

دینامیک سیستم های کوانتومی

تحول زمانی یک سیستم کوانتومی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ تحول زمانی و معادله شرودینگر
- تحول زمانی سیستم های کوانتومی
- معادله شرودینگر

طرح درس مکانیک کوانتومی

”دینامیک سیستم های کوانتومی” یک بخش از مجموعه ای بزرگتر با عنوان ” مفاهیم مکانیک کوانتومی و کاربردها” است که شامل بخش های زیر است:

فیزیک سیستم های کوانتومی و خاستگاه نظریه کوانتوم

ابزار ریاضیاتی برای مکانیک کوانتومی

اصول موضوعه مکانیک کوانتومی

دینامیک سیستم های کوانتومی

سیستم های یک بعدی در مکانیک کوانتومی

نوسانگر هارمونیک در مکانیک کوانتومی

تکانه زاویه ای در مکانیک کوانتومی

سیستم های کوانتومی دو ترازه

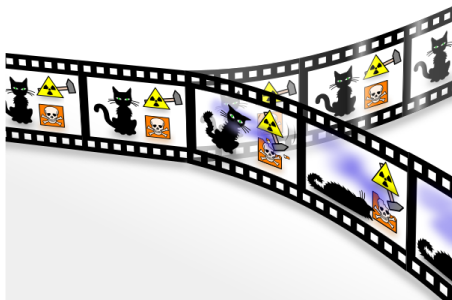
سیستم های سه بعدی در مکانیک کوانتومی

اتم هیدروژن

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

جمع اندازه حرکت های زاویه ای و اسپینی

ذرات یکسان و آمار کوانتومی



طرح درس مکانیک کوانتومی

”مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی” یک بخش از مجموعه ای بزرگتر با عنوان ”مفاهیم مکانیک کوانتومی و کاربردها” است که شامل بخش های زیر است:

روش های تقریبی و نظریه اختلال در مکانیک کوانتومی

حالت های همدموس در مکانیک کوانتومی

ماتریس چگالی

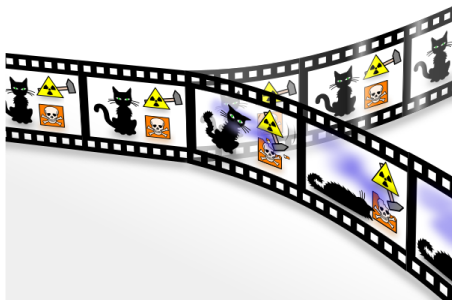
نظریه پراکندگی در مکانیک کوانتومی

تقارن سیستم ها در مکانیک کوانتومی

کوانتوم نسبیتی

کوانتش ثانویه

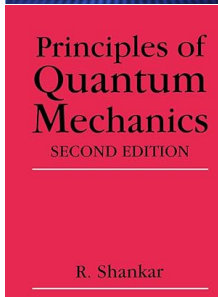
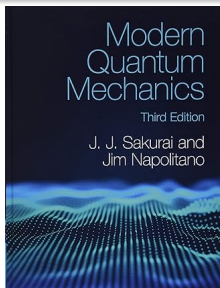
مسائل مفهومی در مکانیک کوانتومی



این بخش ها برای پوشش دادن درس مکانیک کوانتومی کارشناسی، مکانیک کوانتومی پیشرفته در دوره کارشناسی ارشد و مکانیک کوانتومی نسبیتی طراحی شده اند.

منبع اصلی درس کتاب مکانیک کوانتومی مدرن ساکورایی است.

منابع درسی مکانیک کوانتومی پیشرفته



- **Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.**

- **Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press**

- کتاب ساکورایی منبع اصلی آموزش مکانیک کوانتومی پیشرفته در دوره های تحصیلات تکمیلی است (توصیه: ویرایش سوم ساکورایی را تهیه کنید). ولی بهتر است در کنار این منبع از کتاب بسیار خوب شانکار هم استفاده کرد. این دو منبع در کنار هم می توانند کاستی های همدیگر را جبران کرده و بسیاری از مفاهیم اساسی و روش ها در مکانیک کوانتومی را پوشش دهند.

اگر نیاز به مثال های حل شده و تمرین بیشتر دارید...



Quantum Mechanics

— Second Edition

More than 200 fully solved problems

- Concise explanations of all course concepts
- Information on the Schrödinger equation, angular momentum, spin, the Harmonic oscillator, numerical methods, and scattering theory

USE WITH THESE COURSES

Quantum Mechanics • Introductory Quantum Mechanics
• Quantum Theory I • Quantum Theory II

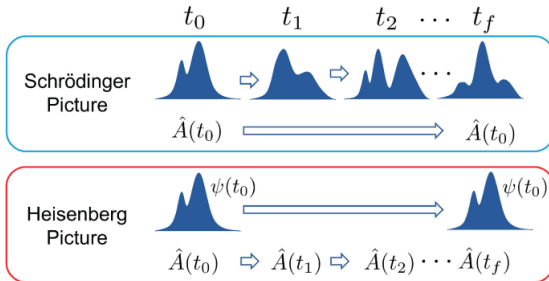
Yoav Peleg • Reuven Pnini • Elyahu Zaarur • Eugene Hecht

• Schaum's Outline of Quantum Mechanics, Yoav Peleg, Reuven Pnini, Elyahu Zaarur, Eugene Hecht, McGraw Hill

• اگر نیاز به مثال های حل شده و تمرین بیشتر دارید، پیشنهاد می کنم کتاب مکانیک کوانتومی از مجموعه سری شومز را ببینید. نمادگذاری این کتاب با کتاب های گاسیورویچ، گریفیتس و زتیلی همخوانی خوبی دارد و کمبود مثال و تمرین در دو کتاب اول را پوشش می دهد.

تحول زمانی سیستم ها

- در اینجا (و چند بخش بعدی) می خواهیم به صورت مفصل درباره تحول زمانی سیستم های کوانتومی بحث کنیم و این مساله را از چند جهت مختلف ببینیم و مثال های متفاوتی را حل کنیم.
- منظور از تحول زمانی سیستم های کوانتومی، تغییرات زمانی کت حالت سیستم و یا مشاهده پذیرهاست. همچنین سیستم ها می توانند ایزوله فرض شوند و یا در برهمکنش با محیط اطراف خود عمل کنند.
- اصل موضوعی که در اینجا برای توصیف تحول زمانی معرفی خواهیم کرد، معادل با قانون دوم نیوتن (و یا معادلات حرکت لاگرانژ یا هامیلتون) در مکانیک کلاسیک است.

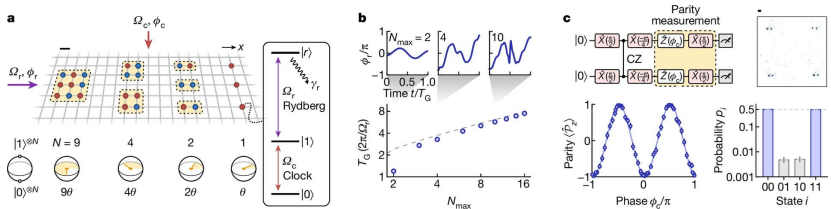


زمان در مکانیک کوانتومی

- زمان در مکانیک کوانتومی (مانند زمان در فیزیک کلاسیک) فقط یک پارامتر (و نه یک عملگر) است. به ویژه دقت کنید که زمان یک مشاهده پذیر کوانتومی نیز نیست. به یاد آورید که موقعیت در مکانیک کوانتومی یک عملگر است.
- تمرین: روابط عدم قطعیت موقعیت-تکانه و انرژی-زمان تفاوت های اساسی با هم دارند. در این مورد تحقیق کنید.

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

- تمرین: درباره ساختار ساعت های اتمی و کوانتومی تحقیق کنید.
- توجه: در مکانیک کوانتومی نسبیته هر دو عامل مکان و زمان پارامتر محسوب می شوند.



عملگر تحول زمانی در مکانیک کوانتومی

● فرض کنید یک سیستم کوانتومی در زمان t_0 در کت حالت $|\alpha\rangle = |\alpha, t_0\rangle$ قرار دارد. حالت این سیستم در زمان $t > t_0$ چیست؟

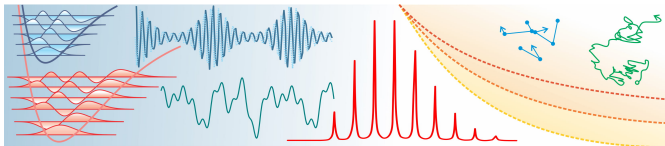
● این سوال اصلی است که ما می خواهیم به آن پاسخ دهیم. فرض کنید که حالت سیستم در زمان دلخواه t را با کت $|\alpha, t_0; t\rangle$ نشان می دهیم. حال از آنجا که زمان کمیتی پیوسته است، می توان نوشت:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\alpha, t_0; t\rangle = |\alpha, t_0\rangle$$

● درست مانند عملگر انتقال، در اینجا نیز حالت اولیه و حالت نهایی توسط یک عملگر به هم مربوط می شوند. ما این عملگر را عملگر تحول زمانی می نامیم:

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \mathcal{U}(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$$

ویژگی های عملگر تحول زمانی چیست؟



ویژگی های عملگر تحول زمانی

۱- عملگر تحول زمانی یکانی است.

اثبات: این ویژگی از پایداری احتمال وجود ذره به دست می آید. فرض کنید که کت حالت اولیه ذره را می توانیم بر اساس ویژه حالت های یک عملگر مانند A بسط دهیم:

$$|\alpha, t_0\rangle = \sum_{a'} c_{a'}(t_0) |a'\rangle$$

به همین صورت در زمان $t > t_0$ نیز می توان نوشت:

$$|\alpha, t\rangle = \sum_{a'} c_{a'}(t) |a'\rangle$$

در حالتی که هامیلتونی و عملگر A جابجا می شوند، می توان ثابت کرد که داریم: $|c_{a'}(t_0)| = |c_{a'}(t)|$ (اثبات در جلسه بعد). ولی در بقیه حالت ها سیستم تحول یافته و در حالت کلی ضرایب بسط با زمان تغییر می کنند:

با این وجود ذره بالاخره باید در قسمتی از فضا حضور داشته باشد؛ در نتیجه مجموع دامنه های احتمال باید با هم برابر (و برابر با یک) باشند:

$$\sum_{a'} |c_{a'}(t_0)|^2 = \sum_{a'} |c_{a'}(t)|^2 = 1$$

به عبارت دیگر، اگر کت حالت سیستم در ابتدا نرمال باشد، در اثر تحول زمانی نیز نرمال باقی خواهد ماند:

$$\langle \alpha, t_0 | \alpha, t_0 \rangle = 1 \xrightarrow{\text{time evolution}} \langle \alpha, t_0; t | \alpha, t_0; t \rangle = 1$$

ویژگی های عملگر تحول زمانی

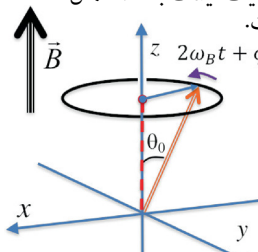
- ادامه: حال با توجه به رابطه اخیر و تعریف عملگر تحول زمانی می توان نوشت:

$$\langle \alpha, t_0; t | \alpha, t_0; t \rangle = 1 \rightarrow \langle \alpha, t_0 | \mathcal{U}^\dagger(t, t_0) \mathcal{U}(t, t_0) | \alpha, t_0 \rangle = 1 = \langle \alpha, t_0 | \alpha, t_0 \rangle$$

که از آن یکانی بودن عملگر تحول زمانی نتیجه می شود:

$$\mathcal{U}^\dagger(t, t_0) \mathcal{U}(t, t_0) = 1$$

- مفهوم یکانی بودن را می توان با یک مثال به خوبی درک کرد. فرض کنید یک ذره اسپین $1/2$ با اسپین $|S_x, +\rangle$ داریم که در یک میدان مغناطیسی در جهت z قرار گرفته است. در یکی از درس های آینده خواهیم دید که در اثر میدان مغناطیسی، اسپین تحول زمانی پیدا می کند و دیگر فقط در جهت $|S_x, +\rangle$ نیست؛ بلکه در یک برهمه نهی از حالت های $|S_x, +\rangle$ و $|S_x, -\rangle$ قرار خواهد داشت. به زبان ساده، احتمال حضور ذره در حالت $|S_x, +\rangle$ دیگر یک نیست بلکه احتمال حضور ذره در ترکیبی از حالت های $|S_x, +\rangle$ و $|S_x, -\rangle$ برابر یک است.



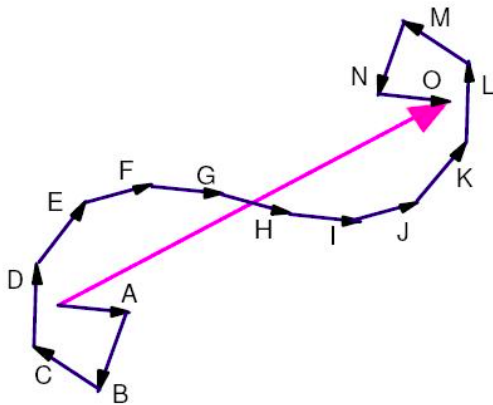
- بسیاری از محققان کوانتوم یکانی بودن را هم معنی با پایستگی احتمال در نظر می گیرند.

ویژگی های عملگر تحول زمانی

- ۲- ویژگی ترکیب دو تحول زمانی: تحول زمانی یک سیستم از زمان t_0 تا زمان t_2 برابر است با دو تحول زمانی متوالی. نخست باید تحول زمان سیستم از زمان t_0 تا t_1 را به دست آورد و سپس تحول زمانی سیستم از زمان t_1 تا t_2 را یافت و حاصل را با هم ترکیب کرد:

$$\mathcal{U}(t_2, t_0) = \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{U}(t_1, t_0) \quad t_2 > t_1 > t_0$$

- مفهوم شکل مقابل را توضیح دهید.



تحول زمانی دیفرانسیلی

- یک تحول زمانی دیفرانسیلی به میزان dt را در نظر بگیرید. با توجه به تعریف عملگر تحول زمانی می توان نوشت:

$$|\alpha, t_0; t_0 + dt\rangle = \mathcal{U}(t_0 + dt, t_0) |\alpha, t_0\rangle$$

- البته با توجه به پیوستگی پارامتر زمان، عملگر تحول زمانی در حد $dt \rightarrow 0$ باید به سمت عملگر همانی میل کند:

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \mathcal{U}(t_0 + dt, t_0) = 1$$

- همچنین، مانند مورد عملگر انتقال، انتظار داریم که اختلاف بین $\mathcal{U}(t_0 + dt, t_0)$ و 1 از مرتبه اول دیفرانسیل باشد.

- می توان به راحتی دید که همه ویژگی های بالا برای عملگر تحول زمانی دیفرانسیلی زیر برقرار است

$$\mathcal{U}(t_0 + dt, t_0) = 1 - i\Omega dt$$

- که در آن Ω باید یک عملگر هرمیتی باشد (بنا به کدام ویژگی؟!)

$$\Omega = \Omega^\dagger$$

- می توان به راحتی نشان داد که عملگر تحول زمانی دیفرانسیلی معرفی شده در بالا یکانی است:

$$\mathcal{U}^\dagger(t_0 + dt, t_0) \mathcal{U}(t_0 + dt, t_0) = (1 + i\Omega^\dagger dt) (1 - i\Omega dt) \simeq 1$$

- نشان دهید که عملگر تحول زمانی دیفرانسیلی معرفی شده در بالا در رابطه زیر صدق می کند:

$$\mathcal{U}(t_0 + dt_1 + dt_2, t_0) = \mathcal{U}(t_0 + dt_1 + dt_2, t_0 + dt_1) \mathcal{U}(t_0 + dt_1, t_0)$$

مولد تحول زمانی

● عملگر Ω از جنس فرکانس است و ما می خواهیم بدانیم چه عملگری در مکانیک کوانتومی می تواند به جای Ω نشسته و باعث تحول زمانی سیستم شود.

● از رابطه پلانک-اینشتین در کوانتوم قدیم، یعنی $E = \hbar\omega$ ، می بینیم که فرکانس می تواند با انرژی مرتبط باشد. همچنین، از مکانیک کلاسیک (گلداشتاين و همکاران ۲۰۰۲) می دانیم که هامیلتونی مولد تحول زمانی در سیستم های کلاسیک است. با توجه به دو نکته اخیر می توان نوشت:

$$\Omega \equiv \frac{H}{\hbar}$$

در نتیجه، عملگر دیفرانسیلی تحول زمانی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathcal{U}(t_0 + dt, t_0) = 1 - \frac{i H dt}{\hbar}$$

که در آن هامیلتونی H یک عملگر هرمیتی است.

● با استفاده از قضیه اهرنفست (جلسات بعد) می توان اثبات کرد که دینامیک سیستم های کوانتومی در حد $\hbar \rightarrow 0$ به دینامیک سیستم های کلاسیک میل می کنند، اگر ثابت $\hbar$ در رابطه تحول زمانی $\mathcal{U}(t_0 + dt, t_0) = 1 - i H dt / \hbar$ با ثابت $\hbar$ در رابطه انتقال دیفرانسیلی

$$\mathcal{T}(d\vec{r}) = 1 - i \vec{P} \cdot d\vec{r} / \hbar$$

یکسان باشد.

به دست آوردن معادله شرودینگر

در اکثر منابع مکانیک کوانتومی، معادله شرودینگر به عنوان اصل موضوع تحول زمانی معرفی می شود. هرچند، ما در بخش قبل عملگر دیفرانسیلی تحول زمانی را معرفی کرده ایم و حالا می توانیم معادله شرودینگر را "به دست آوریم".

با استفاده از ویژگی ترکیب عملگر تحول زمانی می توان نوشت:

$$U(t + dt, t_0) = U(t + dt, t) U(t, t_0) = \left(1 - \frac{i H dt}{\hbar} \right) U(t, t_0)$$

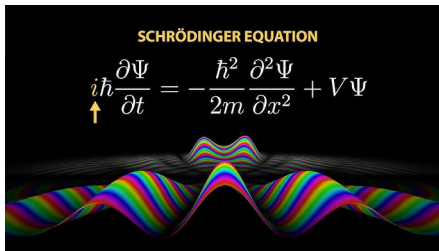
دقت کنید که بازه $t - t_0$ می تواند هر عددی باشد. حال با ساده سازی معادله اخیر می توان نوشت:

$$U(t + dt, t_0) - U(t, t_0) = -i \frac{H}{\hbar} U(t, t_0) dt$$

که البته شکل دیفرانسیلی آن به صورت زیر است

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H U(t, t_0) \quad *$$

رابطه بالا را معادله شرودینگر برای عملگر تحول زمانی می نامند که اساس بحث های آینده ما درباره دینامیک سیستم های کوانتومی است.



معادله شرودینگر برای کت حالت

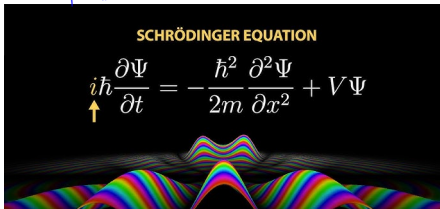
- از معادله بالا به سادگی می توان معادله شرودینگر برای کت حالت سیستم را به دست آورد. برای اینکار معادله * را از سمت راست در کت حالت اولیه سیستم $|\alpha, t_0\rangle$ ضرب می کنیم:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle = H U(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$$

- از طرفی بنا به تعریف تحول زمانی داریم $|\alpha, t_0; t\rangle = U(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$ ؛ بنابراین می توان به معادله شرودینگر برای کت حالت سیستم رسید:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle = H |\alpha, t_0; t\rangle$$

- توجه، توجه: اگر ما عملگر تحول زمانی $U(t, t_0)$ را داشته باشیم، و به علاوه حالت اولیه سیستم $|\alpha, t_0; t\rangle = U(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$ را نیز بدانیم، آنگاه اصلا به حل معادله شرودینگر برای یافتن تحول زمانی سیستم نیاز نداریم. در واقع رابطه $|\alpha, t_0; t\rangle = U(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$ حالت سیستم در هر زمانی را به دست خواهد داد. یعنی مساله حل می شود.



- در یافتن عملگر تحول زمانی $U(t, t_0)$ سه حالت می تواند رخ دهد که در ادامه این سه حالت بررسی می شوند.

یافتن عملگر تحول زمانی

وقتی هامیلتونی مستقل از زمان است. یعنی وقتی پارامتر t تغییر می کند، عملگر هامیلتونی H بدون تغییر باقی می ماند. مثلاً، هامیلتونی مربوط به یک ذره اسپین دار در یک میدان مغناطیسی ($H = -(eB/mc)\vec{S}\cdot\vec{B}$) که در جلسات بعد حل خواهد شد (یک هامیلتونی مستقل از زمان است).

در این حالت جواب معادله شرودینگر $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H U(t,t_0)$ به صورت زیر است:

$$U(t,t_0) = \exp\left(-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}\right) \quad * *$$

برای اثبات جواب بالا در ابتدا این جواب را بسط می دهیم:

$$U(t,t_0) = \exp\left(-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}\right) = 1 + \frac{-iH(t-t_0)}{\hbar} + \frac{1}{2!}\left(\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right)^2 + \dots$$

حال اگر از طرفین رابطه بالا مشتق زمانی بگیریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = \frac{-iH}{\hbar} + \frac{(-i)^2}{2!}\left(\frac{H}{\hbar}\right)^2(t-t_0) + \dots$$

$$= \frac{-iH}{\hbar}\left(1 + \frac{-iH(t-t_0)}{\hbar} + \frac{1}{2!}\left(\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right)^2 + \dots\right) = \frac{-iH}{\hbar}U(t,t_0)$$

که همان معادله * است. پایان اثبات.

نشان دهید که $U(t,t_0) = \exp\left(-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}\right)$ در حد $t \rightarrow t_0$ به سمت ۱ میل می کند.

یافتن عملگر تحول زمانی

- راه دیگر برای اثبات معادله $\star\star$ استفاده از توالی عملگرهای دیفرانسیلی تحول زمانی است:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{(iH/\hbar)(t - t_0)}{N} \right]^N = \exp \left(-\frac{iH(t - t_0)}{\hbar} \right)$$

تمرین: درستی رابطه بالا را شرح دهید.

- وقتی هامیلتونی وابسته به زمان است ولی H در زمان های مختلف جابجا می شود:

$$[H(t_1), H(t_2)] = 0 \quad t_1 \neq t_2$$

هامیلتونی مربوط به یک ذره اسپین دار در یک میدان مغناطیسی وابسته به زمان ولی با جهت ثابت در فضا ($H = -(eB/mc)\vec{S} \cdot \vec{B}(t)$) مثالی از این حالت است.

- در این حالت جواب معادله شرودینگر $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H U(t, t_0)$ به صورت زیر است:

$$U(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \right] \quad *$$

- تمرین بسیار مهم: معادله $*$ را بسط دهید و سپس بسط مورد نظر را در معادله $*$ قرار داده و نشان دهید که $*$ در واقع جواب معادله $*$ است.

یافتن عملگر تحول زمانی

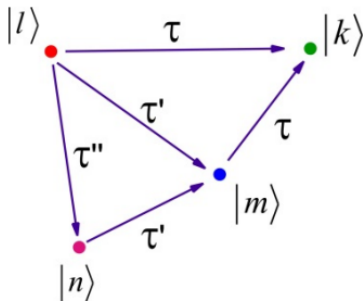
۳ • وقتی هامیلتونی H در زمان های مختلف جابجا نمی شود:
 $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0 \quad t_1 \neq t_2$

هامیلتونی مربوط به یک ذره اسپین دار در یک میدان مغناطیسی وابسته به زمان و با جهت متغیر در فضا مثالی از این حالت است. مثلاً $\vec{B}(t_1)$ در جهت x و $\vec{B}(t_2)$ در جهت y است.

• در این حالت جواب معادله شرودینگر $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(t, t_0) = H \mathcal{U}(t, t_0)$ به صورت زیر است:

$$\mathcal{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) H(t_2) \cdots H(t_n) \quad **$$

که آن را سری دایسون (Dyson Series) می نامند.



• تمرین بسیار مهم: معادله ** را بسط دهید و سپس بسط مورد نظر را در معادله * قرار داده و نشان دهید که ** در واقع جواب معادله * است.

• به اثبات دیگری که در ادامه می آید دقت کنید. منبع:

<https://chem.libretexts.org/>

اثبات سری دایسون

- روش که در اینجا به کار می بریم روش تکرار (iteration) نام دارد و یکی از موثرترین راه ها برای حل مسائل پیچیده ریاضی-فیزیکی است.

- می توان جواب معادله شرودینگر $\hat{H}\mathcal{U}(t, t_0) = \hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(t, t_0)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{U}(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \mathcal{U}(\tau, t_0) \quad \heartsuit$$

تمرین: درستی این جواب را نشان دهید.

این البته جوابی درست ولی نه چندان موثر است زیرا مجهول، یعنی $\mathcal{U}(t, t_0)$ ، خود در زیر انتگرال ظاهر شده است. حالا از روش ”تکرار“ استفاده می کنیم؛ یعنی، مقدار مجهول را از معادله $\heartsuit$ برداشته و در سمت راست قرار می دهیم:

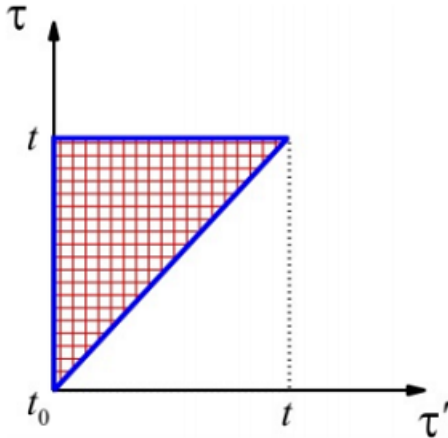
$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{\tau} d\tau' H(\tau') \mathcal{U}(\tau', t_0) \right] \\ &= 1 + \left(\frac{-i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' H(\tau) H(\tau') \mathcal{U}(\tau', t_0) \end{aligned}$$

دقت کنید که متغیر انتگرال گیری جدید τ' معرفی شد.

- پرسش: چه تفاوت هایی بین انتگرال $\heartsuit$ و انتگرال اخیر وجود دارد؟

اثبات سری دایسون

- پاسخ: انتگرال اول فقط یک انتگرال یگانه است در حالی که انتگرال دوم انتگرالی دو گانه است. همچنین توجه کنید که در انتگرال دوم ترتیب انتگرال ها هم مهم است، یعنی در ابتدا باید روی متغیر τ' و سپس روی متغیر τ انتگرال گیری شود.
- بازه انتگرال گیری نیز در شکل زیر مشخص شده است.



اثبات سری دایسون

- حالا مقدار $\mathcal{U}(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \mathcal{U}(\tau, t_0)$ را دوباره در معادله

$$\mathcal{U}(t, t_0) = 1 + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' H(\tau) H(\tau') \mathcal{U}(\tau', t_0)$$

 قرار می دهیم که نتیجه به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t, t_0) = & 1 + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \\ & + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' H(\tau) H(\tau') \\ & + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^3 \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' \int_{t_0}^{\tau'} d\tau'' H(\tau) H(\tau') H(\tau'') \mathcal{U}(\tau'', t_0) \end{aligned}$$

- به ترتیب انتگرال گیری در این انتگرال سه گانه دقت کنید. همچنین دقت کنید که

$$t_0 \leq \tau'' \leq \tau' \leq \tau \leq t$$

در نتیجه بازه انتگرال گیری یک چهاروجهی است. این چهاروجهی را رسم کنید.

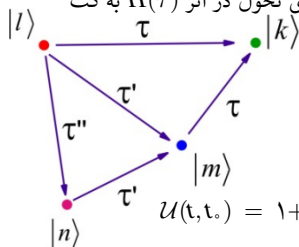
- به تفسیر جملات بالا که در ادامه می آید دقت کنید.

اثبات سری دایسون

تفسیر رابطه زیر چیست؟

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t, t_0) = & 1 + \left(\frac{-i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \\ & + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' H(\tau) H(\tau') \\ & + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^3 \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' \int_{t_0}^{\tau'} d\tau'' H(\tau) H(\tau') H(\tau'') \mathcal{U}(\tau'', t_0) \end{aligned}$$

به شکل زیر دقت کنید. جمله اول در سمت راست رابطه بالا مستقیماً و از طریق تحول ناشی از $H(\tau)$ کت اولیه $|l\rangle$ را به کت نهایی $|k\rangle$ تصویر می کند. جمله دوم در ابتدا کت اولیه $|l\rangle$ را از طریق تحول در اثر $H(\tau')$ به کت میانی $|m\rangle$ و سپس از طریق تحول در اثر $H(\tau)$ به کت نهایی $|k\rangle$ تصویر می کند و غیره.



این فرایند در کجا متوقف می شود؟ بستگی به تقریب مورد نظر شما دارد! ولی پس از تکرار n مرتبه به سری دایسون می رسم. توجه کنید که به متغیرهای اولیه بازگشته ایم:

$$\mathcal{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) H(t_2) \cdots H(t_n)$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم تحول زمانی و معادله شرودینگر را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

● عملگر تحول زمانی در مکانیک کوانتومی چه کاری را انجام می دهد؟

● ویژگی های عملگر تحول زمانی در مکانیک کوانتومی را بیان کنید.

● معادله شرودینگر را بنویسید.

● حل معادله شرودینگر در چه مواردی تحول زمانی سیستم را به ما می دهد؟

● سه حالت مختلف در حل معادله شرودینگر برای یافتن عملگر تحول زمانی را بیان کنید و جواب های هرکدام را جداگانه بنویسید.

● درباره راه های محاسبه سری دایسون تحقیق کنید.

● روش دیگر برای تفسیر سری دایسون: درباره ارتباط سری دایسون و دیاگرام های فاینمن تحقیق کنید.

● اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

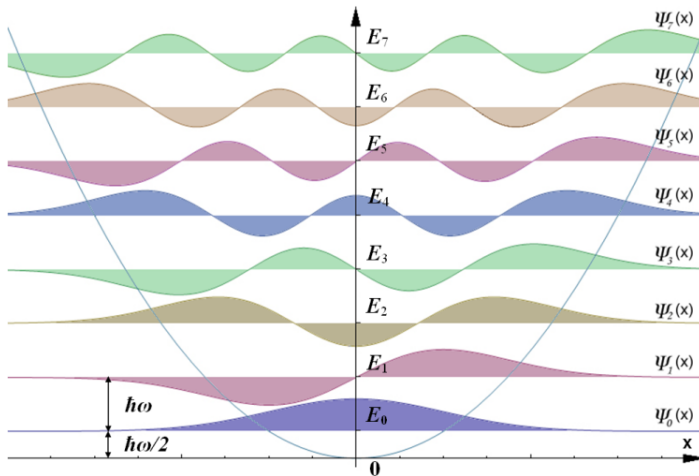
↓↓↓↑↑↑

تمرین

- مساله های شماره ۱ تا ۳ از فصل دوم کتاب ساکورایی را حل کنید.

مبحث بعدی: ویژه کت های انرژی

- در جلسه بعد درباره ویژه کت های انرژی و وابستگی زمانی مقدار چشمداشتی ها بحث خواهیم کرد.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما