

سینماتیک و دینامیک نسبیتی

تبدیلات لورنتس

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

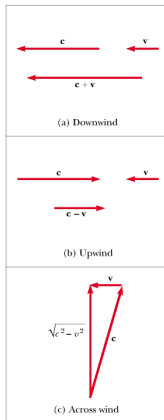
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

تبدیلات لورنتس

تبدیلات لورنتس



آنچه تاکنون آموخته ایم: اصول نظریه نسبیت خاص اینشتین



در بخش اول، یعنی ”مبانی نسبیت خاص”، درباره دلایل تجربی و تئوری برای تغییر نظریه حرکت بحث کردیم. در این بخش دیدیم که اینشتین نظریه نسبیت خاص را بر اساس دو اصل زیر معرفی کرد:

اصل نسبیت اینشتین: قوانین فیزیک در تمام دستگاه های لخت یکسان هستند. هیچ دستگاه لخت مرجعی وجود ندارد.

اصل ثبات سرعت نور: در فضای تهی مقدار سرعت نور در تمام دستگاه های لخت یکسان و برابر c است.

در ابتدا به نظر می رسد اصل نسبیت با اصل ثبات سرعت نور در تضاد است؛ زیرا بنا به تبدیلات گالیلئو انتظار داریم که سرعت نور در دستگاه های مختلف متفاوت باشد. برای رفع این مشکل، اینشتین

مفهوم همزمانی پدیده ها را تغییر داد و نسبیت همزمانی را بنیان نهاد.

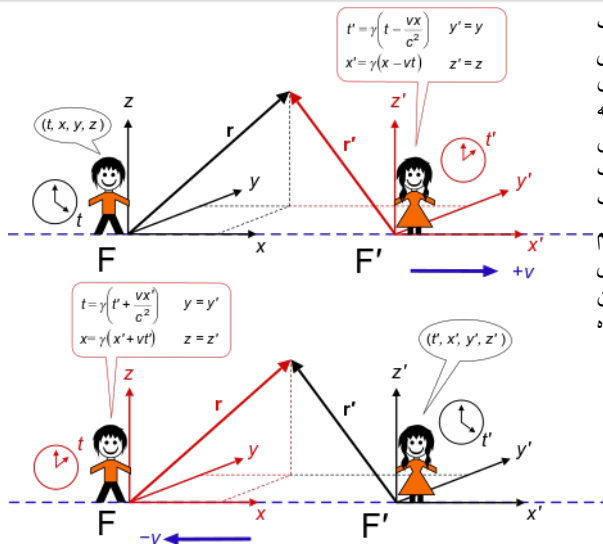
پروژه اندازه گیری بازه های مکانی را بازتعریف کرد.

در نتیجه تبدیلات جدیدی (تبدیلات لورنتس به جای تبدیلات گالیلئو) را معرفی کرد.

در ادامه نتایج سینماتیکی (توصیف حرکت) و دینامیکی (عوامل حرکت) ناشی از این نظریه را توضیح خواهیم داد.

اهداف این جلسه: پیدا کردن تبدیلات لورنتس با استفاده از کلی ترین تبدیلات خطی بین دو دستگاه

در بخش اول تبدیلات لورنتس را به روشی ابتدایی (بر اساس انقباض طول نسبی، اندازه گیری فاصله ها با استفاده از پالس های نوری و اصل ثبات سرعت نور) به دست آوردیم. در اینجا می خواهیم این تبدیلات را به صورتی روشمند و با فرض کلی ترین تبدیل خطی بین دو دستگاه مختصات بیابیم.



کلی ترین تبدیل خطی بین دو دستگاه مختصات

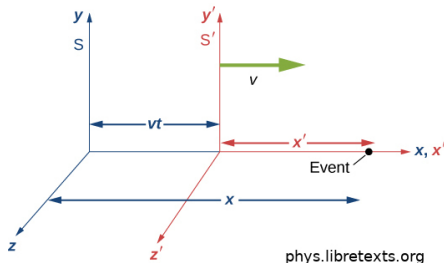
- دو دستگاه مختصات لخت S و S' را در نظر بگیرید. مختصات یک رویداد مشخص در این دو دستگاه را به ترتیب با (t, x, y, z) و (t', x', y', z') نشان می دهیم. به چند دلیل تبدیل مختصات بین این دو دستگاه باید حتما خطی و از درجه ۱ باشد، یعنی

$$t' = a_{11}t + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z + a_{15}$$

$$x' = a_{21}t + a_{22}x + a_{23}y + a_{24}z + a_{25}$$

$$y' = a_{31}t + a_{32}x + a_{33}y + a_{34}z + a_{35}$$

$$z' = a_{41}t + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z + a_{45}$$



- لطفا وحشت نکنید! بزودی نشان خواهیم داد که اکثر این پارامترها (در حالت ساده مد نظر ما) باید صفر باشند.

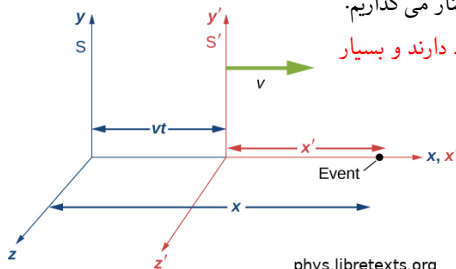
- چرا این جملات خطی هستند؟ یعنی چرا جملاتی از جنس t^3 ، $x^{0.5}$ و یا توابع پیشرفته تر مانند $\sin y$ در تبدیل بالا موجود نیستند؟

چرا تبدیل خطی؟

- توجه کنید که اگر مثلاً جمله x' به مربع x بستگی داشته باشد، یعنی $x' = Bx^2$ ، آنگاه طول متر به مکان آن در فضا بستگی خواهد داشت. برای درک این نکته توجه کنید که فاصله بین دو نقطه در این دو دستگاه به صورت $x'_2 - x'_1 = B(x_2^2 - x_1^2)$ حال یک میله به طول یک متر را در نظر بگیرید که نقاط انتهایی آن در $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ قرار دارد؛ بنابراین طول این میله در دستگاه S' برابر $x'_2 - x'_1 = 3B$ می باشد. ولی اگر نقاط انتهایی همین میله در $x_1 = 4$ و $x_2 = 5$ قرار داشته باشد؛ طول میله در دستگاه S' برابر $x'_2 - x'_1 = 9B$ خواهد بود.

- این پدیده (یعنی وابستگی متر به موقعیت در فضا) در نسبیت خاص - که موضوع آن دستگاه های لخت است - مورد قبول نیست، چون فضا و زمان مورد نظر در نسبیت خاص در همه نقاط دقیقاً همسان است. بنابراین ما این موارد را کنار می گذاریم.

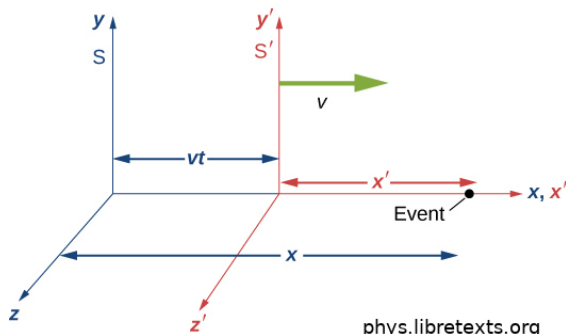
- هرچند در نسبیت عام تبدیلات پیچیده تر وجود دارند و بسیار هم مهم هستند! این موارد را بعداً خواهیم دید.



phys.libretexts.org

چرا تبدیل خطی؟

- همچنین، توجه کنید که برخی جملات با توان های غیر ۱ و ۰ باعث شتاب دستگاه S' نسبت به دستگاه S می شود. بنابراین دیگر حداقل یکی از این دو دستگاه لخت نخواهند بود. مثلا اگر جمله At^2 در تساوی دوم موجود باشد، آنگاه دستگاه S' نسبت به دستگاه S شتاب خواهد داشت.
- عدم وابستگی جملات تبدیلات به مشتقات زمانی موقعیت (مانند v ، ω و ...) تضمین می کند که دو دستگاه مختصات نسبت به هم دوران نکنند؛ یعنی دو دستگاه باز هم نسبت به هم لخت هستند.



phys.libretexts.org

چرا تبدیل خطی؟

در مورد دلایل خطی بودن تبدیل بین دو دستگاه مختصات قضیه های مختلفی بیان و اثبات شده اند. بررسی کلی این قضیه ها خارج از چارچوب درس فعلی است. ولی شما می توانید برای مطالعه ابتدایی در این زمینه به کتاب های رزنیك و ریندلر مراجعه كنید.



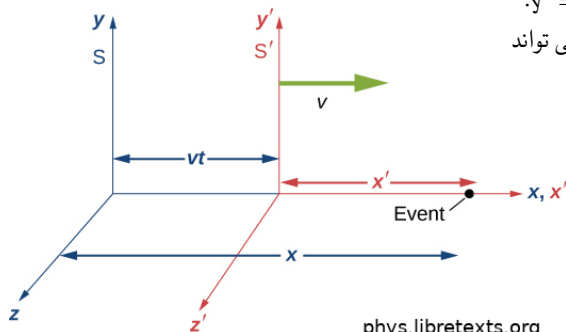
پیدا کردن تبدیلات لورنتس

• توجه: سرعت دستگاه S' نسبت به دستگاه S برابر با v و سرعت دستگاه S نسبت به دستگاه S' برابر با $-v$ می باشد.

• اگر دو دستگاه S و S' در زمان $t = t' = 0$ بر هم منطبق باشند، آنگاه با توجه به اینکه حرکت نسبی دو دستگاه فقط در جهت x است، صفحات $y = 0$ و $y' = 0$ همواره بر هم منطبق خواهند بود. در نتیجه باید داشته باشیم

$$a_{x1} = a_{x3} = a_{x4} = a_{x5} = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت: $y' = By$
در اینجا B یک ثابت است که می تواند به سرعت v وابسته باشد.



phys.libretexts.org

پیدا کردن تبدیلات لورنتس

تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

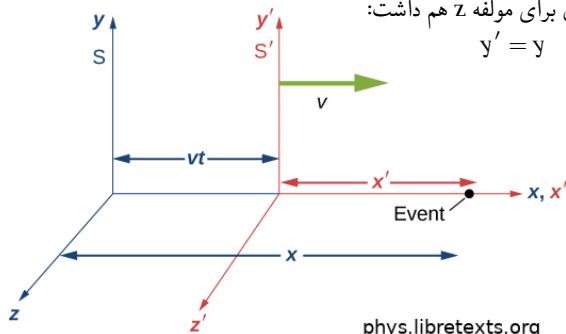
$$t \leftrightarrow t' \quad x \leftrightarrow -x' \quad y \leftrightarrow y' \quad z \leftrightarrow -z'$$

این تبدیل جای دستگاه مختصات S و S' را عوض می کند، ولی شکل کلی تبدیل y به y' را تغییر نمی دهد. در نتیجه می توان نوشت:

$$y = By' \quad \text{and} \quad y' = By \quad \Rightarrow \quad B^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad B = \pm 1$$

مقدار $B = -1$ را کنار می نهیم زیرا در حد $v \rightarrow 0$ انتظار داریم که شرط $y \rightarrow y'$ را داشته باشیم. همین استدلال را می توان برای مولفه z هم داشت:

$$y' = y \quad z' = z$$



phys.libretexts.org

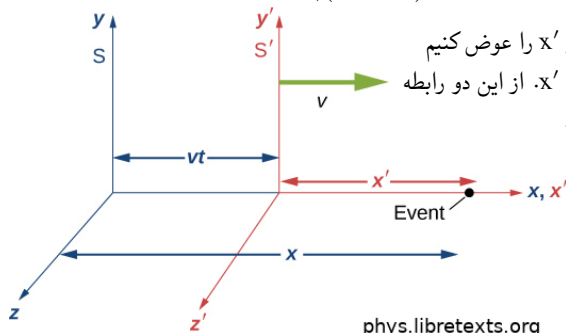
پیدا کردن تبدیلات لورنتس

- با توجه به اینکه مبدا مختصات دستگاه S' ، یعنی $x' = 0$ ، همیشه باید در فاصله $x = vt$ از مبدا مختصات دستگاه S قرار داشته باشد، باید داشته باشیم $x' = \gamma(x - vt)$. در اینجا γ عددی ثابت است و احتمالاً تابع v . همچنین از آنجا که مبدا مختصات دستگاه S ، یعنی $x = 0$ ، همیشه باید در فاصله $x' = -vt'$ از مبدا مختصات دستگاه S' قرار داشته باشد، باید داشته باشیم $x = \gamma'(x' + vt')$. پس داریم $a_{23} = a_{24} = a_{25} = 0$.

- حال اگر جهت محوره‌های x و x' را عوض کنیم، خواهیم داشت:

$$-x' = \gamma(-x - vt) \Rightarrow x' = \gamma(x + vt)$$

همچنین اگر نقش محوره‌های x و x' را عوض کنیم خواهیم داشت $x' = \gamma'(x + vt)$. از این دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت $\gamma' = \gamma$.



phys.libretexts.org

پیدا کردن تبدیلات لورنتس

- با توجه به اصل ثبات سرعت نور در هر دو دستگاه S و S' داریم $x = ct$ و $x' = ct'$. حال از دو رابطه $x' = \gamma(x - vt)$ و $x = \gamma(x' + vt')$ خواهیم داشت:

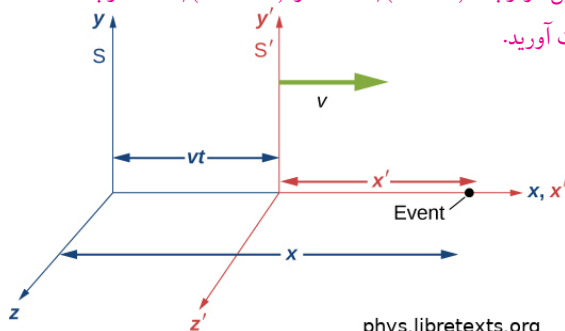
$$ct' = \gamma(ct - vt)$$

$$ct = \gamma(ct' + vt')$$

از اینجا می توان فاکتور γ را به دست آورد (اثبات کنید!)

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

- تمرین: با حذف پارامتر x' از بین دو رابطه $x' = \gamma(x - vt)$ و $x = \gamma(x' + vt')$ رابطه $t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ را به دست آورید.



phys.libretexts.org

پیدا کردن تبدیلات لورنتس

- تمرین: با حذف پارامتر x' از بین دو رابطه $x' = \gamma(x - vt)$ و $x = \gamma(x' + vt')$ رابطه $t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ را به دست آورید.
- پاسخ:

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma(\gamma[x - vt] + vt') = \gamma^2[x - vt] + \gamma vt'$$

$$\gamma vt' = x - \gamma^2[x - vt] = x(1 - \gamma^2) + \gamma^2 vt$$

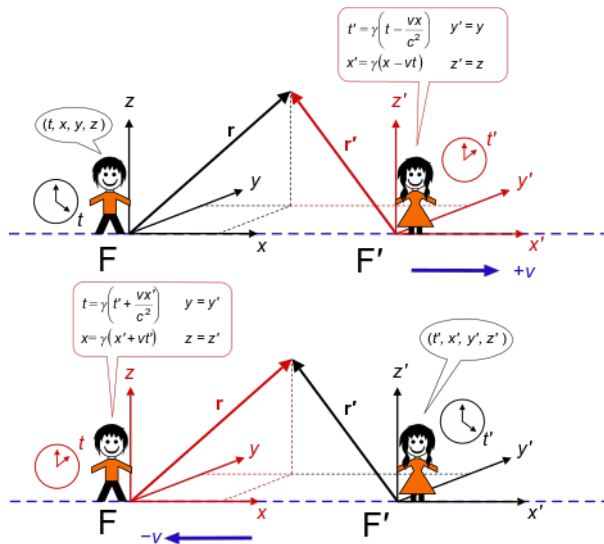
از اینجا می توان t' را یافت:

$$t' = \frac{x}{v} \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma} \right) + \gamma t = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

که البته از رابطه زیر استفاده کرده ایم:

$$\frac{1 - \gamma^2}{\gamma} = \frac{1 - \frac{1}{1 - v^2/c^2}}{1/\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{-v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

جمع‌بندی تبدیلات لورنتس



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید روش معرفی شده برای به دست آوردن تبدیلات لورنتس را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱. روش به کار رفته برای استخراج تبدیلات لورنتس را توضیح دهید.
۲. درباره روش های دیگر برای استخراج تبدیلات لورنتس تحقیق کنید.
۳. چرا فقط تبدیلات خطی را برای به دست آوردن تبدیلات لورنتس در نظر گرفته ایم؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین ها: زمان تحویل ۲۵ آبان ماه

- ناوردایی کمیت $\Delta s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ تحت تبدیلات لورنتس را نشان دهید.
- پارامترهای γ و $1/\gamma$ را بر حسب پارامتر $\beta = v/c$ رسم کنید.

- **تمرین برای دانشجویان علاقمند:** دستگاه مختصات S' با سرعت $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ نسبت به دستگاه S در حال حرکت است. نشان دهید که تبدیلات مختصات بین این دو دستگاه به شکل زیر است. در اینجا $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ ، $\gamma = 1/\sqrt{1 + \vec{\beta}^2}$ و $\alpha = (\gamma - 1)/\vec{\beta}^2$.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \alpha\beta_x^2 & \alpha\beta_x\beta_y & \alpha\beta_x\beta_z \\ -\gamma\beta_y & \alpha\beta_y\beta_x & 1 + \alpha\beta_y^2 & \alpha\beta_y\beta_z \\ -\gamma\beta_z & \alpha\beta_z\beta_x & \alpha\beta_z\beta_y & 1 + \alpha\beta_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

مبحث بعدی: سرعت و شتاب در نسبیت خاص

- در جلسه بعد قوانین تبدیل سرعت و شتاب را در نسبیت خاص به دست آورده و برخی کاربردهای آنها را بیان می کنیم.



مراجع

- ➊ Introduction to Special Relativity; Robert Resnick
- ➋ Relativity: Special, General, and Cosmological; Wolfgang Rindler
- ➌ General Relativity: An Introduction for Physicists; M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby
- ➍ Introduction To Special Relativity; Markus Klute
<https://ocw.mit.edu/courses/8-20-introduction-to-special-relativity-january-ia>
- ➎ Leonard Susskind's Special Relativity, Find in YouTube

با سپاس از توجه شما

