

رهیافت عملگر چگالی در مکانیک کوانتومی

عملگر چگالی و توصیف آماری در مکانیک کوانتومی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

۱ عملگر چگالی و توصیف آماری در مکانیک کوانتومی

- حالت های خالص و آنسامبل مخلوط
- میانگین آنسامبلی و عملگر چگالی

طرح درس مکانیک کوانتومی

”نوسانگر هارمونیک در مکانیک کوانتومی” بخشی از مجموعه ای بزرگتر با عنوان ” مفاهیم مکانیک کوانتومی و کاربردها” است که شامل بخش های زیر است:

۱. فیزیک سیستم های کوانتومی و خاستگاه نظریه کوانتوم

۲. ابزار ریاضیاتی برای مکانیک کوانتومی

۳. اصول موضوعه مکانیک کوانتومی

۴. دینامیک سیستم های کوانتومی

۵. حل معادله شرودینگر در سیستم های یک بعدی

۶. نوسانگر هارمونیک در مکانیک کوانتومی

۷. تکانه زاویه ای در مکانیک کوانتومی

۸. سیستم های کوانتومی دو ترازه

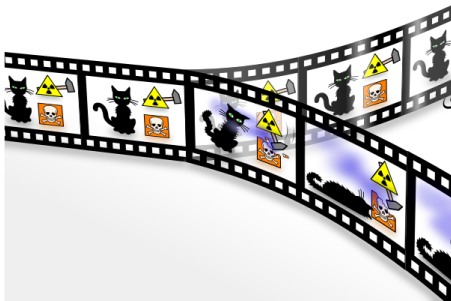
۹. حل معادله شرودینگر در سیستم های سه بعدی

۱۰. اتم هیدروژن

۱۱. مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

۱۲. جمع اندازه حرکت های زاویه ای و اسپینی

۱۳. ذرات یکسان و آمار کوانتومی



طرح درس مکانیک کوانتومی

”مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی” یک بخش از مجموعه ای بزرگتر با عنوان ”مفاهیم مکانیک کوانتومی و کاربردها” است که شامل بخش های زیر است:

روش های تقریبی و نظریه اختلال در مکانیک کوانتومی

حالت های همدموس در مکانیک کوانتومی

رهیافت عملگر چگالی در مکانیک کوانتومی

نظریه پراکندگی در مکانیک کوانتومی

تقارن سیستم ها در مکانیک کوانتومی

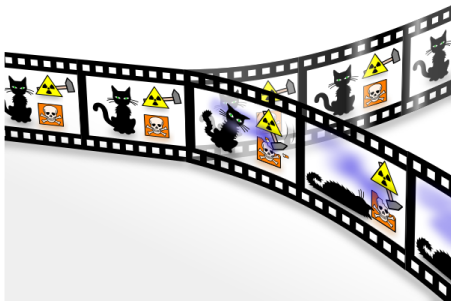
کوانتوم نسبیتی

کوانتش ثانویه

سیستم های باز در مکانیک کوانتومی

گرانش و سیستم های کوانتومی

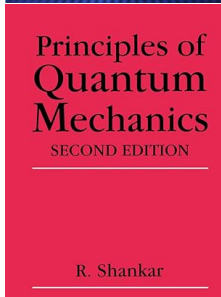
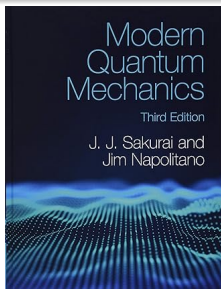
مسائل مفهومی در مکانیک کوانتومی



این بخش ها برای پوشش دادن درس مکانیک کوانتومی کارشناسی، مکانیک کوانتومی پیشرفته در دوره کارشناسی ارشد و مکانیک کوانتومی نسبیتی طراحی شده اند.

منبع اصلی این درس کتاب مکانیک کوانتومی مدرن ساکورایی است.

منابع درسی مکانیک کوانتومی پیشرفته



- Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.

- Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press

- کتاب ساکورایی منبع اصلی آموزش مکانیک کوانتومی پیشرفته در دوره های تحصیلات تکمیلی است (توصیه: ویرایش سوم ساکورایی را تهیه کنید). ولی بهتر است در کنار این منبع از کتاب بسیار خوب شانکار هم استفاده کرد. این دو منبع در کنار هم می توانند کاستی های همدیگر را جبران کرده و بسیاری از مفاهیم اساسی و روش ها در مکانیک کوانتومی را پوشش دهند.

اگر نیاز به مثال های حل شده و تمرین بیشتر دارید...



Quantum Mechanics

Second Edition

More than 200 fully solved problems

- Concise explanations of all course concepts
- Information on the Schrödinger equation, angular momentum, spin, the Harmonic oscillator, numerical methods, and scattering theory

USE WITH THESE COURSES

Quantum Mechanics • Introductory Quantum Mechanics
• Quantum Theory I • Quantum Theory II

Yoav Peleg • Reuven Pnini • Elyahu Zaarur • Eugene Hecht

• Schaum's Outline of Quantum Mechanics, Yoav Peleg, Reuven Pnini, Elyahu Zaarur, Eugene Hecht, McGraw Hill

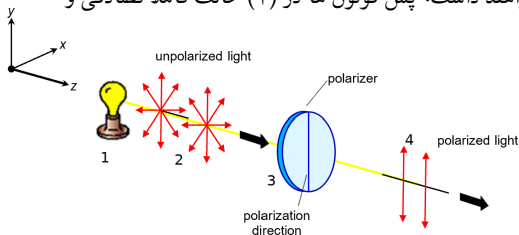
• اگر نیاز به مثال های حل شده و تمرین بیشتر دارید، پیشنهاد می کنم کتاب مکانیک کوانتومی از مجموعه سری شومز را ببینید. نمادگذاری این کتاب با کتاب های گاسیورویچ، گریفیتس و زتیلی همخوانی خوبی دارد و کمبود مثال و تمرین در دو کتاب اول را پوشش می دهد.

رهیافت ماتریس چگالی در مکانیک کوانتومی

تاکنون سیستم های کوانتومی مورد نظر را با استفاده از کت حالت سیستم $|\alpha\rangle$ توصیف کرده ایم. این بدان معناست که فرض کرده ایم فقط یک ذره داریم و آن ذره نیز در حالت مشخص $|\alpha\rangle$ است. ولی دنیای واقعی فاصله زیادی با چنین حالتی دارد. در واقع سیستم های کوانتومی تک ذره ای در زمان های نسبتاً اخیر در آزمایشگاه تولید شده اند.

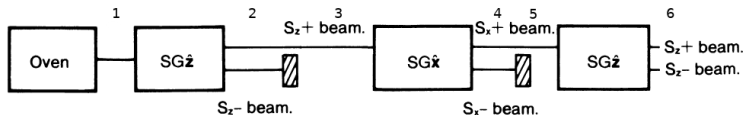
حالت سیستم های فیزیکی معمولاً یک حالت خالص نیست، بلکه در بیشتر اوقات تصادفی (random) است و در برخی مواقع نیز در مخلوطی از حالت های خالص مشاهده می شود. رهیافت ماتریس چگالی یکی از بهترین روش ها برای مطالعه سیستم های در وضعیت تصادفی و یا مخلوط است.

در شکل زیر نور لامپ در یک حالت کاملاً تصادفی است. ولی پس از عبور از قطبشگر ایده آل (۳) همه فوتون ها قطبش عمودی خواهند داشت. پس فوتون ها در (۲) حالت کاملاً تصادفی و در (۴) حالت کاملاً خالص دارند.



رهیافت ماتریس چگالی در مکانیک کوانتومی

پرسش: در آزمایش اشترن-گرلاخ در شکل زیر در چه بخش هایی سیستم در حالت خالص و در چه بخش هایی سیستم در حالت مخلوط و یا تصادفی است؟



ذرات وقتی از کوره خارج می شوند در یک آنسامبل کاملاً تصادفی قرار دارند (با ماتریس چگالی این وضعیت بعداً آشنا خواهیم شد). ولی پس از خروج ذرات از SG_z نیمی از ذرات در حالت $|S_z; +\rangle = |+\rangle$ و نیم دیگر در حالت $|S_z; -\rangle = |-\rangle$ قرار دارند. چنین وضعیتی را آنسامبل مخلوط می نامند و برای توصیف آن از مفهوم وزن احتمال (probability weight) استفاده می کنند:

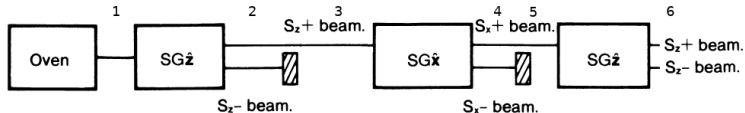
$$2: \quad w_+ = 0.5 \text{ probability of } |+\rangle \quad w_- = 0.5 \text{ probability of } |-\rangle$$

ولی در وضعیت شماره ۳ دوباره سیستم در یک حالت خالص (آنسامبل خالص) $|+\rangle$ قرار گرفته است.

$$3: \quad w_+ = 1.0 \text{ probability of } |+\rangle \quad w_- = 0.0 \text{ probability of } |-\rangle$$

رهیافت ماتریس چگالی در مکانیک کوانتومی

- همچنین در وضعیت شماره ۴ پس از خروج ذرات از SG_x نیمی از ذرات در حالت $|S_x; +\rangle$ و نیم دیگر در حالت $|S_x; -\rangle$ قرار دارند. چنین وضعیتی نیز یک آنسامبل مخلوط است:
- ۴: $w_+ = 0.5$ probability of $|S_x; +\rangle$ $w_- = 0.5$ probability of $|S_x; -\rangle$



دقت کنید که مقادیر $w_{\pm}$ صرفاً احتمالات کلاسیک را نشان می دهد و هیچ اطلاعاتی از فاز نسبی بین کت های $|\pm\rangle$ در آن نیست. به ویژه باید بین این نوع احتمال و احتمال کوانتومی موجود در کت حالت $(|+\rangle \pm |-\rangle)/\sqrt{2}$ تمایز قائل شویم.

- چنین آنسامبل هایی را گاهی اوقات مخلوط غیرهمدوس (incoherent mixture) نیز می نامند. رهیافت ماتریس چگالی برای توصیف چنین وضعیت هایی ابداع شده است.

- دقت کنید که حالت های موجود در آنسامبل لزوماً متعامد نیستند. مثلاً ما می توانیم مخلوطی به صورت زیر داشته باشیم:

$$w_{x+} = 0.15 \text{ ket } |S_x; +\rangle \quad w_{y-} = 0.25 \text{ ket } |S_y; -\rangle \quad w_{z+} = 0.6 \text{ ket } |S_z; +\rangle$$

ولی لازم است که مجموع احتمال "جمعیت های مختلف" برابر ۱ باشد: $\sum_i w_i = 1$

جان فون نویمان



توجه: تعداد جمعیت های موجود می تواند بسیار زیاد باشد و از ابعاد فضای هیلبرت مساله مستقل است.

دیدگاه آماری به مکانیک کوانتومی که بر اساس رهیافت عملگر چگالی استوار است، تا سالها دیدگاه غالب در حل و تفسیر مسائل کوانتومی بوده است. این دیدگاه همچنان بیشترین استفاده را در پژوهش های کوانتومی دارد. بنابراین فهم آن بسیار مهم است.

رهیافت ماتریس چگالی اولین بار توسط جان فون نویمان (۱۹۵۷-۱۹۰۳) و در سال ۱۹۲۷ معرفی شد. بسیاری از مفاهیم اساسی مانند تحول زمانی فون نویمان، آنتروپی فون نویمان و ... از درون این فرمالیسم معرفی شده اند.

اندازه گیری بر روی حالت های مخلوط و میانگین آماری

- فرض کنید می خواهیم بر روی مشاهده پذیر A با ویژه مقادیر a' و ویژه کت های $|a'\rangle$ اندازه گیری می کنیم. اگر سیستم در حالت خالص $|\alpha^{(i)}\rangle$ قرار داشته باشد، آنگاه مقدار چشمداشتی عملگر A برابر است با

$$\langle \alpha^{(i)} | A | \alpha^{(i)} \rangle = \sum_{a'} a' |\langle a' | \alpha^{(i)} \rangle|^2$$

یعنی پس از تعداد بسیار زیادی اندازه گیری بر روی مشاهده پذیر A انتظار داریم که مقدار بالا را بیابیم. توجه: در رابطه بالا از رابطه بستار $\sum_{a'} |\langle a' | \alpha^{(i)} \rangle|^2 = 1$ استفاده کرده ایم.

- حال فرض کنید که سیستم در یک آنسامبل مخلوط با احتمال جمعیتی w_i قرار دارد و ما تعداد بسیار زیادی اندازه گیری بر روی مشاهده پذیر A انجام داده ایم. در این وضعیت، ”میانگین آنسامبلی مشاهده پذیر A ” برابر است با

$$[A] = \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | A | \alpha^{(i)} \rangle = \sum_i \sum_{a'} w_i a' |\langle a' | \alpha^{(i)} \rangle|^2$$

جمعبندی a' بر روی ابعاد فضای هیلبرت سیستم و جمعبندی i بر روی تعداد جمعیت هاست.

دقت کنید که در رابطه بالا دو نوع احتمال در هم ضرب شده اند:

- احتمال کلاسیک با ضریب w_i وارد شده است.
- احتمال کوانتومی با ضریب $|\langle a' | \alpha^{(i)} \rangle|^2$ وارد شده است.

عملگر چگالی - ماتریس چگالی

• میانگین آنسامبلی را در برخی منابع مقدار چشمداشتی نیز می گویند؛ ولی ما در اینجا بین این دو تمایز قائل می شویم.

• حالا میانگین آنسامبلی را در پایه های کلی تر $|b'\rangle$ می نویسیم.

$$[A] = \sum_i w_i \sum_{b'} \sum_{b''} \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \langle b' | A | b'' \rangle \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle$$

$$= \sum_{b'} \sum_{b''} \left(\sum_i w_i \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \right) \langle b' | A | b'' \rangle$$

برای به دست آوردن این رابطه دو بار از رابطه بستار در پایه های $|b'\rangle$ استفاده کرده ایم.

• دقت کنید که در بخش آخر رابطه بالا، مشاهده پذیر A به صورت جداگانه نوشته شده است. در نتیجه عبارت داخل پرانتز کاملاً کلی است. با استفاده از عبارت داخل پرانتز می توان عملگر چگالی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\rho = \sum_i w_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}|$$

عناصر ماتریس چگالی متناظر با عملگر چگالی را نیز می توان به شکل زیر نوشت:

$$\langle b'' | \rho | b' \rangle = \sum_i w_i \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle$$

ویژگی های عملگر چگالی

- عملگر چگالی (ماتریس چگالی) شامل همه اطلاعات فیزیکی مهم و قابل دستیابی از آنسامبل مخلوط مورد نظر ماست.

- بازنویسی میانگین آنسامبلی:

$$[A] = \sum_{b'} \sum_{b''} \langle b'' | \rho | b' \rangle \langle b' | A | b'' \rangle = \text{tr}(\rho A)$$

یادآوری: مقدار رد یک عملگر کاملاً مستقل از پایه های انتخاب شده است. بنابراین می توان از هر پایه ای برای محاسبه بالا استفاده کرد. در آینده به وفور از این نکته استفاده خواهیم کرد.

- ۱- عملگر چگالی هرمیتی است. اثبات:

$$\rho^\dagger = \sum_i (w_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}|)^\dagger = \sum_i w_i (\langle \alpha^{(i)}|)^\dagger (|\alpha^{(i)}\rangle)^\dagger = \sum_i w_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}| = \rho$$

- ۲- عملگر چگالی بهنجار است؛ یعنی رد آن برابر یک است:

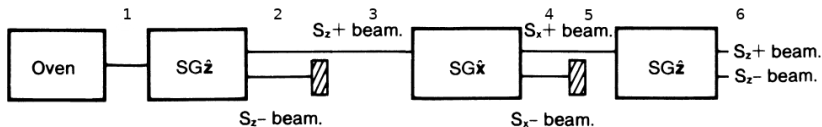
$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho) &= \sum_i \sum_{b'} w_i \langle b' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle = \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | \left(\sum_{b'} |b'\rangle \langle b'| \right) | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(i)} \rangle = 1 \end{aligned}$$

شرط بالا به این معنی است که مجموع احتمالات کلاسیک نیز یک است.

- ۳- عملگر چگالی مثبت است؛ یعنی هرمیتی است و ویژه مقادیر آن مثبت اند.

مثال هایی از ماتریس چگالی

● به ماتریس چگالی در وضعیت های مختلف آزمایش اشتراک-گرلاخ دقت کنید:



$$\rho_1 = \frac{1}{4} |S_z; +\rangle \langle S_z; +| + \frac{1}{4} |S_z; -\rangle \langle S_z; -| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 = \frac{1}{4} |S_z; +\rangle \langle S_z; +| + \frac{1}{4} |S_z; -\rangle \langle S_z; -| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho_3 = |S_z; +\rangle \langle S_z; +| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_4 = \frac{1}{4} |S_x; +\rangle \langle S_x; +| + \frac{1}{4} |S_x; -\rangle \langle S_x; -| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho_5 = |S_x; +\rangle \langle S_x; +| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho_6 = \frac{1}{4} |S_z; +\rangle \langle S_z; +| + \frac{1}{4} |S_z; -\rangle \langle S_z; -| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

لطفا مطمئن شوید که دلیل درستی هر کدام از روابط بالا و محاسبات مربوطه را می دانید.

تعداد درجات آزادی یک ماتریس چگالی

- تمرین: نشان دهید که میانگین آنسامبلی اسپین ها در یک حالت کاملاً تصادفی صفر است. مثلاً:

$$\text{tr}(\rho_1 \sigma_z) = \text{tr}(\rho_1 \sigma_x) = \text{tr}(\rho_1 \sigma_y) \Rightarrow [\vec{S}] = 0$$

این مشاهده منطقی است زیرا در یک حالت کاملاً تصادفی طبیعتاً هیچ جهت ترجیحی برای اسپین وجود نخواهد داشت.

- برای شمردن تعداد درجات آزادی ماتریس چگالی باید دو ویژگی اصلی آن را به یاد داشته باشیم. مثلاً، فرض کنید می خواهیم تعداد درجات آزادی یک ماتریس چگالی مربوط به سیستم اسپین $\frac{1}{2}$ را بشماریم. ماتریس کلی

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید. هر کدام از این درایه ها می توانند مختلط باشند؛ در نتیجه فعلاً هشت درجه آزادی داریم. البته ماتریس چگالی باید هرمیتی باشد. بنابراین

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

در نتیجه اعداد a و d باید حقیقی باشند و همچنین $b = c^*$. پس فعلاً چهار درجه آزادی داریم. البته ماتریس چگالی باید بهنجار هم باشد $a + d = 1$. بنابراین در نهایت ماتریس چگالی یک سیستم اسپین $\frac{1}{2}$ سه درجه آزادی دارد.

ویژگی های حالت های خالص

- دقت کنید که حالت های خالص را می توان به صورت $\rho = |\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|$ نوشت. برای حالت های خالص همچنین داریم:

$$\rho^2 = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\rho - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tr}(\rho^2) = 1$$

- تمرین: با استفاده از رابطه $\rho(\rho - 1) = 0$ نشان دهید که ویژه مقادیر ماتریس چگالی یک حالت خالص باید صفر و یا یک باشد. در نتیجه وقتی ماتریس چگالی یک حالت خالص را قطری کنیم، همیشه به شکل زیر خواهد بود:

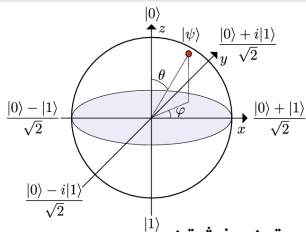
$$\rho \doteq \begin{pmatrix} 0 & & & & & & 0 \\ & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس چگالی

حالت خالص

- می توان نشان داد که $\text{tr}(\rho^2) = 1$ برای حالت خالص بیشینه است و برای حالت های مخلوط همیشه داریم $\text{tr}(\rho^2) < 1$.

کره بلاخ



الف) آیا ماتریس زیر یک ماتریس چگالی است؟

ب) آیا آنسامبل مخلوط است و یا خالص؟

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} - \frac{i}{3} \\ \frac{1}{6} + \frac{i}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

الف) بله، زیرا $\rho = \rho^\dagger$ و $\text{tr}(\rho) = 1$

ب) مخلوط است زیرا $\text{tr}(\rho^2) < 1$

شکل کلی ماتریس چگالی یک سیستم اسپین $\frac{1}{2}$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho = \frac{1}{4}(\mathbf{I} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{4}(\mathbf{I} + n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & 1 - n_z \end{pmatrix}$$

در اینجا $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ یک بردار با مولفه های حقیقی و به طول $|\vec{n}| \leq 1$ است.

تمرین: نشان دهید که عبارت بالا دو شرط اساسی ماتریس چگالی را دارد.

اگر طول بردار $\vec{n}$ برابر یک باشد، آنگاه این بردار بر روی کره ای به شعاع یک قرار خواهد داشت.

این کره را کره بلاخ می نامند. نقاط روی کره بلاخ نشان دهنده آنسامبل های خالص هستند.

اگر داشته باشیم $|\vec{n}| < 1$ آنگاه بردار $\vec{n}$ در داخل کره کره بلاخ قرار خواهد داشت. نقاط داخل

کره بلاخ نشان دهنده آنسامبل های مخلوط هستند. توجه: در شکل بالا به جای اسپین های

$|+\rangle$ و $|-\rangle$ از اسپین های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ استفاده شده است.

مثال

- مثال: مخلوطی از ذرات با اسپین $\frac{1}{2}$ و با وزن احتمال زیر را در نظر بگیرید.
 $w(S_z+) = 0.75$ $w(S_x+) = 0.25$

ماتریس چگالی این سیستم و مقادیر $[S_x]$ ، $[S_y]$ و $[S_z]$ را بیابید.

- پاسخ: ماتریس چگالی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned}\rho &= w(S_z+) |S_z+\rangle \langle S_z+| + w(S_x+) |S_x+\rangle \langle S_x+| \\&= 0.75 |+\rangle \langle +| + 0.25 \times \frac{1}{2} \times (|+\rangle + |-\rangle)(\langle +| + \langle -|) \\&= \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0) + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1) = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \\&\quad \text{پیدا کردن میانگین آنسامبلی اسپین ها:} \\[S_x] &= \frac{\hbar}{2} \text{tr}(\rho \sigma_x) = \frac{\hbar}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{\hbar}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \right) = \frac{\hbar}{8} \\[S_y] &= \frac{\hbar}{2} \text{tr}(\rho \sigma_y) = \frac{\hbar}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{\hbar}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{8}i & -\frac{5}{8}i \\ \frac{1}{8}i & -\frac{1}{8}i \end{pmatrix} \right) = 0 \\[S_z] &= \frac{\hbar}{2} \text{tr}(\rho \sigma_z) = \frac{\hbar}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{\hbar}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \right) = \frac{3\hbar}{8}\end{aligned}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم عملگر چگالی و توصیف آماری در مکانیک کوانتومی را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

- منظور از حالت خالص چیست؟
- منظور از آنسامبل مخلوط چیست؟
- یک آزمایش اشترن-گرلاخ فرضی طراحی کنید و توضیح دهید کدام باریکه ذرات خالص و کدام مخلوط اند.
- منظور از وزن احتمال در آنسامبل مخلوط چیست؟
- منظور از احتمال کلاسیک و احتمال کوانتومی در تعریف میانگین آنسامبلی چیست؟
- تعریف عملگر چگالی را بنویسید.
- ویژگی های عملگر چگالی را نام ببرید.
- توضیح دهید که تفاوت عملگر چگالی آنسامبل خالص و مخلوط در چیست.
- درباره کره بلاخ، ریاضیات و مفهوم آن تحقیق کنید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

- فرض کنید ماتریس چگالی را در پایه های $|a\rangle$ قطری سازی کرده ایم. حال معنی درایه های قطری ماتریس چگالی چیست؟
- مسائل ۱۱ تا ۱۴ از فصل سوم کتاب ساکورایی (ویرایش سوم) را حل کنید.
- نشان دهید که اگر تعداد ابعاد فضای هیلبرت یک سیستم N باشد و آن سیستم در حالت کاملاً تصادفی قرار داشته باشد، آنگاه ماتریس چگالی آن با رابطه $\rho = \frac{1}{N} I_N$ داده می شود که در آن I_N ماتریس همانی N بعدی است.

مبحث بعدی: ماتریس چگالی سیستم های مرکب و رد جزئی

در جلسه بعد با توصیف سیستم های مرکب آشنا خواهیم شد. همچنین مفهوم رد جزئی را معرفی خواهیم کرد.

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right]$$

$\text{tr}_A \rho$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right]$$

$\text{tr}_B \rho$

منابع

- ❶ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ❷ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ❸ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ❹ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ❺ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ❻ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ❼ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ❽ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما

