

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

فصل سوم: قانون گوس

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در بهار سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که با تلاش بسیار امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

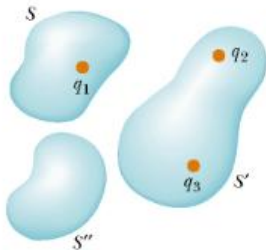
فصل سوم: قانون گوس



- مروری بر قانون گوس
- مثال هایی از قانون گوس
- تعادل الکتروستاتیکی رساناها



یادآوری



۱ قانون گوس: شار الکتریکی گذرنده از هر سطح بسته $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ برابر است با بار درون آن سطح بسته (q_{in}) تقسیم بر ϵ_0 ؛ یعنی

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

۲ سطح بسته مذکور در قانون گوس را سطح گوسی می نامیم؛ مانند سطوح S, S', S'' در اینجا.

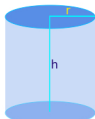
۳ لازم است که مساله مورد نظر به اندازه کافی متقارن باشد زیرا می خواهیم سطحی را پیدا کنیم که مقدار میدان الکتریکی روی آن سطح ثابت باشد و بنابراین از انتگرال خارج شود:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA \Leftarrow \text{enough symmetry}$$

اگر مساله به اندازه کافی متقارن نباشد، ساده سازی بالا امکان پذیر نبوده و بنابراین استفاده از قانون گوس (برای پیدا کردن میدان) ممکن نخواهد بود $\Leftarrow \Leftarrow$ قانون کولن.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

یادآوری مساحت و حجم کره و استوانه



Cylinder

$$\text{Volume} = \pi r^2 h$$

$$\text{Surface Area} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

مساحت سطح جانبی استوانه برابر است با

$$2\pi r h$$

مساحت سطوح بالا و پایین استوانه همان مساحت دایره هستند

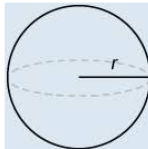
$$\pi r^2$$

مساحت کل استوانه:

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

حجم استوانه برابر است با

$$V = \pi r^2 h$$



$$\text{Volume: } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{Surface Area: } S = 4\pi r^2$$

مساحت سطح کره برابر است با

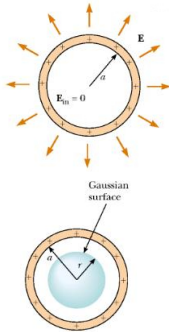
$$A = 4\pi r^2$$

این مقدار را گاهی با S هم نشان می دهیم.

حجم کره برابر است با

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

اثبات قضیه اول پوسته



قضیه اول پوسته: ثابت کنید که میدان درون یک پوسته کروی که به صورت همگن باردار شده است (شکل مقابل، بالا) برابر صفر است.

پاسخ: از آنجا که شکل توزیع بار کروی است، بهترین انتخاب برای شکل سطح گوسی نیز کره است (شکل مقابل، پایین). در واقع این مساله با هیچ سطح گوسی دیگری به سادگی حل نخواهد شد.

با توجه به اینکه میدان به صورت شعاعی تغییر می کند، روی تمام نقاط سطح گوسی مقدار آن ثابت است:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos 0 = E \oint dA = EA = 4\pi r^2 E$$

از طرفی هیچ باری درون سطح گوسی بسته (کره با رنگ آبی) نیست، بنابراین

$$q_{in} = 0$$

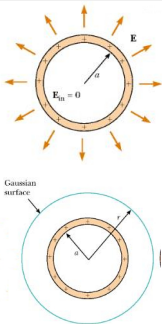
پس، بنا به قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{0}{\epsilon_0} \Rightarrow E = 0$$

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

سادگی روش بالا را مقایسه کنید با روش نیوتن برای اثبات قضیه پوسته (فصل ۱۳ گرانث).

اثبات قضیه دوم پوسته



قضیه دوم پوسته: ثابت کنید که میدان الکتریکی خارج از یک پوسته کروی، که به صورت همگن باردار شده است (شکل مقابل، بالا)، برابر با وقتی است که کل بار در مرکز جمع شده است.

پاسخ: از آنجا که شکل توزیع بار کروی است، بهترین انتخاب برای شکل سطح گوسی نیز کره است (شکل مقابل، پایین). در واقع این مساله با هیچ سطح گوسی دیگری به سادگی حل نخواهد شد.

با توجه به اینکه میدان به صورت شعاعی تغییر می کند، روی تمام نقاط سطح گوسی مقدار آن ثابت است:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos 0 = E \oint dA = EA = 4\pi r^2 E$$

از طرفی فرض کنید بار روی کره برابر Q می باشد؛ بنابراین، بار درون سطح گوسی بسته (کره آبی رنگ) نیز همین مقدار است: $q_{in} = Q$

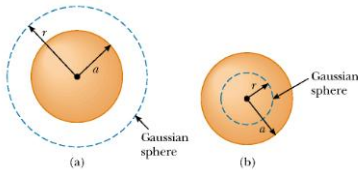
پس، بنا به قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

جواب نهایی: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$

میدان ناشی از یک کره توپر همگن باردار



میدان درون و بیرون یک کره توپر که به صورت همگن باردار شده است را بیابید.

میدان بیرون: از آنجا که شکل توزیع بار کروی است، بهترین انتخاب برای شکل سطح گوسی نیز کره است (شکل مقابل (a)).

با توجه به اینکه میدان به صورت شعاعی تغییر می کند، روی تمام نقاط سطح گوسی مقدار آن ثابت است:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos 0 = E \oint dA = EA = 4\pi r^2 E$$

از طرفی فرض کنید بار کل کره برابر Q می باشد؛ بنابراین، بار درون سطح

گوسی (رنگ آبی) بسته نیز همین مقدار است: $q_{in} = Q$

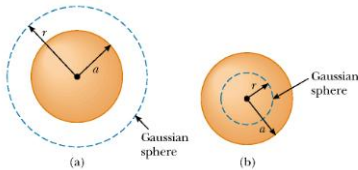
بنا به قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

جواب نهایی: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$

میدان ناشی از یک کره توپر همگن باردار – ادامه



میدان درون: از آنجا که شکل توزیع بار کروی است، باز هم بهترین انتخاب برای شکل سطح گوسی نیز کره است (شکل مقابل (b)).

با توجه به اینکه میدان به صورت شعاعی تغییر می کند، روی تمام نقاط سطح گوسی مقدار آن ثابت است:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos 0 = E \oint dA = EA = 4\pi r^2 E$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

از طرفی فرض کنید بار کل کره برابر Q می باشد؛ بنابراین، بار درون سطح گوسی (رنگ آبی) بسته را می توان با استفاده از تناسب به صورت زیر به دست آورد

$$Q \quad \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\Rightarrow \Rightarrow q_{in} = Q \frac{r^3}{a^3}$$

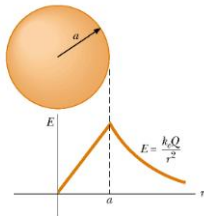
$$q_{in} \quad \frac{4}{3}\pi r^3$$

پس، بنا به قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{a^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{a^3} \quad \text{جواب نهایی:}$$

میدان ناشی از یک کره توپر همگن باردار – رفتار کلی



میدان در خارج توپ توپر باردار به صورت عکس مجذور

$$E \propto \frac{1}{r^2}$$

با شعاع تغییر می کند.

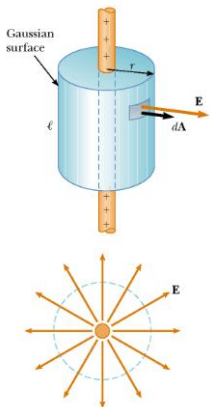
شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

میدان در داخل توپ توپر باردار به صورت خطی

$$E \propto r$$

با شعاع تغییر می کند.

میدان ناشی از یک خط باردار بی نهایت



سوال: میدان ناشی از یک خط باردار بی نهایت، با چگالی خطی بار λ ، را بیابید.

از مسائل حل شده در فصل دوم می دانیم که میدان به فاصله r از خط بار ربط دارد. بنابراین، با توجه به شکل واضح است که روی تمام نقاط استوانه آبی رنگ مقدار میدان ثابت است (شکل مقابل، بالا)؛ هرچند که جهت آن به صورت شعاعی است و تغییر می کند (شکل مقابل، پایین). پس این مساله تقارن استوانه ای دارد و سطح گوسی آن نیز استوانه است.

سطح گوسی بسته مقابل به طول l و شعاع r را در نظر بگیرید. برای این سطح گوسی استوانه شکل باید مقدار شار روی هر سه سطح بالا t ، پایین b و جانبی c را بیابیم:

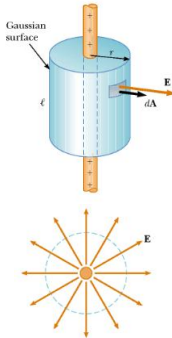
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_t \vec{E} \cdot d\vec{A}_t + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A}_b + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{A}_c$$

سهم سطوح بالا و پایین در انتگرال صفر است زیرا بردار میدان $\vec{E}$ بر بردارهای سطح $d\vec{A}_b$ و $d\vec{A}_t$ عمود است؛ بنابراین

$$\int_t \vec{E} \cdot d\vec{A}_t = \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A}_b = 0$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

میدان ناشی از یک خط باردار بی نهایت - ادامه



از طرف دیگر، اگر بار موجود مثبت باشد، بردار میدان $\vec{E}$ و بردار سطح جانبی $d\vec{A}_c$ هم جهت خواهند بود. بنابراین

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{A}_c = \int_c E dA_c \cos 0 = E \int_c dA_c = E(2\pi r l)$$

در اینجا از این واقعیت که میدان بر روی سطح گوسی ثابت است، و بنابراین از انتگرال خارج می شود، استفاده کرده ایم.

پس نتیجه سمت چپ قانون گوس به صورت زیر است:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_t \vec{E} \cdot d\vec{A}_t + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A}_b + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{A}_c = E(2\pi r l)$$

بار درون سطح گوسی بسته: $q_{in} = \lambda l$

با استفاده از سه نکته اخیر داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش

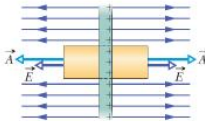
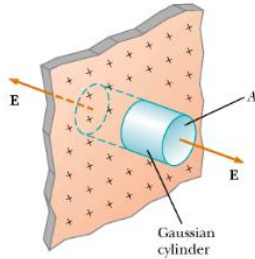
هشتم.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

نتیجه نهایی:

سوال: چرا فرض کرده ایم خط بار بی نهایت است؟

میدان ناشی از یک صفحه نارسانای بسیار بزرگ



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش

هشتم.

میدان صفحه باردار بی نهایت به صورت عمودی به سمت بیرون است (شکل های روبرو).

یک سطح استوانه ای را به عنوان سطح گوسی در نظر می گیریم.

سمت چپ قانون گوس

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3$$

که در آن سطوح ۱ و ۲ هم جهت با میدان بوده و سطح ۳ عمود بر میدان است. بنابراین:

$$\int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = \int_3 E dA_3 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

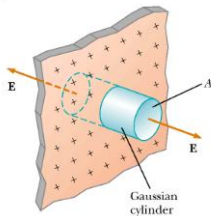
$$\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = \int_1 E dA_1 \cos 0 = E \int_1 dA_1 = E A_1$$

$$\int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = \int_2 E dA_2 \cos 0 = E \int_2 dA_2 = E A_2$$

$$A_1 = A_2 = A$$

که در آن

میدان ناشی از یک صفحه نارسانای بسیار بزرگ – ادامه



بار درون سطح گوسی بسته: $q_{in} = \sigma A$

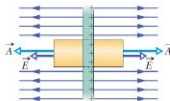
با استفاده از چهار نکته اخیر داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

و یا

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

این نتیجه را در فصل قبل به روش انتگرال گیری مستقیم نیز به دست آوردیم. روش ها را مقایسه کنید.



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش

هشتم.

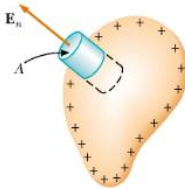
رساناها در تعادل الکتروستاتیکی

- وقتی هیچگونه حرکت باری در رسانا نداشته باشیم، می‌گوییم که رسانا در تعادل الکتروستاتیکی است.
- اگر رسانا در تعادل الکتروستاتیکی باشد، آنگاه میدان الکتریکی درون آن صفر است.
- اگر رسانا در تعادل الکتروستاتیکی باشد، هرگونه بار به روی آن منتقل خواهد شد؛ یعنی بار نمی‌تواند داخل رسانای در حال تعادل الکتروستاتیکی باقی بماند.
- میدان الکتریکی خارج رسانا:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- اثبات در اسلاید بعد .
- میدان الکتریکی نزدیک به نقاط نوک تیزتر بزرگتر است زیرا σ بزرگتر است.

میدان الکتریکی خارج رسانا برابر است با $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$



شار روی دوتا از سطوح صفر است (کدام دو سطح و چرا؟) و روی سطح سوم برابر است با EA

بار درون سطح گوسی برابر است با $q_{in} = \sigma A$

بنابراین با استفاده از قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

و یا

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش

هشتم.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید از قانون گوس برای درک و حل مسائل مختلف استفاده کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

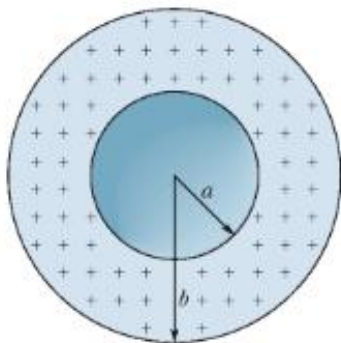
۱. تقارن کروی چه نوع تقارنی است؟ سطح گوس مربوطه چگونه است؟
۲. تقارن استوانه ای چه نوع تقارنی است؟ سطح گوس مربوطه چگونه است؟
۳. خواص تعادل الکتروستاتیکی رسانا چیست؟

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای جذب مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل مسائل زیر محک زده و تقویت کنید.

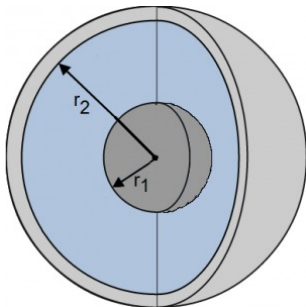


تمرین



قانون گوس:
 در شکل مقابل بار الکتریکی فقط در شعاع
 $a < r < b$ با چگالی ثابت ρ موجود
 است. با استفاده از قانون گوس میدان را
 در
 الف) $r < a$
 ب) $a < r < b$
 پ) $r > b$ بیابید.
 شکل از هالیدی، ویرایش هشتم.

تمرین



قانون گوس:

دو کره نارسا در شکل مقابل را فرض کنید. بار

کل روی کره داخلی برابر $-Q_1$ و بار روی کره

بیرونی برابر $+Q_2$ می باشد که در آن $Q_2 > Q_1$

Q_1 . با استفاده از قانون گوس، میدان در

الف) شعاع های $r < r_1$

ب) در شعاع های $r_1 < r < r_2$

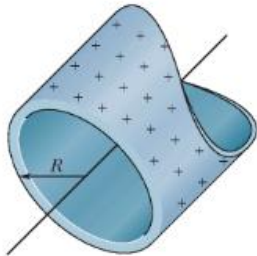
و پ) در شعاع های $r > r_2$ را بیابید.

جهت میدان در هر قسمت به کدام سو (جانب و یا خارج مرکز) است؟

توجه: در هر مورد سطح گوسی انتخاب شده را به دقت شرح دهید.

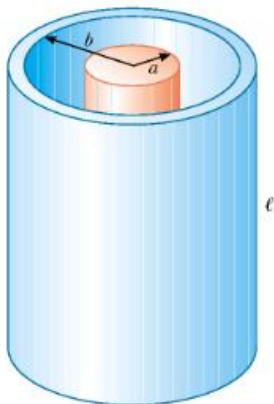
شکل از هالیدی، ویرایش هشتم.

تمرین



قانون گوس:
 استوانه رسانای بینهایت مقابل با چگالی بار خطی λ و شعاع R را در نظر بگیرید. با استفاده از قانون گوس میدان در داخل و خارج این استوانه را بر حسب فاصله r از مرکز استوانه بیابید.
 توجه: در هر مورد سطح گوسی انتخاب شده را به دقت شرح دهید.
 شکل از هالیدی، ویرایش هشتم.

تمرین



قانون گوس:

دو استوانه نارسانای بی نهایت در شکل مقابل را فرض کنید. چگالی بار روی استوانه داخلی برابر $+\lambda_1$ و بار روی استوانه بیرونی برابر $-\lambda_2$ می باشد که در آن $\lambda_2 > \lambda_1$. با استفاده از قانون

گوس، میدان در

الف) شعاع های $r < a$

ب) در شعاع های $a < r < b$

و پ) در شعاع های $r > b$ را بیابید.

جهت میدان در هر قسمت به کدام سو (جانب و

یا خارج مرکز) است؟

توجه: در هر مورد سطح گوسی انتخاب شده را به دقت شرح دهید.

شکل از هالیدی، ویرایش هشتم.

مبحث بعدی: پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی

در جلسه بعد، در ادامه ساده سازی مسائل الکتروستاتیک، یاد خواهیم گرفت که چگونه از کمیت های اسکالر پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی برای درک و حل مساله استفاده کنیم.

مراجع

- ❶ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❷ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

با سپاس از توجه شما