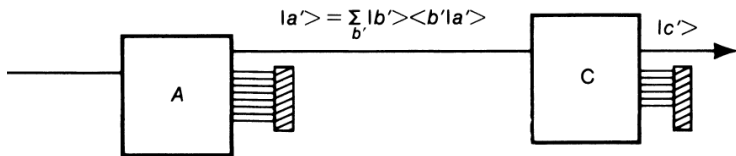
• حالا می خواهیم به آزمایش اشترن-گراخ برگردیم و برخی نتایج آن را به صورت دقیقتر توضیح دهیم. فرض کنید A، B و C سه مشاهده پذیر دلخواه (سازگار و یا ناسازگار) هستند.

• حال یک آزمایش متفاوت را در نظر بگیرید. فرض کنید که اندازه گیری B انجام نمی شود (شکل زیر). بنابراین احتمال کل یافتن کت $|c'\rangle$ در کت $|a'\rangle$ برابر است با $|\langle c' | a' \rangle|^2$ که البته با توجه به رابطه بستر می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$|\langle c' | a' \rangle|^2 = \left| \sum_{b'} \langle c' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle \right|^2 = \sum_{b'} \sum_{b''} \langle c' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle$$

این رابطه با نتیجه آزمایش قبلی که در زیر آمده است کاملاً متفاوت است.

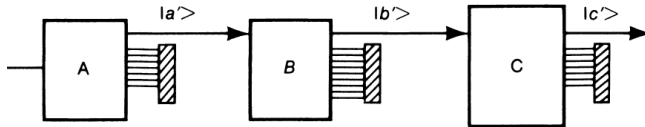
$$\sum_{b'} |\langle b' | a' \rangle|^2 |\langle c' | b' \rangle|^2 = \sum_{b'} \langle c' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle$$



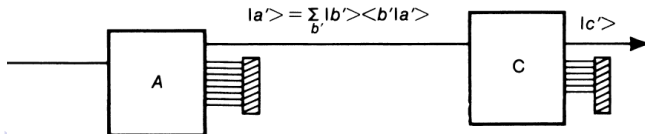
مساله اندازه گیری

- در اینجا توجه می کنیم که نتیجه اندازه گیری C کاملاً به اینکه مشاهده پذیر B اندازه گیری شده است و یا نه مربوط است! در مورد اول ما واقعا مشاهده پذیر B را اندازه گرفته ایم ولی در مورد دوم فقط فرض کرده ایم که ویژه حالت $|a'\rangle$ را می توان بر حسب ویژه حالت های $|b'\rangle$ بسط داد. یعنی

$$|a'\rangle = \sum_{b'} |b'\rangle \langle b'|a'\rangle$$
- این پدیده یکی از مهم ترین ویژگی های مکانیک کوانتومی است که آن را از فیزیک کلاسیک متمایز می کند.



(a)



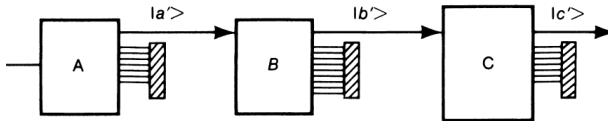
مساله اندازه گیری

● تحت چه شرایطی نتیجه دو اندازه گیری در شکل زیر با هم برابرند؟

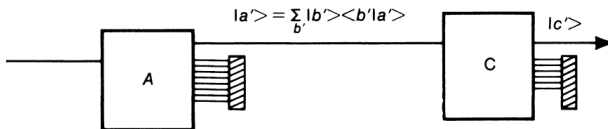
● تمرین: ثابت کنید که با فرض عدم وجود تبهگنی، نتیجه این دو آزمایش فقط وقتی با هم برابر است که یک از دو شرط زیر برقرار باشد:

$$[A, B] = 0 \quad \text{or} \quad [B, C] = 0$$

یعنی برابری احتمال ها فقط وقتی اتفاق می افتد که مشاهده پذیر میانی با یکی از دو مشاهده پذیر دیگر جابجا شود. راهنمایی: از قضیه اصلی جلسه قبل استفاده کنید.



(a)



اثبات

● قضیه جلسه قبل: فرض کنید که A و B دو مشاهده پذیر سازگارند و ویژه مقادیر A غیر تبهگن هستند. آنگاه عناصر ماتریس $\langle a_j | B | a_i \rangle$ قطری هستند.

● اثبات: فرض می کنیم $[A, B] = 0$ و احتمال در آزمایش دوم را به شکل

$$|\langle c' | a' \rangle|^2 = \left| \sum_{b'} \langle c' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle \right|^2 = \sum_{b'} \langle c' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle \sum_{b''} \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle$$

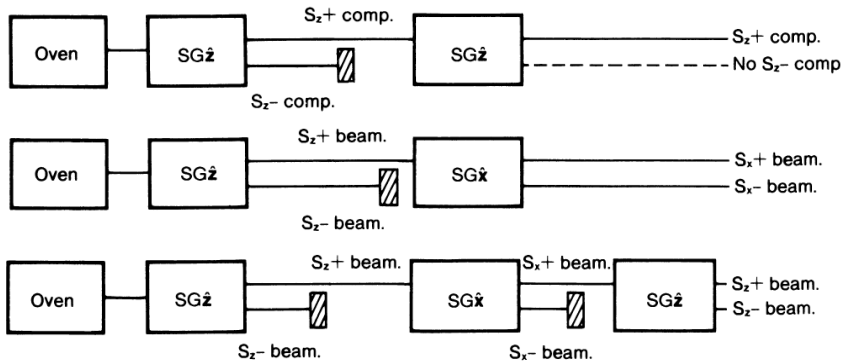
می نویسیم. با توجه به قضیه بالا، فقط یکی از مقادیر b' وجود دارد که برای آن $\langle b' | a' \rangle$ غیر صفر است. این مقدار را $b' = e$ می نامیم. همچنین در سری دوم فقط یکی از مقادیر b'' وجود دارد که برای آن $\langle b'' | a' \rangle$ غیر صفر است که آن هم $b'' = e$ می باشد. در نتیجه داریم $b'' = b' = e$ و می توان نوشت:

$$|\langle c' | a' \rangle|^2 = \sum_{b'} \langle c' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle = \sum_{b'} |\langle b' | a' \rangle|^2 |\langle c' | b' \rangle|^2$$

که برابر با نتیجه آزمایش اول است. همین روند را می توان برای مورد $[B, C] = 0$ هم نوشت. بنابراین نتیجه خواسته شده ثابت است.

معنی اینها چیست؟!

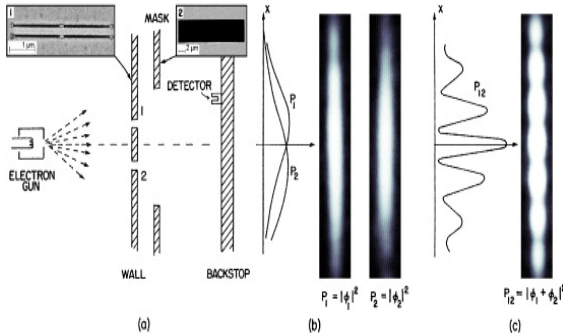
- معنی این همه ریاضیات چیست؟
- پرسش: با استفاده از فرمولبندی بالا معنی آزمایشات اشتراک-گرلاخ متوالی را توضیح دهید.



معنی اینها چیست؟!

معنی این همه ریاضیات چیست؟

آزمایش دوشکافی می تواند معنی فرمولبندی بالا را تا حد خوبی بیان کند. اگر یکی از شکاف ها را ببندیم، در واقع اندازه گیری انجام داده ایم؛ یعنی می دانیم الکترون از کدام شکاف عبور کرده است. ولی اگر هر دو شکاف باز باشند، آنگاه عملاً نمی دانیم الکترون از کدام حفره عبور کرده است. جالب است که طرح تداخل بدست آمده در حالت دوم ذاتاً با مجموع دو طرح به دست آمده در آزمایش های اول متفاوت است. دلیل این پدیده این است که در حالت دوم برهمه‌ی دو موج (تداخل) داریم ولی در حالت اول چنین پدیده‌ای نداریم. برهمه‌ی یک مفهوم بنیادی در مکانیک کوانتومی است.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مشاهده پذیرهای ناسازگار و مهم ترین ویژگی های آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

❶ چه نوع مشاهده پذیرهایی را سازگار و کدام را ناسازگار می نامند؟

❷ توضیح دهید که چرا مشاهده پذیرهای ناسازگار نمی توانند ویژه کت های مشترک داشته باشند.

❸ اگر دو عملگر در حالت کلی ناسازگار ولی در یک زیرفضا سازگار باشند، آنگاه در چه شرایطی می توان برای آن دو ویژه کت مشترک تعریف کرد؟

❹ توضیح دهید که چرا در آزمایش دو شکاف، نتیجه تداخل دوشکافی برابر مجموع آزمایشات تک شکافی نیست.

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

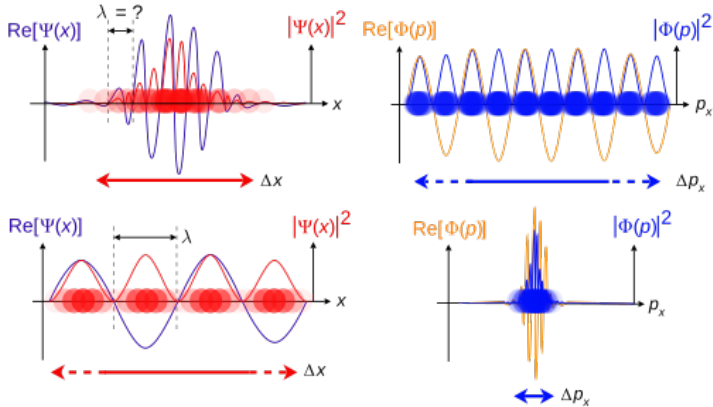


تمرین ها: زمان تحویل ۲۳ آذرماه

- لطفا تمرین های ۹ تا ۱۲ از فصل اول کتاب ساکورایی را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: رابطه عدم قطعیت در مکانیک کوانتومی

- در جلسه بعد با رابطه عدم قطعیت در مکانیک کوانتومی و مهم ترین نتایج آن آشنا خواهیم شد.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J.Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما

