

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

فصل دوم: میدان الکتریکی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



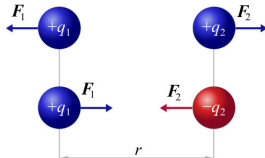
دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در بهار سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که با تلاش بسیار امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

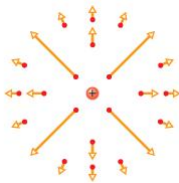
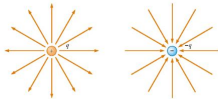
۱ ● فصل دوم: میدان الکتریکی

مفهوم میدان

میدان توزیع بارهای گسسته

برهمکنش مستقیم $\Leftarrow$ نیرو؛ برهمکنش غیر مستقیم $\Leftarrow$ میدان

$$|F_1| = |F_2| = k_c \frac{|q_1 \times q_2|}{r^2}$$



وقتی برهمکنش دو بار الکتریکی را توسط نیرو توضیح می دهیم، معمولاً در نظر داریم که این دو ذره به صورت مستقیم با هم کنش و واکنش دارند: بار الکتریکی $\Rightarrow$ بار الکتریکی.

وقتی برهمکنش دو بار الکتریکی را توسط میدان توضیح می دهیم، معمولاً در نظر داریم که این دو ذره به صورت مستقیم با هم کنش و واکنش ندارند. در واقع فرآیند مورد نظر به این صورت است که ذره اول میدانی اطراف خود ایجاد کرده و ذره دوم با میدان ذره اول (و نه ذره اول) برهمکنش می کند:

بار الکتریکی $\Rightarrow$ میدان الکتریکی $\Rightarrow$ بار الکتریکی.

پیشرفت های سده گذشته در فیزیک نشان داده اند که توصیف دوم به واقعیت نزدیک تر و بنابراین مطمئن تر است.

مثال هایی از میدان ها در فیزیک

- میدان های اسکالر: میدان دما و فشار.
- میدان های برداری: میدان سرعت در یک سیال، میدان گرانشی زمین $\vec{g}$ ، میدان الکتریکی $\vec{E}$.
- میدان های تانسوری: میدان تنش.
- تانسور یک کمیت دو و یا چند جهته است که قوانین تبدیل خاص خود تحت تبدیل مختصات را دارد. ما در این کتاب به تانسور برخورد نخواهیم کرد.

تعریف دقیق میدان الکتریکی

● میدان الکتریکی در هر نقطه برابر است با نیروی وارد شده بر یک بار آزمون در آن نقطه بخش بر واحد بار:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}$$

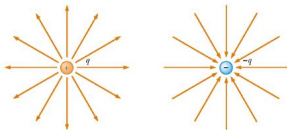
میدان الکتریکی فقط وابسته به یک (توزیع) بار الکتریکی است؛ به عبارت دیگر، برهمکنش با بارهای دیگر در نظر گرفته نمی شود. بنابراین، بررسی اثرات الکتریکی با مفهوم میدان تا حدی ساده تر خواهد شد.

● اگر میدان الکتریکی در یک نقطه را داشته باشیم؛ آنگاه، پیدا کردن نیروی وارده بر هر ذره Q در آن نقطه بسیار راحت خواهد بود:

$$\vec{F} = Q\vec{E}.$$

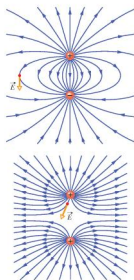
● واحد میدان الکتریکی N/C است. چرا؟

خواص میدان الکتریکی



۱ برای یک بار نقطه ای داریم: $\vec{F} = K \frac{Qq_0}{r^2} \hat{r}$
بنابراین:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = K \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$



از اینجا می توان چند نتیجه مهم گرفت ↓.

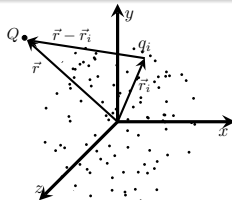
۲ میدان یک بار مثبت در جهت خارج بار و میدان یک بار منفی در جهت داخل بار است. به همین دلیل، بار مثبت را چشمه بار و بار منفی را چاهک بار می نامیم.

۳ قدرت میدان الکتریکی با مقدار بار متناسب است.

۴ با فاصله گرفتن از بار الکتریکی، قدرت میدان به صورت عکس مجذور فاصله کم می شود.

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

اصل برهم‌نهی میدان‌ها

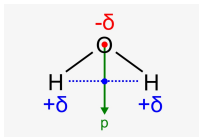
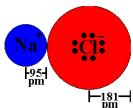


- اصل برهم‌نهی میدان‌ها بیان می‌کند که میدان کل ناشی از یک توزیع بار برابر است با جمع برداری میدان ناشی از تک تک بارها. یعنی

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$$

- که در آن N تعداد کل ذرات است، $\vec{E}$ میدان کل می‌باشد، $\vec{E}_i$ میدان ناشی شده از طرف بار q_i است و ...
- واضح است که اصل برهم‌نهی میدان‌ها را می‌توان به راحتی از اصل برهم‌نهی نیروها به دست آورد.
- نکته مهم در اصل برهم‌نهی آن است که اندازه و جهت میدان ناشی شده از طرف هرکدام از ذرات مستقل از وجود ذرات دیگر است.
- با استفاده از حساب برداری و اصل برهم‌نهی می‌توان بسیاری از مسائل الکترواستاتیک را حل کرد.

دو قطبی ها



شکل ها از نت.

وقتی بارهای الکتریکی هم اندازه ولی با علامت مخالف به فاصله مشخصی از هم قرار می گیرند، ترکیب حاصل را دو قطبی الکتریکی می نامند. مثل مولکول نمک طعام $NaCl$.

خطوط میدان الکتریکی یک دو قطبی را در صفحات قبل مشاهده کرده اید.

بررسی دو قطبی ها (و در کل چند قطبی ها) بسیار مهم است. دلیل نخست چنین اهمیتی این است که ساختارهای دوقطبی در طبیعت بسیار مشاهده شده اند (هم در فیزیک ریزمقیاس، و هم در فیزیک درشت مقیاس). دلیل دوم این است که ساختارهای خیلی پیچیده تر - مثل مولکول های بزرگ مقیاس، آنتن ها و ... - را می توان با استفاده از یک تکنیک ریاضی بسیار مفید به نام "بسط چندقطبی" حل کرد.

در بررسی سیستم های دوقطبی، حاصلضرب کمیت های بار و فاصله، یعنی $q|\vec{p}|$ ، مکرراً ظاهر می شود که آن را ممان دوقطبی الکتریکی می نامیم. جهت بردار $\vec{p}$ از طرف بار منفی به طرف بار مثبت است.

در ادامه چند مساله مربوط به دو قطبی را حل می کنیم.

میدان یک دو قطبی روی خط واصل بارها

۱ برای پیدا کردن میدان دو قطبی در نقطه مورد نظر (P) باید میدان ناشی از بار مثبت E_+ و میدان ناشی از بار منفی E_- را یافته و بنا به اصل برهمهنگی آنها را به صورت برداری جمع کنیم:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

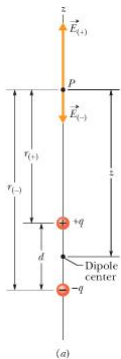
۲ با توجه به اینکه میدان های یاد شده در خلاف جهت هم هستند، اندازه میدان ها از هم کم می شوند:

$$E = E_+ - E_- = \frac{Kq}{r_{(+)}^2} - \frac{Kq}{r_{(-)}^2}$$

که در آن $r_{(+)} = z - d/2$ و $r_{(-)} = z + d/2$. بنابراین، میدان دو قطبی در فاصله z را می توان به صورت زیر نوشت:

$$E = E_+ - E_- = \frac{Kq}{(z - d/2)^2} - \frac{Kq}{(z + d/2)^2}.$$

شکل مبانی فیزیک،
ویرایش دهم.



میدان یک دو قطبی روی خط واصل بارها- ادامه

در بسیاری از مواقع، مثل مولکول ها و آنتن ها، ما میخواهیم میدان دوقطبی را در فاصله بسیار زیاد از آن (یعنی $z \gg d$) به دست آوریم.

چرا؟

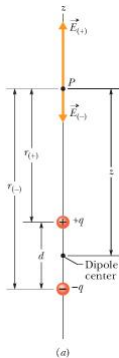
برای پیدا کردن میدان در فواصل زیاد داریم:

$$E = \frac{Kq}{z^2} \left(\frac{1}{(1 - (d/2z))^2} - \frac{1}{(1 + (d/2z))^2} \right)$$

پس از مخرج مشترک گیری:

$$E = \frac{Kq}{z^2} \frac{2d/z}{(1 - (d/2z)^2)^2}$$

محاسبات بالا را، با جزئیات، حتما انجام دهید.



شکل مبانی فیزیک،
ویرایش دهم.

میدان یک دو قطبی روی خط واصل بارها- ادامه

- برای به دست آوردن رابطه

$$E = \frac{2Kqd}{z^3} \frac{1}{(1 - (d/2z)^2)^2}$$

تاکنون هیچ تقریبی به کار نرفته است.

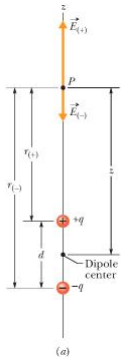
همانطور که انتظار داشتیم حاصلضرب $|\vec{p}| = qd$ ظاهر شد.

در فواصل زیاد $z \gg d$ داریم:

$$\lim_{z \gg d} E = \frac{2Kqd}{z^3}$$

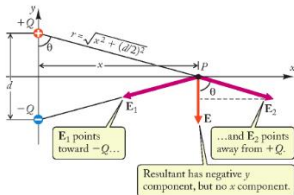
زیرا سهم جمله $(d/2z)$ در مخرج کسر بسیار ناچیز خواهد بود.

میدان دوقطبی در فواصل زیاد همیشه به صورت $\frac{1}{z^3}$ کاهش می یابد. از این نکته برای چک کردن درستی جواب های مربوط به دوقطبی استفاده کنید.



شکل مبانی فیزیک،
ویرایش دهم.

میدان یک دو قطبی روی محور عمود بر خط واصل



شکل از اوهانیان، ویرایش سوم.

یعنی

$$E_y = \frac{Kqd}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}}$$

$$\cos \theta = \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + d^2/4}} \quad \text{چون}$$

میخواهیم میدان دو قطبی را در نقطه ای که به فاصله مساوی از بارهای مثبت و منفی قرار دارد بیابیم.

برای پیدا کردن میدان دو قطبی در نقطه مورد نظر (P) باید میدان ناشی از بار مثبت E_2 و میدان ناشی از بار منفی E_1 را یافته و بنا به اصل برهمهنگی آنها را به صورت برداری جمع کنیم:

$$\vec{E} = \vec{E}_2 + \vec{E}_1$$

$$|\vec{E}_2| = |\vec{E}_1| = \frac{Kq}{r^2}$$

با توجه به تقارن مساله، میدان در جهت x صفر است:

$$E_x = E_{2x} - E_{1x} = \frac{Kq}{r^2} \sin \theta - \frac{Kq}{r^2} \sin \theta = 0$$

ولی میدان ها در جهت y همدیگر را تقویت می کنند:

$$E_y = E_{2y} + E_{1y} = 2 \frac{Kq}{r^2} \cos \theta$$

ادامه $\Leftarrow \Leftarrow$

میدان یک دو قطبی روی محور عمود بر خط واصل- رفتار در فواصل دور

● میدان مورد نظر به صورت زیر به دست آمد:

$$E_y = \frac{Kqd}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}}$$

● در فواصل دور از دوقطبی، یعنی $x \gg d$ ، داریم:

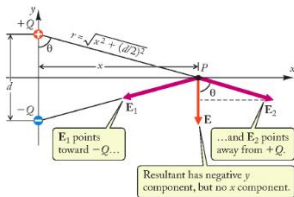
$$\lim_{x \gg d} E_y = \frac{Kqd}{x^3} \frac{1}{(1 + d^2/(4x^2))^{3/2}} \simeq \frac{Kqd}{x^3}$$

زیرا سهم جمله $d^2/(4x^2)$ در فواصل زیاد بسیار کوچک خواهد بود.

● توجه کنید که:

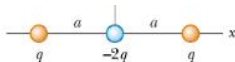
میدان با ممان دوقطبی $p = qd$ متناسب است.

میدان دوقطبی در فواصل زیاد به صورت $\frac{1}{r^3}$ کاهش می یابد.



شکل از اوهانیان، ویرایش سوم.

تمرین حل شده- میدان یک چهار قطبی

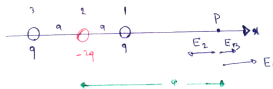


میدان الکتریکی یک چهار قطبی:

الف) میدان چهار قطبی مقابل را در فاصله

x از محور چهار قطبی بیابید. ب) اگر فاصله

x از ابعاد چهار قطبی a بسیار بزرگتر باشد (یعنی $x \gg a$) آنگاه میدان چهار قطبی به چه صورت با x تغییر خواهد کرد؟



برای حل مساله بالا اندازه میدان تک تک

بارها را در نقطه P به دست می آوریم:

$$E_1 = \frac{Kq}{(x-a)^2}, \quad E_2 = \frac{2Kq}{x^2}, \quad E_3 = \frac{Kq}{(x+a)^2}$$

حال، بنا به اصل برهمه‌نی، میدان کل برابر است با جمع برداری تک تک میدان‌ها $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$.

میدان الکتریکی یک چهار قطبی - ادامه

بنابراین، اندازه میدان کل با توجه به شکل بالا برابر است با

$$E = E_1 + E_3 - E_2 = \frac{Kq}{(x-a)^2} + \frac{Kq}{(x+a)^2} - \frac{2Kq}{x^2}$$

حال می خواهیم اندازه میدان در فواصل دور، یعنی $a \gg x$ ، را بیابیم. برای اینکار فاکتور x در مخرج را جدا می کنیم:

$$E = \frac{Kq}{x^2} \left(\frac{1}{(1-a/x)^2} + \frac{1}{(1+a/x)^2} - 2 \right)$$

سوال: چرا همیشه برای پیدا کردن میدان در فواصل دور اینکار را انجام می دهیم؟

در فواصل دور مقدار a/x بسیار کوچک است، یعنی $a/x \ll 1$ ، بنابراین می توانیم مخرج ها را با استفاده از بسط دو جمله ای بسط دهیم.

$$(1 \pm \epsilon)^n = 1 \pm n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2!} \epsilon^2 + \dots$$

با استفاده از بسط بالا داریم $(\epsilon = a/x)$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{Kq}{x^2} \left((1 - a/x)^{-2} + (1 + a/x)^{-2} - 2 \right) \\ &= \frac{Kq}{x^2} \left(1 + \frac{2a}{x} + \frac{-2(-2-1)}{2!} \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \dots + 1 - \frac{2a}{x} + \frac{-2(-2-1)}{2!} \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \dots - 2 \right) \end{aligned} \quad (1)$$

میدان الکتریکی یک چهار قطبی – ادامه

جملات مراتب بالاتر، یعنی $(a/x)^3$ و $(a/x)^4$ و ...، به این دلیل نوشته نشده اند که سهم شان کوچک است. هرچند، در مسائل مربوط به هشت قطبی به کار می آیند.

پس از ساده کردن جملات عبارت بالا به نتیجه زیر برای میدان یک چهارقطبی می رسم

$$\lim_{x \gg a} E = \frac{-6Kqa^2}{x^4}$$

مقدار $6qa^2$ ممان چهارقطبی نامیده می شود.

میدان چهارقطبی در فواصل دور به صورت $1/r^4$ کاهش پیدا می کند.

محاسبات بالا را حتما یک بار انجام دهید!

به مساله چهارقطبی دیگری، که در انتهای این درس به صورت تمرین ارائه شده است، مراجعه کنید.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید خصوصیات اصلی میدان را بیان کنید. یعنی:

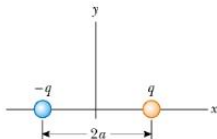
- ۱ تفاوت دیدگاه نیرو و دیدگاه میدان به مسائل فیزیکی را بیان کنید.
- ۲ چند میدان اسکالر و برداری در فیزیک را مثال بزنید.
- ۳ تعریف دقیق (ریاضیاتی) میدان و رابطه آن با نیرو را بنویسید.
- ۴ سه ویژگی اصلی میدان بار نقطه ای را بیان کنید.
- ۵ دو قطبی چیست؟
- ۶ ممان دو قطبی چیست؟ رفتار میدان دوقطبی در فواصل دور چگونه است؟
- ۷ رسم خطوط میدان دوقطبی.

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای جذب مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل مسائل زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

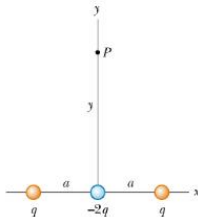


(۱)
میدان الکتریکی یک دوقطبی در یک نقطه دلخواه فضا:
نشان دهید که در فواصل بسیار زیاد از دو قطبی، مولفه
های E_x و E_y میدان الکتریکی در یک نقطه دلخواه
فضا به مختصات (x, y) به صورت زیر هستند:

$$E_y = \frac{3Kpxy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$E_x = \frac{Kp(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

تمرین



۲) میدان الکتریکی یک چهار قطبی:

الف) میدان چهار

قطبی مقابل را در فاصله y از مرکز چهار قطبی بیابید.

ب) اگر فاصله y از ابعاد چهار

قطبی a بسیار بزرگتر باشد (یعنی $y \gg a$) آنگاه

میدان چهار قطبی به چه صورت با y تغییر خواهد کرد؟

مبحث بعدی: میدان توزیع بارهای پیوسته

بسیاری از مسائل کاربردی در الکتروستاتیک را می توان به عنوان توزیع بارهای پیوسته در نظر گرفت. در جلسه بعد میدان اینگونه توزیع بارها را با استفاده از اصل برهمنهی و تکنیک المان ها بدست خواهیم آورد.

مراجع

- ❶ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❷ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

با سپاس از توجه شما

