

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

سری توابع

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.



سری توابع

- همگرایی یکنواخت سری ها
- آزمون های همگرایی سری توابع

سری توابع

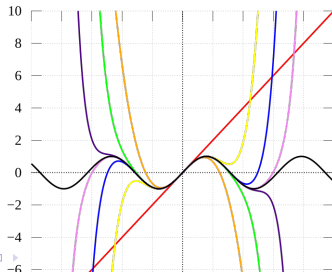
- در اینجا می خواهیم تعریف سری را تعمیم دهیم به صورتی که جملات سری بتوانند علاوه بر شمارنده n تابع متغیر پیوسته x هم باشند. پس این جملات در حالت کلی به شکل $u_n(x)$ نوشته می شوند. همچنین مجموع جزئی این سری ها به شکل زیر نوشته می شود:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

در نتیجه سری نامتناهی توابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

- مفهوم اساسی در بحث سری توابع همگرایی یکنواخت سری (uniform convergence) می باشد.



همگرایی یکنواخت سری های توابع

- همگرایی یکنواخت: اگر برای هر مقدار کوچک $\epsilon > 0$ عددی مانند N مستقل از x موجود باشد ($a \leq x \leq b$) به طوری که برای همه $n \geq N$ داشته باشیم:

$$|S(x) - s_n(x)| < \epsilon \quad \text{for all } n \geq N$$

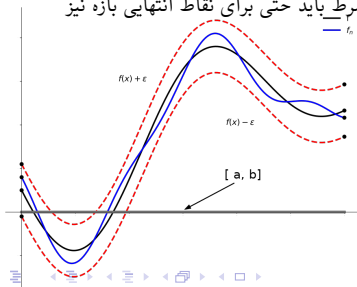
آنگاه می گوئیم سری مورد نظر در بازه $[a, b]$ یکنواخت همگراست.

- مفهوم همگرایی یکنواخت: برای همگرایی یکنواخت سری ها باید بتوانیم عددی مانند N را بیابیم به صورتی که برای همه مقادیر $a \leq x \leq b$ ، قدرمطلق باقیمانده سری

$$R_N = |S(x) - s_N(x)| = \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i(x) \right|$$

از یک مقدار کوچک دلخواه مانند $\epsilon > 0$ کوچکتر باشد. این شرط باید حتی برای نقاط انتهایی بازه نیز صحیح باشد.

معنی هندسی همگرایی یکنواخت را در شکل مقابل می بینید.



مثالی از یک سری که به صورت یکنواخت همگرا نیست!

سری $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ را در بازه $[0, 1]$ در نظر بگیرید. در ابتدا نشان خواهیم داد که این سری همگرا و مطلق همگراست؛ ولی بعدا نشان خواهیم داد که سری یکنواخت همگرا نیست. برای همه نقاط $0 \leq x < 1$ سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ همگراست و مقدار آن برابر است با $1/(1-x)$. بنابراین در بازه مورد نظر داریم:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = 1 \quad 0 \leq x < 1$$

ولی در $x = 1$ همه جملات سری برابر صفر هستند؛ بنابراین $S(1) = 0$ و در نتیجه

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = 1, \quad 0 \leq x < 1,$$

$$= 0, \quad x = 1.$$

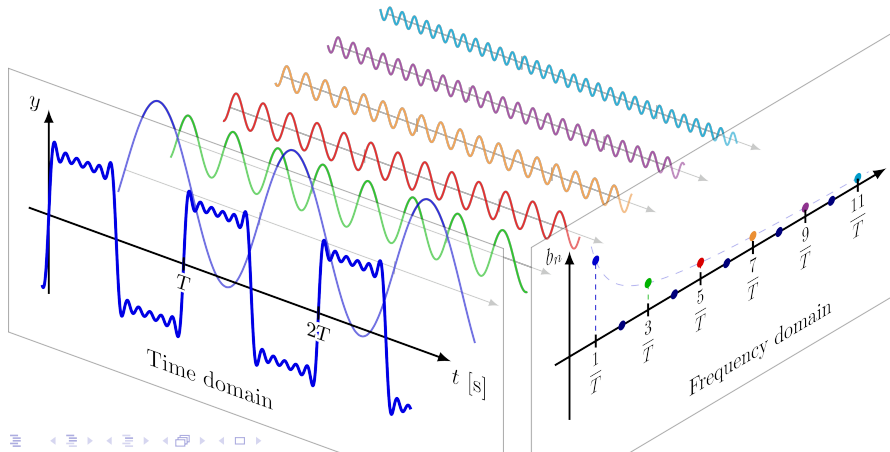
سری بالا در تمام بازه $[0, 1]$ همگراست. همچنین، به این دلیل که همه جملات سری غیرمنفی هستند، این سری مطلق-همگراست.

بررسی همگرایی یکنواخت: با توجه به اینکه با یک سری هندسی سر و کار داریم، برای همه $x \neq 0$ داریم $s_N(x) = \sum_{n=0}^N (1-x)x^n = 1 - x^{N+1}$. بنابراین برای تمام بازه $0 < x < 1$ می توان شرط همگرایی یکنواخت را به صورت مقابل نوشت: $N < \log \epsilon / \log x \Rightarrow |1 - (1-x)^{N+1}| = x^{N+1} < \epsilon$

ولی هرچقدر هم N بزرگ باشد، این شرط به راحتی در نزدیکی $x \approx 1$ نقض می شود (امتحان کنید). پس سری مورد نظر یکنواخت همگرا نیست.

همگرایی مطلق و همگرایی یکنواخت از هم مستقل اند.

- در واقع با مثال های متعدد می توان دید که همگرایی مطلق و همگرایی یکنواخت از هم مستقل اند. سری بالا همگرایی مطلق بود ولی همگرایی یکنواخت نبود. ما بزودی سری هایی را خواهیم دید که همگرایی یکنواخت را نشان می دهند، ولی همگرایی مطلق نیستند. سری هایی نیز وجود دارند که هیچکدام از دو نوع همگرایی را نشان نمی دهند و یا هر دو نوع را دارا هستند.



آزمون M وایرستراس

• آزمون M وایرستراس پرکاربردترین آزمون برای بررسی همگرایی یکنواخت سری هاست.

• آزمون M وایرستراس اساساً بر اساس آزمون مقایسه بنا شده است: اگر بتوانیم یک سری از اعداد $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ را بسازیم به صورتی که برای همه اعداد در بازه $a \leq x \leq b$ داشته باشیم $M_i \geq |u_i(x)|$ و سری $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ در بازه $a \leq x \leq b$ همگرا خواهد بود.

اثبات: اگر سری $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ همگرا باشد، آنگاه عددی مانند N موجود است به صورتی که برای $n + 1 \geq N$ داریم

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} M_i < \epsilon$$

یعنی با انتخاب مناسب عدد N می توان باقیمانده سری را از هر عدد دلخواه ϵ کوچکتر کرد. حال با توجه به شرط $M_i \geq |u_i(x)|$ برای همه بازه $a \leq x \leq b$ می توان فهمید که باقیمانده سری $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ هم از عدد ϵ کوچکتر است:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |u_i(x)| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x) \right| < \epsilon$$

بنابراین سری مورد نظر در شرط همگرایی یکنواخت صدق می کند:

$$|S(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x) \right| < \epsilon$$



Weierstrass

محدودیت اساسی آزمون M وایرستراس

اصلی ترین محدودیت آزمون M وایرستراس این است که فقط می تواند همگرایی یکنواخت را برای سری هایی که ویژگی همگرایی مطلق را نیز دارا هستند، نشان دهد! مثال بعد را ببینید.
پرسش: اثبات اسلاید قبل را ببینید و توضیح دهید که شرط همگرایی مطلق در کجا وارد شده است.

مثال: سری

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

را در بازه $-\infty < x < \infty$ در نظر بگیرید.

سری بالا همگراست: این سری تناوبی بنا به آزمون لایبنیتس در بازه $-\infty < x < \infty$ همگراست زیرا، نخست: سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ می باشد. دوم: جمله $a_n = 1/(n+x^2)$ مثبت است. سوم: جمله $a_n = 1/(n+x^2)$ یکنوا نزولی است و چهارم: شرط $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n+x^2) = 0$ برقرار است.

سری بالا مطلق همگرا نیست: ولی سری بالا مطلق همگرا نیست چون قدرمطلق جملات این سری در حد شمارنده های بسیار بزرگ تبدیل به سری هارمونیک می شود و سری هارمونیک واگراست.

سری بالا یکنواخت همگراست: با توجه به درس سری های متناوب می توان نوشت:
 $|S(x) - s_n(x)| < |u_{n+1}(x)| \leq |u_{n+1}(0)|$ ولی از طرفی داریم: بنابراین:

$$|S(x) - s_n(x)| < |u_{n+1}(0)|$$

حال با توجه به اینکه $\epsilon = u_{n+1}(0)$ مستقل از متغیر x است و می توان با افزایش پارامتر n مقدار $\epsilon = u_{n+1}(0)$ را کاهش داد، همگرایی یکنواخت برقرار است.

آزمون آبل



- آزمون آبل تا حدی حساس تر از آزمون وایرستراس است.
- آزمون آبل: اگر بتوان $u_n(x)$ را به صورت $u_n(x) = a_n f_n(x)$ نوشت و
 - ۱ دنباله a_n یک سری همگرا تشکیل دهد $\sum a_n = A$.
 - ۲ برای همه مقادیر $a \leq x \leq b$ تابع $f_n(x)$ بر حسب اندیس n یکنوا نزولی باشد: $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$
 - ۳ و برای همه مقادیر $a \leq x \leq b$ تابع $f_n(x)$ محدود باشد به صورتی که $0 \leq f_n(x) \leq M$ که در آن M یک عدد مستقل از x است،
- آنگاه $\sum u_n(x)$ به صورت یکنواخت در بازه $a \leq x \leq b$ همگراست.
- این نتیجه را بدون اثبات بپذیرید.
- آزمون آبل به ویژه برای بررسی همگرایی سری های توانی مفید است.
- چرا فهم همگرایی یکنواخت مهم است؟! اسلاید بعد را ببینید.

ویژگی های سری ها با همگرایی یکنواخت

- سری هایی که به صورت یکنواخت همگرا هستند سه ویژگی بسیار مهم دارند. این سه ویژگی کارکردن با آنها را بسیار راحت تر کرده و اهمیت کاربردی آنها را افزایش می دهد.
- اگر $\sum u_n(x)$ به صورت یکنواخت در بازه $a \leq x \leq b$ همگرا باشد، و جملات $u_n(x)$ نیز در این بازه پیوسته باشند، آنگاه

سری $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ نیز در $a \leq x \leq b$ پیوسته است. ❶

می توان از تک تک جملات سری انتگرال گرفت و انتگرال مجموع جملات برابر ❷

است با مجموع انتگرال جملات:

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

مشتق مجموع جملات برابر است با مجموع مشتقات جملات: ❸

$$\frac{d}{dx} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x)$$

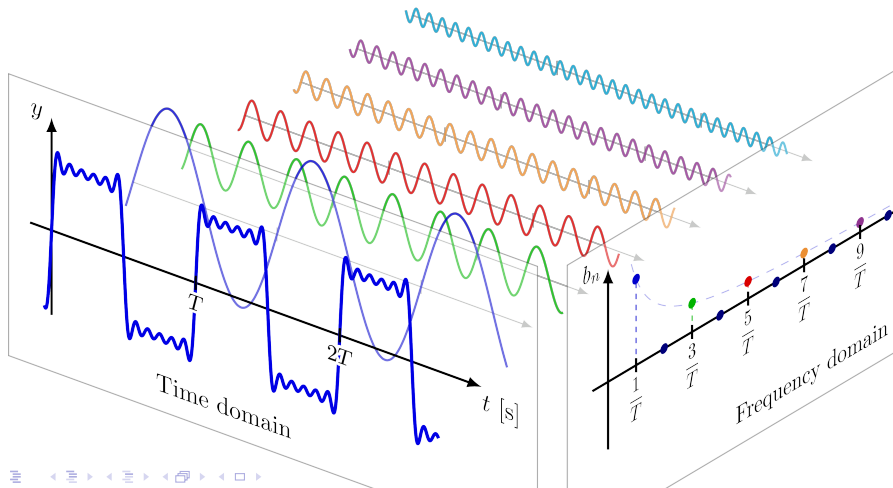
به شرطی که دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) تابع $\frac{du_n(x)}{dx}$ در بازه $a \leq x \leq b$ پیوسته باشد،

ب) سری $\sum_n \frac{du_n(x)}{dx}$ در بازه $a \leq x \leq b$ یکنواخت همگرا باشد.

شرایط مشتق گیری و انتگرال گیری از سری ها

پس برای انتگرال گیری جمله به جمله از یک سری یکنواخت همگرا فقط شرط پیوستگی تک تک جملات سری لازم است؛ این شرط معمولاً در مسائل فیزیکی برقرار است. ولی برای محاسبه مشتق سری باید شرایط دیگری نیز برقرار باشند (شرایط الف و ب در بالا).



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید سری توابع مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ منظور از سری توابع چیست؟ یک مثال بزنید.
- ۲ منظور از همگرایی یکنواخت چیست؟ یکی سری را مثال بزنید که همگرایی یکنواخت است.
- ۳ چه رابطه ای بین همگرایی یکنواخت و همگرایی مطلق سری ها وجود دارد؟
- ۴ آزمون وایرستراس برای همگرایی یکنواخت سری ها را توضیح دهید.
- ۵ آزمون آبل و شرایط آن را توضیح دهید.
- ۶ سه ویژگی مهم سری هایی که یکنواخت همگرا هستند را بنویسید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

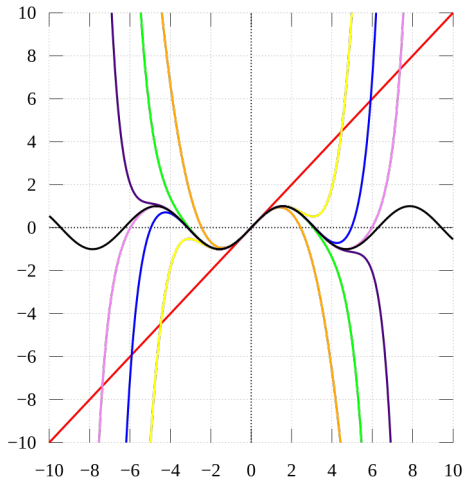


تمرین ها

- تمرینات موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- تمرینات موجود در صفحات ۲۴ و ۲۵ از ویرایش هفتم را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: بسط تیلور و سری های توانی

- در جلسه بعد با ابزار بسیار مهم بسط تیلور آشنا خواهیم شد. سپس درباره سری توانی توابع بحث خواهیم کرد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

