

فیزیک مکانیک

فصل نهم: سیستم های ذرات، مرکز جرم و تکانه خطی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

فصل نهم: سیستم های ذرات، مرکز جرم و تکانه خطی

- برخورد و ضربه
- پایداری تکانه خطی
- تکانه و انرژی جنبشی در برخورد



آنچه گذشت...

- قوانین حرکت:
یکی از راه های نوشتن قوانین حرکت، استفاده از سه قانون حرکت نیوتن است. این شکل از علم مکانیک کلاسیک را مکانیک نیوتنی می نامند. نوشتن قوانین مکانیک به شکل های دیگر، مانند مکانیک لاگرانژی، هامیلتونی و ... هم ممکن است.
ما در این کتاب مکانیک نیوتنی را بررسی خواهیم کرد.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

قانون کولن برای دو بار نقطه ای:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

قانون هوک برای جرم متصل به فنر

$$F = -kx$$

نیروی عمودی سطح، کشش نخ، نیروی ارشمیدس و ...

این دو دسته قانون، طیف بسیار گسترده ای از پدیده های فیزیکی را به درستی توضیح می دهند.

قانون اول: وقتی برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد، جسم حالت حرکت خود را حفظ خواهد کرد. یعنی اگر ساکن باشد، ساکن خواهد ماند و اگر با سرعت در حال حرکت باشد، با همان سرعت به حرکت خود ادامه خواهد داد.

قانون دوم: رابطه شتاب و نیرو

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

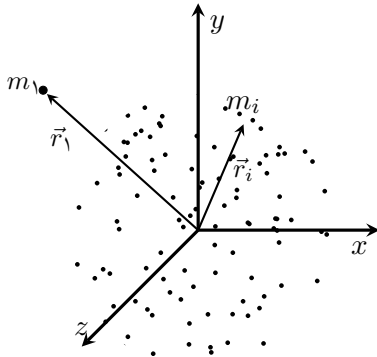
قانون سوم نیوتن: هر عملی را عکس العملی است، با مقدار مساوی و در جهت خلاف آن

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

قوانین نیوتن فقط در دستگاه های لخت برقرار هستند.

پرسش: تاکنون قوانین مکانیک را برای یک تک ذره نوشته ایم. آیا می توان این قوانین را برای سیستم های ذره نیز نوشت؟

مرکز جرم



برای سیستم های چند ذره ای، که در هر سه جهت فضایی گسترده شده اند، نیز می توان ایده بالا را به راحتی تعمیم داد:

$$x_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

$$y_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i$$

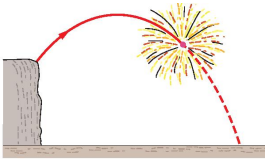
$$z_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i$$

و یا به صورت خلاصه:

$$\vec{r}_{com} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

در اینجا، m_i جرم ذره i ام است که در موقعیت $\vec{r}_i$ قرار دارد. همچنین، N تعداد ذرات سیستم و m_i و $M = \sum_{i=1}^N m_i$ جرم کل سیستم است.

تکانه و قانون دوم نیوتن برای سیستم های ذره



قضیه: نیروی کل خارجی وارده به یک سیستم ذره برابر است با جرم کل سیستم ضربدر شتاب مرکز جرم:

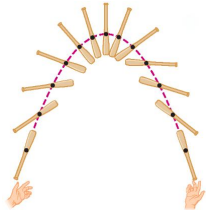
$$\vec{F}_{tot, ext} = M \vec{a}_{com}$$

حاصلضرب جرم جسم در سرعت آن را بردار تکانه خطی (linear momentum) و یا بردار اندازه حرکت خطی جسم می نامند:

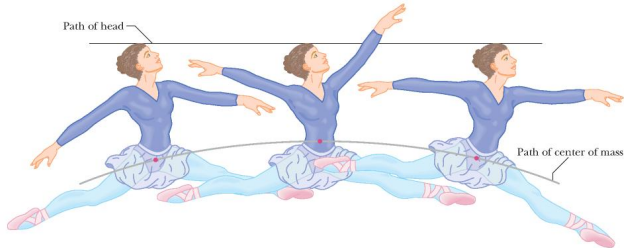
$$\vec{p} = m \vec{v}$$

قضیه: نیروی کل خارجی وارده به یک سیستم ذره برابر است با آهنگ تغییر در تکانه کل سیستم:

$$\vec{F}_{tot, ext} = \frac{d}{dt} \vec{P}$$



شکل ها از مبانی فیزیک، ویرایش دهم



برخورد



نیروهای دخیل در برخوردها بسیار پیچیده هستند. فیلم ها را ببینید.

در اکثر مسائل برخورد تعداد بسیار زیادی ذره شرکت دارند که محاسبه نیروی وارده به تمامی این ذرات ممکن است قابل انجام (و یا حتی مفید) نباشد. نیروهای برخوردی روزمره ذرات الکترومغناطیسی بوده و به صورت بسیار پیچیده ای رفتار می کنند.

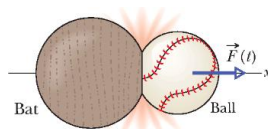
نیروی وارده در برخورد در یک بازه زمانی بسیار کوچک بسیار بزرگ بوده و در خارج از این دوره عملاً صفر است.

برای بررسی برخوردها می توان دو راه پیشنهاد کرد:

تخمین نیروهای دخیل.

استفاده از قوانین پایستگی.

شکل ها از ویرایش دهم مبانی فیزیک هالیدی.



ضربه و تخمین نیروی وارده در برخورد

همانطور که گفته شد، نیروی وارده در برخورد پیچیده بوده و در یک بازه بسیار کوتاه، با اندازه بسیار زیاد، ظاهر می شود. شکل مقابل (بالا) را ببینید. برای تخمین نیروی وارده در یک برخورد می توانیم به روش زیر عمل کنیم.

ضربه را به عنوان انتگرال زیر نمودار نیرو-زمان ($F - t$) تعریف می کنیم:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$

حال با توجه به رابطه نیرو و تکانه (قانون دوم نیوتن)، یعنی

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{P}}{dt} dt = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{P} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

داریم:

یعنی، ضربه منتقل شده در یک برخورد برابر است با تغییر در تکانه خطی کل:

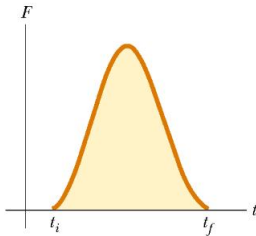
$$\vec{J} = \Delta \vec{p}$$

با توجه به این نکته (و قضیه مقدار میانگین) می توان مقدار متوسط نیرو را تخمین زد (شکل پایین):

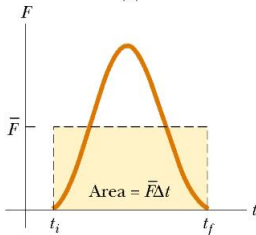
$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

مقدار Δp را به راحتی می توان از سینماتیک سیستم پیدا کرد. این البته پایین ترین مرتبه تقریب برای یافتن نیروست.

شکل ها از ویرایش هشتم مبانی فیزیک هالیدی.



(a)



(b)

مثال: ضربه

جریان ثابتی از گلوله ها با جرم m و سرعت v به یک هدف برخورد می کند. اگر n گلوله در زمان Δt به هدف برخورد کنند، نیروی میانگین وارده به هدف را در صورتی که الف) گلوله ها در هدف متوقف شوند، ب) گلوله ها از هدف با سرعت v بازگردند، بیابید. پاسخ: نیروی میانگین برابر است با

$$\bar{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

بنابراین اگر تغییر در تکانه را بیابیم، می توانیم نیروی میانگین وارده به هدف را پیدا کنیم. پاسخ الف: تغییر در تکانه در این حالت برابر است با:

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v \Rightarrow \Delta p = -nmv$$

$$\bar{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-nmv}{\Delta t}$$

بنابراین

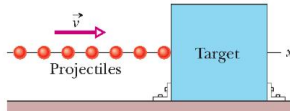
پاسخ ب: تغییر در تکانه در این حالت برابر است با:

$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v \Rightarrow \Delta p = -2nmv$$

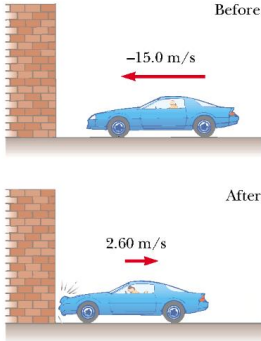
$$\bar{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-2nmv}{\Delta t}$$

بنابراین

شکل از ویرایش دهم مبانی فیزیک هالیدی.



مثال: تاثیر سپر ماشین در برخورد



در یک تست سپر ماشین، اتومبیلی با جرم 1500 kg با دیوار برخورد می کند. سرعت اولیه و نهایی ماشین به ترتیب $\vec{v}_i = -15.0 \hat{i}$ و $\vec{v}_f = 2.6 \hat{i}$ می باشد و برخورد در زمان 0.15 s رخ داده است. ضربه وارده و نیروی میانگین در حین برخورد را بیابید.

پاسخ:

$$\vec{J} = \Delta \vec{p} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = 1500 \left(2.6 \hat{i} - (-15.0 \hat{i}) \right) = 2.64 \times 10^4 \hat{i} \text{ kg m/s}$$

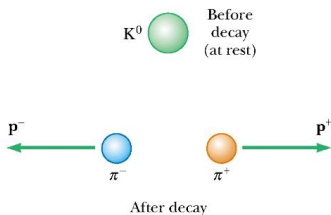
$$\bar{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4 \hat{i} \text{ kg m/s}}{0.15} = 1.76 \times 10^5 \hat{i} \text{ N}$$

بیندیشیم: نقش سپر ماشین در کاهش نیروی برخورد چیست؟

شکل ها از ویرایش هشتم مبانی فیزیک هالیدی.



پایستگی تکانه



قضیه: اگر نیروی کل خارجی وارد شده به سیستم صفر باشد، تکانه سیستم ثابت باقی می ماند:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

این قضیه یکی از مهمترین نتایج مکانیک کلاسیک است.

اثبات: اگر نیروی کل خارجی وارده به سیستم صفر باشد، و همچنین ذرات از سیستم خارج نشوند و یا به آن وارد نشوند (یعنی سیستم بسته باشد)، آنگاه بنا به رابطه بین تکانه و نیرو داریم:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = cte \Rightarrow \vec{P}_i = \vec{P}_f$$

در صورت وجود برهمکنش های داخلی در سیستم، باز هم قضیه بالا درست خواهد بود.

این قضیه را در مساله برخورد مورد استفاده قرار خواهیم داد (نیروهای دخیل در برخورد داخلی محسوب می شوند). در واقع در زمان برخورد ممکن است نیروهای خارجی صفر نباشند، ولی از آنجا که اندازه این نیروها در قیاس با نیروهای برخوردی بسیار کوچک است، می توان از آنها صرف نظر کرد. بنابراین باز هم پایستگی تکانه (با تقریب بسیار خوبی) برقرار خواهد بود.

مثال مقابل از واپاشی یک ذره را ببینید.

شکل از ویرایش هشتم مبانی فیزیک.

مثال: پایستگی تکانه در یک انفجار

انفجار یک بعدی: یک سفینه فضایی با جرم کل M در جهت محور x در فضایی به دور از ستاره ها و سیارات حرکت می کند. در ابتدا سرعت این سفینه نسبت به خورشید برابر 2100 km/h می باشد. با یک انفجار کوچک، محموله سفینه به جرم $0.20M$ به بیرون پرتاب می شود. پس از این، سفینه با سرعت 500 km/h نسبت به محموله در جهت محور x حرکت می کند. سرعت سفینه نسبت به خورشید چقدر است؟

پاسخ: نیروی خارجی وارد بر سفینه ناچیز است و بنابراین پایستگی تکانه خطی برقرار است:

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i \Rightarrow Mv_i = (0.20M)v_{MS} + (0.80M)v_{HS}$$

در اینجا v_i سرعت اولیه سفینه، v_{MS} سرعت نهایی محموله نسبت به خورشید و v_{HS} سرعت نهایی سفینه نسبت به خورشید است. حال با توجه به قوانین تبدیل سرعت در دستگاه های مختلف (بحث انتهایی فصل چهارم) داریم:

$$v_{HS} = v_{HM} + v_{MS} \Rightarrow v_{MS} = v_{HS} - v_{HM} = v_{HS} - 500$$

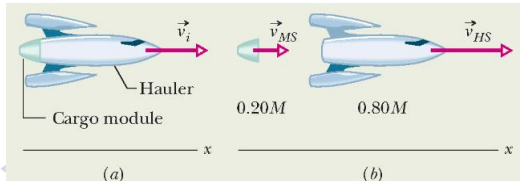
بنابراین از قانون پایستگی تکانه داریم:

$$Mv_i = (0.20M)v_{MS} + (0.80M)v_{HS} \Rightarrow v_i = 0.20(v_{HS} - 500) + 0.80v_{HS}$$

$$v_{HS} = v_i + 0.20 \times 500 \text{ km/h} = 2100 \text{ km/h} + (0.20)(500 \text{ km/h}) = 2200 \text{ km/h}$$

جدا شدن محموله باعث افزایش سرعت سفینه شد! چرا؟ در این زمینه در جلسه بعد بیشتر صحبت خواهیم کرد.

شکل ها از فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.



انواع برخورد

از اینجا روش دوم بررسی برخورد، یعنی استفاده از قوانین پایستگی، را شروع خواهیم کرد.

در همه برخوردها، نیروهای برخوردی بسیار بزرگتر از نیروهای خارجی هستند و بنابراین تکانه در برخورد پایسته (ثابت) است: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$
ولی ممکن است که پایستگی انرژی در برخورد حاکم نباشد.

نکته: از آنجا که برخورد در یک نقطه بسیار محدود رخ می دهد، انرژی پتانسیل نیروهای خارجی قبل و برخورد از برخورد ثابت است؛ بنابراین اگر پایستگی انرژی برقرار باشد داریم:

$$K_i + U = K_f + U \Rightarrow K_i = K_f$$

یعنی اگر پایستگی انرژی برقرار باشد، در واقع انرژی جنبشی کل، قبل و بعد از برخورد ثابت باقی می ماند. دو حالت مختلف (و یک مورد خاص مهم) ممکن است اتفاق بیفتد:

برخورد کشسان (الاستیک): اگر انرژی جنبشی کل سیستم در حین برخورد تغییر نکند، می گوئیم برخورد کشسان است. در این صورت داریم:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \text{and} \quad K_i = K_f$$

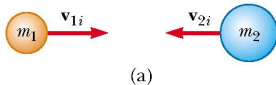
برخورد ناکشسان (غیر الاستیک): اگر قسمتی از انرژی جنبشی در حین برخورد از بین برود (مثلا به نوع دیگری از انرژی مانند انرژی حرارتی، صوتی، روشنایی و ... تبدیل شود)، می گوئیم برخورد ناکشسان است. در برخورد ناکشسان فقط شرط پایستگی تکانه برقرار است:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

برخورد کاملا ناکشسان (کاملا غیر الاستیک): بیشترین هدررفت انرژی وقتی رخ می دهد که دو جسم پس از برخورد به هم بچسبند. این مورد را برخورد کاملا ناکشسان می نامیم. در این حالت نیز فقط شرط پایستگی تکانه برقرار است:

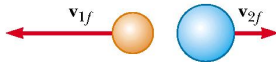
$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

Before collision



(a)

After collision



(b)

مبانی فیزیک، ویرایش هشتم.

برخورد کاملاً ناکشسان

برخورد کاملاً ناکشسان (کاملاً غیر الاستیک): بیشترین هدررفت انرژی وقتی رخ می دهد که دو جسم پس از برخورد به هم بچسبند. این مورد را برخورد کاملاً ناکشسان می نامیم. در این حالت فقط شرط پایستگی تکانه برقرار است:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

فرض کنید، مانند شکل مقابل، دو جسم با جرم های m_1 و m_2 و به ترتیب با سرعت های اولیه $\vec{v}_{1i}$ و $\vec{v}_{2i}$ با هم برخورد می کنند. پس از برخورد دو جسم به هم چسبیده (برخورد کاملاً ناکشسان) و با سرعت نهایی مشترک $\vec{v}_f$ حرکت می کنند. سرعت نهایی را بر اساس سرعت های اولیه بیابید.

با توجه به اینکه در برخورد نیروهای خارجی ناچیز محسوب می شوند، پایستگی تکانه برقرار است. بنابراین داریم:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f \quad \text{و یا}$$

در نتیجه

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

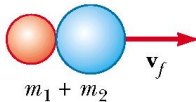
این رابطه سرعت نهایی (و مشترک) دو جسم را در یک برخورد کاملاً ناکشسان به دست می دهد.

Before collision



(a)

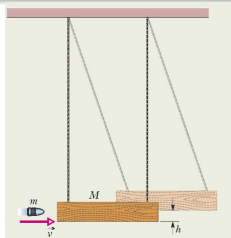
After collision



(b)

مبانی فیزیک، ویرایش هشتم.

مثال از برخورد کاملاً ناکشسان: آونگ بالستیک



می توان با استفاده از آونگ الاستیک، سرعت گلوله را تعیین کرد. فرض کنید که گلوله ای با سرعت v و جرم m به قطعه ای چوبی به جرم M برخورد کرده و این قطعه را به اندازه h بالا می برد. شکل را ببینید. اندازه سرعت v را بر حسب جابه جایی h قطعه چوبی ببینید.

پاسخ: با توجه به پایستگی تکانه قبل و پس از برخورد داریم:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \Rightarrow \quad mv = (M + m)V$$

در اینجا V سرعت قطعه (به علاوه گلوله) پس از برخورد است. دقت کنید که دو جسم به هم چسبیده اند؛ بنابراین برخورد کاملاً ناکشسان بوده و انرژی "در حین برخورد" پایسته نیست.

پس از برخورد البته انرژی پایسته است:

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh$$

از این دو معادله (پس از حذف V) داریم:

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}$$

شکل ها از ویرایش های هشتم و دهم مبانی.



شکل از ویرایش هشتم مبانی
فیزیک هالیدی.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اساسی بحث ضربه، پایستگی تکانه خطی و نقش انرژی جنبشی در برخوردها را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

- ۱ چرا بررسی برخورد پیچیده است؟
- ۲ دو روش واری برخوردها را توضیح دهید.
- ۳ تعریف ضربه را بنویسید. واحد ضربه چیست؟
- ۴ رابطه ضربه و اندازه حرکت (تکانه) چیست؟
- ۵ نقش سپر ماشین در کاهش آثار برخورد را توضیح دهید.
- ۶ قضیه پایستگی تکانه خطی را بیان کنید.
- ۷ چطور می توانیم از قضیه پایستگی تکانه خطی برای بررسی برخوردها استفاده کنیم.
- ۸ انواع برخورد را نام ببرید.
- ۹ آونگ بالستیک چیست و چگونه می توان با استفاده از آن سرعت گلوله را پیدا کرد؟

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

در یک برخورد نیرو به صورت

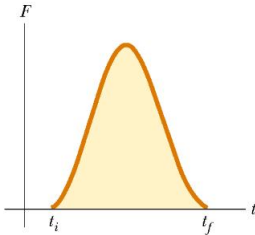
$$F(t) = -1000t(t - 0.1)$$

تغییر می کند. نیرو در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 0.1$ وارد شده است (یعنی در خارج این بازه نیرو صفر است).

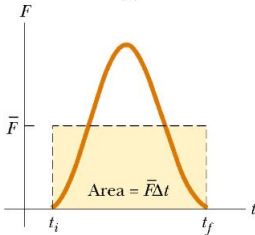
الف: ضربه وارده در این نیرو را به دست آورید.

ب: اگر جرم جسم 10 گرم باشد، تغییر در سرعت جسم چقدر است؟

پ: نیروی میانگین وارده چقدر است؟

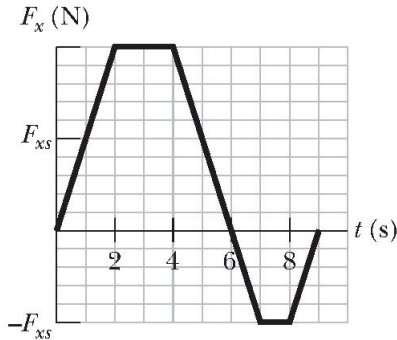


(a)



(b)

تمرین



یک ماشین اسباب بازی 2.0 kg می تواند در راستای محور x حرکت کند. شکل مقابل، نیروی F_x وارده بر ماشین را نشان می دهد. حرکت از زمان $t = 0 \text{ s}$ و از حالت سکون آغاز شده است.

در این شکل داریم $F_{xs} = 3 \text{ N}$. تکانه را در لحظات

الف: $t = 4.0 \text{ s}$

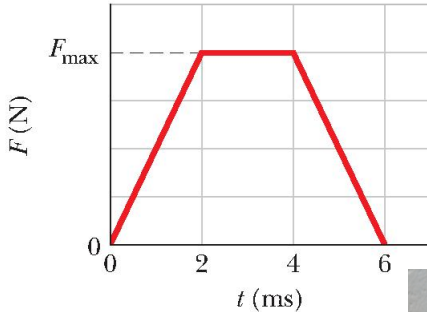
ب: $t = 7.0 \text{ s}$

پ: $t = 9.0 \text{ s}$ بیابید.

ت: نیروی میانگین در بازه 0 تا 9 ثانیه چقدر است؟

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

تمرین



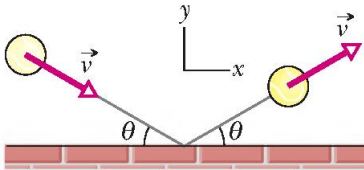
نمودار مقابل، شکل تقریبی نیرو-زمان در طی برخورد یک توپ به دیوار را نشان می دهد. جرم توپ 58 g می باشد. سرعت اولیه توپ 34 m/s عمود بر دیوار بوده و توپ با همین سرعت نیز باز می گردد. بیشینه نیروی وارد شده را بیابید. راهنمایی: در ابتدا از رابطه ضربه-تکانه مقدار ضربه را بیابید. سپس، از رابطه انتگرالی بین نیرو و ضربه، مقدار F_{max} را پیدا کنید.

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.



تمرین

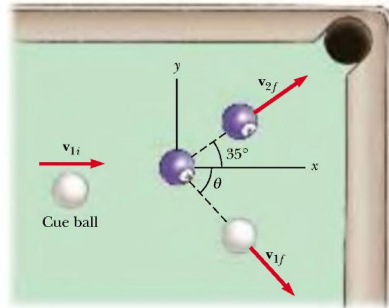
- در شکل مقابل، توپی با جرم m و با زاویه θ با دیوار برخورد کرده و با همان زاویه برمی گردد.
الف: بردار ضربه وارده را بیابید.
- ب: اگر زمان برخورد 3×10^{-2} s باشد، نیروی میانگین را پیدا کنید.
- شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.



مبحث بعدی: سیستم های ذرات و پایستگی تکانه خطی



- در جلسه آینده انواع برخورد را به صورت دقیق تر، و به کمک قوانین پایستگی تکانه خطی و پایستگی انرژی، بررسی خواهیم کرد.
- همچنین از قانون پایستگی تکانه خطی برای تحلیل حرکت سیستم های با جرم متغیر استفاده می کنیم.
- شکل ها از مبانی فیزیک، ویرایش هشتم.



مراجع

- ❶ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❷ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

کلاس های دیگر فیزیک مکانیک

کلاس های درس فیزیک یک دانشگاه صنعتی شریف (مثلا کلاس درس دکتر محمد رضا اجتهادی و یا دکتر محمود بهمن آبادی) را می توانید از مرکز آموزش های الکترونیک دانشگاه صنعتی شریف (و یا حتی از سایت مکتب خونه) دریافت کنید.
<http://ocw.sharif.edu/>

کلاس درس دکتر والتر لوین از دانشگاه MIT در مرکز آموزش های الکترونیک این دانشگاه و یوتیوب:
<https://ocw.mit.edu/index.htm>
<https://www.youtube.com/watch?v=X9c0MRooBzQ>

با سپاس از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.

