

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

مشتق توابع چند متغیره و نقاط مانا

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

یادآوری مشتق

- در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مشتق یک تابع مانند $f(x)$ در نقطه x به صورت حد زیر تعریف می شود:
- $$df(x) = f(x + \epsilon) - f(x)$$

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

دقت کنید که مشتق در صورتی وجود دارد که حد بالا موجود باشد (باید صورت مبهم $\frac{0}{0}$ را رفع ابهام کنیم). این بدان معناست که حدهای چپ و راست موجود و مقادیر آنها برابر باشند:

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

- دیفرانسیل و یا وردش یک تابع مانند $f(x)$ عبارت است از تغییر در تابع وقتی که متغیر مستقل به اندازه dx تغییر می‌کند $df \equiv f(x + dx) - f(x)$. بنا به بسط تلور می‌توان نوشت:

$$df \equiv f(x+dx) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(dx)^n}{n!} f^{(n)}(x) - f(x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} dx + \dots - f(x)$$

و یا تا تقریب مرتبه اول (یعنی اگر از جمله dx^2 و مراتب بالاتر صرف نظر کنیم) می توان نوشت:

$$df \approx \frac{df(x)}{dx} dx$$

بنا به قضیه مقدار میانی، مقدار df/dx باید در بازه $[x, x + dx]$ محاسبه شود. ولی وقتی دیفرانسیل dx به سمت صفر میل می کند، نقطه مورد نظر نیز به سمت x میل می کند. در نتیجه مقدار df/dx باید در نقطه x محاسبه شود.

معنی مشتق جزئی

معنی مشتق جزئی: مشتق جزئی $\frac{\partial f}{\partial x}$ به این معنی است که در هنگام مشتق گیری نسبت به x ، متغیرهای مستقل y و z را ثابت فرض کرده و فقط نسبت به متغیر مستقل x مشتق میگیریم. پرسش: معنی $\frac{\partial f}{\partial z}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را بیان کنید.

به نمودار تابع دو متغیر $f(x, y)$ در شکل زیر دقت کنید. همانطور که در شکل مشخص است، در هنگام محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}$ مقدار x تغییر می کند، ولی مقدار متغیر مستقل y ثابت نگه داشته شده است.

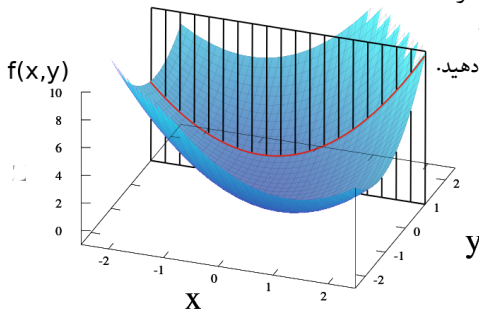
پرسش: معنی $\frac{\partial f}{\partial y}$ را بر روی شکل توضیح دهید.

نمادگذاری دیگر برای مشتق جزئی:

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$$

$$f_y(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$$

$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}$$



مثال

● مثال: مشتقات جزئی دو تابع

$$g(x, y) = x^2 + 2xy - 4y^2 + 4x - 6y + 4, \quad f(x, y) = \sqrt{4y^2 - 9x^2 + 24y + 36x + 36}$$

را بیابید.

مثال

● مثال: مشتقات جزئی دو تابع
 $g(x, y) = x^2 + 2xy - 4y^2 + 4x - 6y + 4$, $f(x, y) = \sqrt{4y^2 - 9x^2 + 24y + 36x + 36}$
 را بیابید.

پاسخ:

$$g_x(x, y) = 2x + 2y + 4 \qquad g_y(x, y) = 2x - 8y - 6$$

و همچنین

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2}(-18x + 36)(4y^2 - 9x^2 + 24y + 36x + 36)^{-1/2}$$

$$f_x(x, y) = \frac{-9x + 18}{\sqrt{4y^2 - 9x^2 + 24y + 36x + 36}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2}(8y + 24)(4y^2 - 9x^2 + 24y + 36x + 36)^{-1/2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{4y + 12}{\sqrt{4y^2 - 9x^2 + 24y + 36x + 36}}$$

منبع:

math.libretexts.org

مثال

- معنای مشتق جزئی را می توان با مثال زیر بهتر فهمید.
- مثال: تابع $f(x, y) = \frac{x^2}{y^3}$ در نقطه $(2, 5)$ صعودی است و یا نزولی؟

پاسخ: اگر پارامتر y را ثابت نگه داریم و اجازه دهیم x تغییر کند، آنگاه داریم:

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{y^3} \Rightarrow f_x(2, 5) = \frac{4}{125} > 0$$

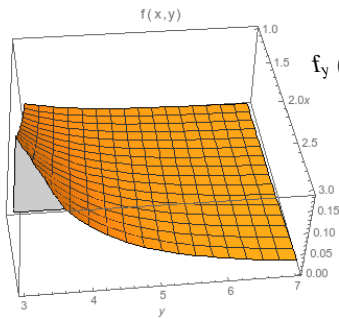
پس تابع مورد نظر در راستای محور x در نقطه $(2, 5)$ صعودی است. حال اگر پارامتر x را ثابت نگه داریم و اجازه دهیم y تغییر کند، آنگاه داریم:

$$f_y(x, y) = -\frac{3x^2}{y^4} \Rightarrow f_y(2, 5) = -\frac{12}{625} < 0$$

پس تابع مورد نظر در راستای محور y در نقطه $(2, 5)$ نزولی است. شکل مقابل را

ببینید. منبع:

tutorial.math.lamar.edu



تمرین

تمرین: همه مشتقات مرتبه اول و دوم $f(x, y, z) = xy \ln z$ را بیابید ($z > 0$).

پاسخ از سیلورمن:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \ln z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \ln z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy}{z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (y \ln z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (x \ln z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{xy}{z} \right) = -\frac{xy}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (x \ln z) = \ln z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (y \ln z) = \ln z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{z} \right) = \frac{y}{z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (y \ln z) = \frac{y}{z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{z} \right) = \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} (x \ln z) = \frac{x}{z},$$

یک نکته درباره علامتگذاری

- در برخی مسائل متغیرهای مستقل ممکن است با هم مرتبط باشند (مانند ترمودینامیک و یا مکانیک آماری)؛ بنابراین در هنگام محاسبه مشتق جزئی ممکن است چندان واضح نباشد که کدام یک از متغیرها (به جز متغیر مشتقگیری) مستقل فرض می شوند. برای جلوگیری از سردرگمی در این نوع مسائل، مرسوم است که متغیرهای ثابت فرض شده به صورت واضح به صورت اندیس می آیند.
- مثلاً در تابع $f(x, y, z)$ فرض کنید که متغیرهای آن با هم ارتباط دارند. در اینصورت عبارت $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ به معنی مشتق گیری جزئی از تابع f نسبت به x است، وقتی که متغیر y ثابت فرض می شود ولی متغیر z ثابت نیست و با تغییر x تغییر می کند! همچنین عبارت $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z$ به معنی مشتق گیری جزئی از تابع f نسبت به x است، وقتی که متغیر z ثابت فرض می شود ولی متغیر y ثابت نیست و با تغییر x تغییر می کند.
- حالا دو نکته بسیار مهم در محاسبات مربوط به مشتقات جزئی را یادآوری خواهیم کرد.

قاعده زنجیره‌ای

- فرض کنید متغیرهای x , y و z خود تابعی از پارامتر t هستند. در این صورت داریم:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

- مثال: برای تابع $f = xe^{xy}$ که در آن داریم $x = t^2$ و $y = 1/t$ ، مقدار df/dt را محاسبه کنید. دقت کنید که مشتق کامل و نه مشتق جزئی را می‌خواهیم.

پاسخ:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (e^{xy} + yxe^{xy})(2t) + x^2 e^{xy}(-t^{-2})$$

$$\frac{df}{dt} = 2t(e^{xy} + yxe^{xy}) - t^{-2}x^2 e^{xy}$$

- مثال: برای تابع $f = x^2y^3 + y \cos x$ که در آن داریم $x = \ln(t^2)$ و $y = \sin(4t)$ ، مقدار df/dt را محاسبه کنید. دقت کنید که مشتق کامل و نه مشتق جزئی را می‌خواهیم.
- پاسخ:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2xy^3 - y \sin x) \left(\frac{2}{t} \right) + (3x^2y^2 + \cos x)(4 \cos(4t))$$

قاعده زنجیره‌ای

پرسش: در مکانیک لاگرانژی به محاسبه زیر برخورد می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt} L(x, \dot{x}, t) = \left[\frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial L}{\partial t} \right]$$

به تفاوت مشتق کامل d/dt و مشتق جزئی $\partial/\partial t$ بر حسب زمان دقت کنید. درستی این رابطه را برای خود توضیح دهید.

تابعی با دیفرانسیل صفر

- فرض کنید وردش یک تابع دو متغیره برابر صفر باشد $df = 0$. این اتفاق می تواند در یک ناحیه و یا مسیر خاص از دامنه تعریف تابع رخ دهد. در این صورت داریم:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_f = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x}$$

پرسش: معنی هر کدام از اندیس ها در فرمول بالا را توضیح دهید.

یافتن نقاط مانا

• اگر تابع $f = f(x, y, z)$ تابعی از مختصات x ، y و z باشد آنگاه ما می توانیم به صورتی که در بالا توضیح داده شد، مقدار تغییرات تابع در هرکدام از جهت های x ، y و z را بیابیم. ولی با این وجود این سوال پیش می آید که مقدار تغییر تابع در یک جهت دلخواه مانند $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ چگونه خواهد بود. در واقع دیفرانسیل تابع در این جهت دلخواه قبلا معرفی شده است:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

و مقدار مشتق تابع در جهت ds نیز برابر است با

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

با شیوه محاسبه این مقادیر تاکنون آشنا شده ایم. ولی حالا به یکی از کاربردها می پردازیم که مربوط به یافتن نقاط مانا (stationary) می باشد.

نقاط مانا

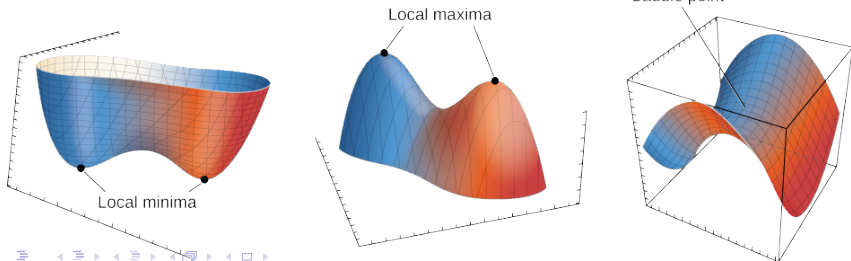
- نقاط مانا نقاطی هستند که مشتق در تمام جهات در آنها برابر صفر است:

$$\frac{df}{ds} = 0 \quad \text{in all directions}$$

برای اینکه تابع n متغیره $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ دارای نقطه مانا باشد، باید برای همه متغیرهای مستقل x_1 تا x_n داشته باشیم:

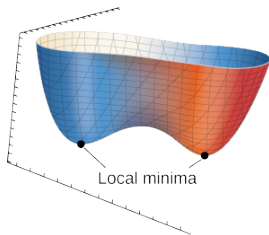
$$\frac{df}{dx_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

همه نقاطی که در شرط بالا صدق کنند را نقاط مانا می نامند، مانند نقاط موضعی کمینه، بیشنه و زینی در شکل زیر:

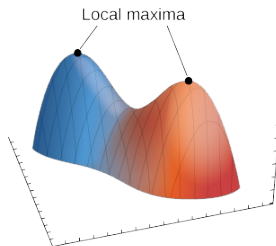


یافتن نقاط مانا

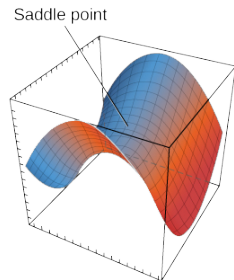
- می توان نشان داد که در نقاط کمینه موضعی مقدار مشتق دوم d^2f/ds^2 در همه جهت های s مثبت است در حالی که در نقاط بیشینه موضعی مقدار d^2f/ds^2 در همه جهت های s منفی است. اگر هیچکدام از این دو شرط برقرار نباشند، نقطه مورد نظر زینی است.



(a)



(b)



(c)

مثال

مثال: نقاط مانا و نوع آنها را برای تابع $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 24$ بیابید.

پاسخ: مشتقات مرتبه اول را محاسبه می کنیم و آنها را برابر صفر قرار می دهیم:

$$f_x(x, y) = 8x + 8 = 0 \quad f_y(x, y) = 18y - 36 = 0$$

از حل این معادلات نقطه $(-1, 2)$ را به عنوان نقطه مانا می یابیم. حال مشتقات مرتبه دوم را یافته و مبین را تشکیل می دهیم:

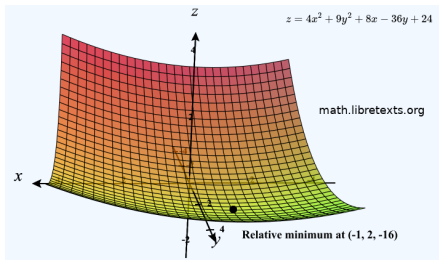
$$f_{xx}(x, y) = 8 \quad f_{xy}(x, y) = 0 \quad f_{yy}(x, y) = 18$$

$$D = f_{xx}(-1, 2)f_{yy}(-1, 2) - (f_{xy}(-1, 2))^2 = (8)(18) - (0)^2 = 144$$

می بینیم که $D > 0$ و $f_{xx} > 0$ هر دو مثبتند؛

پس نقطه مورد نظر کمینه موضعی است.

شکل مقابل را ببینید.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مشتق توابع چندمتغیره و نقاط مانا و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ با رسم نمودار یک تابع تک متغیر دلخواه معنای هندسی دیفرانسیل و مشتق تابع را نشان دهید.
 - ۲ با رسم نمودار یک تابع دو متغیر دلخواه معنای هندسی دیفرانسیل و مشتق جزئی تابع را نشان دهید.
 - ۳ توضیح دهید که چگونه می توان مشتق جزئی یک تابع چند متغیره را محاسبه کرد.
 - ۴ منظور از مشتق جزئی مرتبه دوم چیست؟ منظور از مشتق جزئی مخلوط مرتبه دوم چیست؟
 - ۵ قضیه شوارتز برای مشتقات مخلوط را بیان کنید.
 - ۶ قاعده زنجیره ای در مشتق توابع چندمتغیره را بیان کنید.
 - ۷ نقاط مانا چه نوع نقاطی هستند؟
 - ۸ چطور می توان بیشینه، کمینه و یا زینی بودن نقاط مانا در توابع چندمتغیره را تعیین کرد؟
 - ۹ چطور می توان بیشینه، کمینه و یا زینی بودن نقاط مانا در توابع دو متغیره را تعیین کرد؟
 - ۱۰ با رسم سه شکل مجزا مفهوم هندسی نقطه بیشینه، نقطه کمینه و نقطه زینی را توضیح دهید.
- اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

تمرین

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- تمرینات موجود در صفحات ۶۴ و ۶۵ از ویرایش هفتم آرفکن را حل کنید.

مبحث بعدی: تابع دلتای دیراک

پیشتر مبحث انتگرال و محاسبه انتگرال ها به صورت مفصل در مجموعه حسابان برای فیزیک گفته شده است. بنابراین برای مطالعه مبحث انتگرال به این دوره هفت قسمتی در یوتیوب و آپارات مراجعه کنید.



ما در جلسه بعد تابع دلتای دیراک را بررسی خواهیم کرد.

Dirac Delta Function

P. A. M. Dirac

Delta Function Rules

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$x\delta(x) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a)$$

Delta Function Derivative Rules

$$\delta'(-x) = -\delta'(x)$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x) dx = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a) dx = -f'(a)$$

Augustin Louis Cauchy

Assorted Delta Function Rules

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\delta(x-b) dx = \delta(a-b)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x-a) + \delta(x+a)]$$

منابع

- ➊ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ➋ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ➌ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ➍ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ➎ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

