

رهیافت عملگر چگالی در مکانیک کوانتومی

اندازه گیری تصویری در مکانیک کوانتومی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

اندازه گیری تصویری در مکانیک کوانتومی

- عملگر تصویری و ویژگی های آن
- اندازه گیری تصویری بر روی ماتریس چگالی

عملگر تصویر

- وقتی عملگر $|a'\rangle\langle a'|$ بر روی یک کت کلی عمل می کند داریم
- $$(|a'\rangle\langle a'|) |\alpha\rangle = \langle a' | \alpha \rangle |a'\rangle = c_{a'} |a'\rangle$$

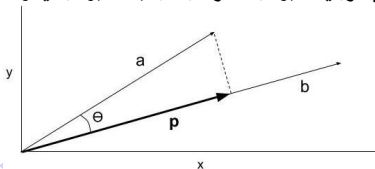
یعنی عملگر $|a'\rangle\langle a'|$ آن بخش از کت دلخواه $|\alpha\rangle$ را که در جهت $|a'\rangle$ است انتخاب می کند و بقیه را دور می ریزد (فیلتر می کند). یا به عبارت دیگر عملگر $|a'\rangle\langle a'|$ کت دلخواه $|\alpha\rangle$ را در جهت $|a'\rangle$ تصویر می کند. پس عملگر $|a'\rangle\langle a'|$ را عملگر تصویر در جهت $|a'\rangle$ می نامند:

$$\Lambda_{a'} \equiv |a'\rangle\langle a'|$$

از اینجا رابطه بستار را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{a'} \Lambda_{a'} = 1$$

- توجه: با توجه به اینکه فرایند اندازه گیری در مکانیک کوانتومی عملایک فرایند فیلترینگ است، عملگر تصویر نقش مهمی در فرایند اندازه گیری دارد چون رمبش تابع موج را نشان می دهد.
- پرسش: در مبحث بردارها چطور یک بردار دلخواه را در جهت دیگر تصویر می کنیم؟



استفاده از عملگر تصویر برای اندازه گیری بر روی حالت های تبهگن

- به همین ترتیب می توان عملگر تصویر به زیر فضای g_i بُعدی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\Lambda_i = \sum_{n=1}^{g_i} |a_i^n\rangle \langle a_i^n|$$

وقتی این عملگر بر روی یک حالت دلخواه مانند $|\psi\rangle$ عمل می کند، آن حالت را به زیر فضای تبهگن $|\psi_i\rangle$ تصویر می کند:

$$|\psi_i\rangle = \Lambda_i |\psi\rangle = \sum_{n=1}^{g_i} |a_i^n\rangle \langle a_i^n | \psi\rangle = \sum_{n=1}^{g_i} c_i^n |a_i^n\rangle$$

در نتیجه می توان رابطه زیر را به دست آورد:

$$\langle \psi_i | \psi_i \rangle = \sum_{n=1}^{g_i} |c_i^n|^2$$

این رابطه همان احتمال یافتن ویژه مقدار a_i است.

- پس در حالت کلی می توان نوشت:

$$P(a_i) = \langle \psi_i | \psi_i \rangle$$

- ولی شکل های دیگری هم برای بازنویسی رابطه بالا وجود دارند. مثلاً

$$P(a_i) = \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \langle \psi | \Lambda_i^\dagger \Lambda_i | \psi \rangle = \langle \psi | \Lambda_i | \psi \rangle$$

$$\Lambda_i^\dagger \Lambda_i = \Lambda_i \quad \text{زیرا}$$

استفاده از عملگر تصویر برای اندازه گیری

تمرین: نشان دهید که هر عملگر تصویر $\Lambda_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ هرکت حالت دلخواه مانند $|\phi\rangle$ را به دو بخش موازی با $|\psi\rangle$ و عمود بر $|\psi\rangle$ به صورت زیر تجزیه می کند:

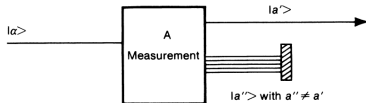
$$|\phi\rangle = \Lambda_\psi |\phi\rangle + (I - \Lambda_\psi) |\phi\rangle$$

I عملگر همانی است. کدام بخش موازی و کدام عمود بر $|\psi\rangle$ می باشد؟

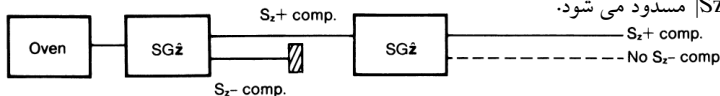
تمرین: نشان دهید که عملگر تصویر هرمیتی است. $\Lambda_i^\dagger = \Lambda_i$

تمرین: نشان دهید که عملگر تصویر خود توان است. $\Lambda_i^2 = \Lambda_i$

کار عملگر تصویر این است که اجازه می دهد فقط بخش خاصی از حالت سیستم عبور کرده و بخش های دیگر مسدود شوند. مثلاً در شکل زیر کت $|a'\rangle$ عبور می کند و همه کت های دیگر مسدود می شوند.



همین وضعیت را در آزمایش اشترن-گرایخ داشتیم. در این آزمایش کت $|S_z; +\rangle$ عبور می کند و کت $|S_z; -\rangle$ مسدود می شود.



اندازه گیری تصویری بر روی ماتریس چگالی

- در ادامه از نمادگذاری مخصوص متون اطلاعات و محاسبات کوانتومی (به ویژه کتاب نیلسن-چوانگ) استفاده می کنیم که در آن معمولاً اندازه گیری را با عملگر تصویر M_i نشان می دهند.
- فرض کنید سیستم پیش از اندازه گیری در حالت ψ_i قرار دارد. در اینصورت احتمال یافتن مقدار m در اندازه گیری برابر است با

$$p(m|i) = \langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle = \text{tr}(M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle \langle \psi_i |)$$

و سیستم به حالت زیر رمبش می کند:

$$|\psi_i^m\rangle = \frac{M_m |\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle}}$$

- حال فرض کنید که سیستم در آنسامبل مخلوط

$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ قرار دارد که در آن p_i احتمالات وزنی هستند. در اینصورت احتمال کل یافتن مقدار m در اندازه گیری برابر است با

$$\begin{aligned} p(m) &= \sum_i p(m|i) p_i \\ &= \sum_i p_i \text{tr}(M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) \\ &= \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho). \end{aligned}$$

اندازه گیری تصویری بر روی ماتریس چگالی

می توان ماتریس چگالی سیستم پس از اندازه گیری را به صورت زیر نوشت:

$$\rho_m = \sum_i p(i|m) |\psi_i^m\rangle \langle \psi_i^m| = \sum_i p(i|m) \frac{M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i| M_m^\dagger}{\langle \psi_i| M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle}$$

همچنین با توجه به قاعده احتمالات شرطی کلاسیک

$$p(i|m) = \frac{p(m, i)}{p(m)} = \frac{p_i p(m|i)}{p(m)}$$

و جایگذاری مقادیر $p(m|i)$ و $p(m)$ از اسلاید قبل، رابطه بالا به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} \rho_m &= \sum_i p_i \frac{M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i| M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)} \\ &= \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \end{aligned}$$

این رابطه را می توان به عنوان تعمیم اصل اندازه گیری برای سیستم های مخلوط در نظر گرفت.

یک رابطه مفید دیگر

- فرض کنید که بر روی یک آنسامبل مخلوط اندازه گیری کرده ایم، ولی بنا به دلیل نتایج اندازه گیری خود را از دست داده ایم. در نتیجه سیستم با احتمال $p(m)$ در حالت ρ_m قرار دارد؛ ولی ما مقدار m را نمی دانیم. در نتیجه ماتریس چگالی سیستم در واقع به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_m p(m) \rho_m \\ &= \sum_m \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho) \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)} \\ &= \sum_m M_m \rho M_m^\dagger,\end{aligned}$$

این رابطه بسیار مفیدی است که بعداً به آن مراجعه خواهیم کرد.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم اندازه گیری تصویری در مکانیک کوانتومی را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

- ویژگی های عملگر تصویری را نام ببرید.
- توضیح دهید که چطور عملگر تصویری فرایند اندازه گیری در مکانیک کوانتومی را توصیف می کند.
- منظور از رمبش تابع موج چیست و ربط آن با عملگر تصویری چیست؟
- حالت یک سیستم خالص پس از اندازه گیری چطور تغییر می کند؟
- حالت یک سیستم مخلوط پس از اندازه گیری چطور تغییر می کند؟
- نتیجه اعمال عملگر تصویر بر ماتریس چگالی را توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

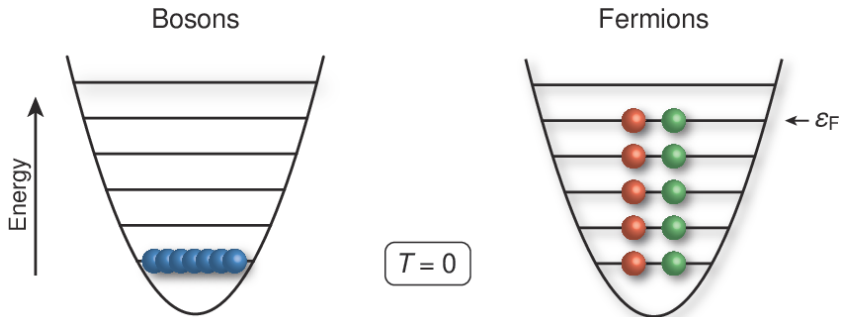
↓↓↓↓ ↑↑↑↑

تمرین

● در این جلسه تمرین نداریم.

مبحث بعدی: مقدمه ای بر مکانیک آماری کوانتومی

- در جلسه بعد با مکانیک آماری کوانتومی به صورت مقدماتی آشنا خواهیم شد.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما