

مقدمه ای بر دترمینان و ماتریس ماتریس وارون و حل دستگاه معادلات خطی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ ماتریس وارون و حل دستگاه معادلات خطی
- ماتریس وارون
- حل دستگاه معادلات خطی

ماتریس همانی (یکه)

- یک ماتریس مربعی که عناصر قطر اصلی آن یک هستند و همه عناصر دیگر صفرند را در نظر بگیرید. چنین ماتریسی را ماتریس همانی (یا یکه unit – identity – matrix) می نامند. مثلا ماتریس زیر یک ماتریس همانی 3×3 می باشد.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- توجه کنید که ماتریس همانی یا یکه ماتریسی نیست که همه عناصر آن ۱ باشند. در واقع ویژگی اصلی ماتریس همانی این است که عضو خنثی عمل ضرب ماتریسی می باشد:

$$1A = A \quad A1 = A$$

- به شرطی که ضرب ماتریس مورد نظر تعریف شده باشد. مثلا اگر ماتریس A یک ماتریس $m \times n$ باشد، آنگاه ماتریس همانی ۱ در ضرب $1A$ باید $m \times m$ باشد، ولی ماتریس همانی ۱ در ضرب $A1$ باید $n \times n$ باشد.

- ماتریس های همانی برای همه ابعاد n وجود دارند.

$$OA = O \quad AO = O \quad \text{توجه کنید که برای ماتریس تهی داریم:}$$

- توجه کنید که عناصر ماتریس همانی به دلتای کرونکر رابطه دارند: $1_{ij} = I_{ij} = \delta_{ij}$. ماتریس همانی را با I نیز نشان می دهند.

ماتریس قطری

- یک ماتریس مربعی که عناصر غیر قطر اصلی آن صفر و برخی عناصر قطر اصلی آن غیر صفرند را ماتریس قطری (diagonal matrix) می نامند. مثلاً ماتریس زیر یک ماتریس قطری 3×3 می باشد.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- توجه کنید که ماتریس همانی حالت خاصی از ماتریس قطری است.
- تمرین: نشان دهید که دو ماتریس قطری A و B همیشه جابجا پذیر هستند؛ یعنی $AB = BA$ و یا $[A, B] = 0$.
- تمرین: نشان دهید که ماتریس قطری A و ماتریس غیر قطری B در حالت کلی جابجا پذیر نیستند؛ یعنی $AB \neq BA$ ، مگر اینکه ماتریس A ضربی از ماتریس یکه (همانی) باشد.

ماتریس وارون

- اغلب اتفاق می افتد که با داشتن ماتریس مربعی A می توان یک ماتریس مربعی مانند B را یافت به طوری که داشته باشیم

$$AB = BA = I$$

- در این صورت ماتریس B را وارون ماتریس A می نامند و معمولاً آن را با A^{-1} نشان می دهند.
- توجه: اگر A^{-1} موجود باشد، آنگاه یکتا خواهد بود.

اثبات از طریق برهان خلف: فرض کنید ماتریس های متمایز B و C هر دو وارون ماتریس A هستند. در این صورت می توان نوشت:

$$AB = BA = AC = CA = I$$

حال با توجه به روابط بالا می توان نوشت:

$$CAB = (CA)B = IB = B$$

$$CAB = C(AB) = CI = C$$

و از طرفی داریم

در نتیجه دو ماتریس B و C با هم برابرند؛ پس ماتریس وارون یکتاست.

آیا همه ماتریس ها وارون پذیرند؟!

توجه کنید که هر عدد حقیقی و موهومی غیر صفر، مانند α ، وارون پذیر است و این وارون را با $1/\alpha$ یا α^{-1} نشان می دهند. ولی این نکته درباره ماتریس ها درست نیست؛ یعنی ماتریس های غیر صفری موجودند که وارون پذیر هم نیستند.

برای توضیح این نکته دو ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرین: نشان دهید که $AB = O$.

حال اگر فرض کنیم که ماتریس A وارون پذیر است آنگاه می توان نوشت:

$$AB = O \longrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}O \longrightarrow B = O$$

که به این معنی است که ماتریس B نیز تهی است. ولی ما به وضوح می بینیم که ماتریس B تهی نیست و این یک تناقض است. پس ماتریس A وارون پذیر نیست، یعنی A^{-1} وجود ندارد.

توجه کنید که هر دو طرف معادله بالا را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کردیم. این نکته با توجه به جابجا ناپذیری عمل ضرب ماتریسی اهمیت دارد.

نتیجه: ماتریس های غیر تهی وجود دارند که وارون پذیر نیستند. هر ماتریس که وارون پذیر نباشد را ماتریس تکین (singular) می نامند.

ماتریس های تکین

- به همین ترتیب، اگر فرض کنیم که B^{-1} وجود دارد، با ضرب طرفین معادله اولیه از سمت راست در B^{-1} داریم:

$$AB = O \rightarrow ABB^{-1} = OB^{-1} \rightarrow A = O$$

که به این معنی است که ماتریس A نیز تهی است. ولی ما به وضوح می بینیم که ماتریس A تهی نیست و این یک تناقض است. پس ماتریس B وارون پذیر نیست، یعنی B^{-1} وجود ندارد.

- توجه: در ریاضیات همه اعداد حقیقی و مختلط تشکیل یک "میدان" (field) می دهند. یکی از ویژگی های میدان این است که عناصر غیر صفر وارون پذیر هستند. ولی ماتریس ها تشکیل حلقه (ring) می دهند. در حلقه ها شرط وارون پذیری عناصر غیر صفر وجود ندارد.

- در ادامه وارون یک ماتریس 2×2 را خواهیم یافت و سپس وارون ماتریس ها را در حالت کلی بحث خواهیم کرد. ماتریس کلی

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرد. می خواهیم ماتریس

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

را بیابیم به صورتی که $AB = BA = I$.

یافتن ماتریس وارون برای ماتریس های 2×2

• ماتریس کلی

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرد. می خواهیم ماتریس

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

را بیابیم به صورتی که $AB = BA = I$.

پاسخ:

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

با حل دستگاه چهار معادله و چهار مجهول بالا می توان دید که جواب ها (x, y, z, t) به صورت زیرند:

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

این ماتریس را ماتریس وارون ماتریس A می نامند و آن را با A^{-1} نشان می دهند زیرا

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

یافتن ماتریس وارون برای ماتریس های $n \times n$

- یادآوری کهاد (minor) یک دترمینان: یک دترمینان مانند a_{ij} را که از مرتبه n است را در نظر بگیرید. کهاد این دترمینان را با M_{ij} و یا $M_{ij}(a)$ نشان می دهیم. این کهاد از مرتبه $n - 1$ است و آن را با حذف سطر شماره i و ستون شماره j از دترمینان a_{ij} به دست می آوریم.
- می توان نشان داد که مولفه های ماتریس وارون یک ماتریس کلی $n \times n$ مانند $A_{n \times n}$ از رابطه زیر به دست می آیند:

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det(A)}$$

- تمرین: با توجه به تعریف دترمینان A بر حسب کهاد آن و رابطه بالا نشان دهید که

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- توجه کنید که ماتریس وارون در صورتی تعریف می شود که $\det(A) \neq 0$.
- تمرین: وارون ماتریس زیر را با استفاده از روش بالا بیابید.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

روش گاوس-جردن برای یافتن وارون یک ماتریس

- روش بالا برای یافتن وارون یک ماتریس وقت گیر است و مهم تر از آن قابلیت الگوریتم سازی چندان خوبی نیز ندارد. بنابراین ما روش گاوس-جردن (Gauss – Jordan) را در ادامه معرفی خواهیم کرد. دستگاه چند معادله خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

این دستگاه یک شکل ماتریسی دارد و اساس روش گاوس-جردن این است که

- با ضرب طرفین یک سطر از دستگاه بالا در یک عدد ثابت، نتیجه دستگاه تغییر نمی کند.
- با تعویض سطور دستگاه، جواب دستگاه عوض نمی شود.
- یک سطر را می توان با همان سطر بعلاوه (یا منهای) ضربی از سطر دیگر جایگزین کرد.

- به مثال زیر دقت کنید.

مثال از روش گaus-جردن

• ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

می خواهیم با عملیات های مجاز بالا کاری کنیم که ماتریس مورد نظر ما به ماتریس یکه تبدیل شود. همزمان عملیات های مورد نظر را بر ماتریس یکه نیز اثر می دهیم تا ماتریس وارون ساخته شود. پس می نویسیم:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

همه عناصر ستون اول را با ضرب در ضریب مناسب به یک تبدیل کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال از روش گaus-جردن

• سطر اول را از سطرهای دوم و سوم کم کنید:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

می خواهیم عناصر روی قطر اصلی ماتریس اولیه ۱ شوند و سایر عناصر نیز صفر شوند. بنابراین سطر دوم هر دو ماتریس را بر $\frac{5}{6}$ تقسیم کنید و $\frac{2}{3}$ برابر سطر دوم را از سطر اول کم کنید. همزمان، $\frac{1}{3}$ برابر سطر دوم را از سطر سوم کم کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

مثال از روش گاوس-جردن

- سطر سوم هر دو ماتریس را بر $\frac{1}{5}$ تقسیم کنید و به عنوان آخرین گام $\frac{1}{5}$ برابر سطر سوم را از دو سطر اول و دوم کم کنید. نتیجه نهایی را مشاهده می کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{18} & -\frac{7}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{7}{18} & \frac{11}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

- ساختار الگوریتمی روش گاوس-جردن باعث می شود که این روش اهمیت بسیاری در محاسبات کامپیوتری داشته باشد.

مشتق یک دترمینان

فرمول زیر برای وارون یک ماتریس

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det(A)}$$

محاسبه مشتق دترمینان را بسیار راحت می سازد. فرض کنید که درایه های دترمینان به پارامتر x بستگی دارند. حال با توجه به رابطه دترمینان بر حسب کهاها

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} M_{ij} (-1)^{i+j}$$

می توان نوشت:

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} M_{ij} = (A^{-1})_{ji} \det(A)$$

حال با توجه به قاعده مشتق گیری زنجیره ای $\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} \frac{da_{ij}}{dx}$ می توان نوشت:

$$\frac{d \det(A)}{dx} = \det(A) \sum_{ij} (A^{-1})_{ji} \frac{da_{ij}}{dx}$$

این فرمول در محاسبات پیشرفته مربوط به کنش ها و لاگرانژی ها بسیار کاربردی خواهد بود.

حل دستگاه معادلات خطی به کمک ماتریس وارون

- در مطالعه خود از دترمینان ها دریافتیم که دستگاه معادلات خطی جواب یکتا دارد اگر و فقط اگر دترمینان ضرایب دستگاه غیر صفر باشد. بنابراین، از نتیجه اخیر می فهمیم که شرط وجود A^{-1} (یعنی شرط غیر تکین بودن A) این است که دترمینان A غیر صفر باشد. به عبارت دیگر،
- یک ماتریس مربعی مانند A تکین است اگر و فقط اگر $\det(A) \neq 0$.
- تمرین: دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید:

$$3x + 8y = 5$$

$$4x + 11y = 7$$

حل دستگاه معادلات خطی به کمک ماتریس وارون

تمرین: دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید:

$$3x + 8y = 5$$

$$4x + 11y = 7$$

پاسخ: دستگاه بالا را می توان به صورت معادله ماتریسی $AX = h$ زیر نوشت:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس A^{-1} را به دست می آوریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{3(11) - 8(4)} \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

می توان معادله ماتریسی $AX = h$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کرد و معادله $x = A^{-1}h$ را یافت:

$$x = A^{-1}h = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تمرین: درستی این دو جواب را چک کنید.

حل دستگاه معادلات خطی به کمک ماتریس وارون

- تمرین: دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید:

$$5x + 15y + 56z = 35$$

$$-4x - 11y - 41z = -26$$

$$-x - 3y - 11z = -7$$

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- تمرین: دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید:

$$2x - 17y + 11z = 0$$

$$-x + 11y - 7z = 8$$

$$3y - 2z = -2$$

پاسخ:

$$X = \begin{bmatrix} 4 \\ 38 \\ 58 \end{bmatrix}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید اهمیت ماتریس وارون و طریقه استفاده از آنها برای حل دستگاه های معادلات خطی را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ ماتریس همانی (یکه) چیست و چه ویژگی هایی دارد؟
 - ۲ ماتریس قطری چیست؟
 - ۳ ماتریس وارون چیست؟
 - ۴ چه نوع ماتریس هایی وارون پذیرند؟ کدام وارون پذیر نیستند؟ منظور از ماتریس تکین چیست؟
 - ۵ روش کهادها برای یافتن ماتریس وارون را توضیح دهید.
 - ۶ روش گاوس-جردن برای یافتن ماتریس وارون را توضیح دهید.
 - ۷ چطور می توان با استفاده از ماتریس وارون دستگاه های معادلات خطی را حل کرد.
 - ۸ شرط وجود جواب یکتا دستگاه معادلات خطی چیست؟
- اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراغوش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

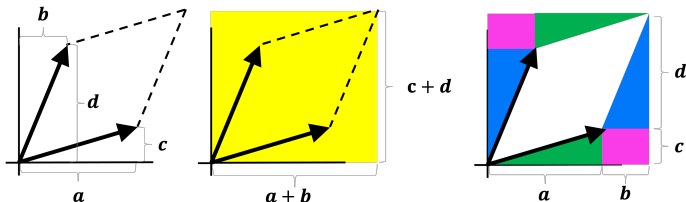


تمرین

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: قضیه ضرب دترمینان ها

در جلسه بعد قضیه ضرب دترمینان ها را بیان و اثبات می کنیم.



$$\text{Parallelogram} = (a+b)(c+d) - ac - bd - bc - bc$$

منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>

با سپاس از توجه شما

