

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

مقدمه ای بر اعداد مختلط

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

۱ مقدمه ای بر اعداد مختلط
• اعداد مختلط به زبان ساده
• بررسی اعداد مختلط

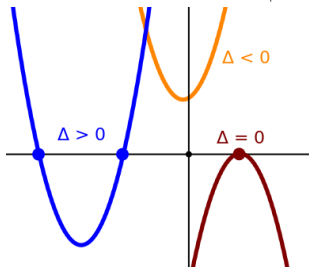
- اعداد مختلط به زبان ساده
- بررسی اعداد مختلط

یادآوری حل معادله درجه دوم

- جواب کلی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به صورت زیر می باشد

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- بر اساس علامت دلتا $\Delta = b^2 - 4ac$ ، جواب های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ می توانند در سه حالت رخ دهند:



- اگر $\Delta > 0$ آنگاه معادله درجه دوم دو جواب مجزا دارد.

- اگر $\Delta = 0$ آنگاه معادله درجه دوم فقط یک جواب دارد (بعضی اوقات جواب مضاعف و یا تبهگن هم می گویند).

- اگر $\Delta < 0$ آنگاه معادله درجه دوم جواب حقیقی ندارد.

- برای درک معنی هندسی هر کدام از این حالت ها، شکل مقابل را ببینید.

چرا اعداد مختلط؟

● در حل معادلات درجه دوم متوجه می شویم که اگر مبین معادله درجه دوم (یا همان دلتا Δ) منفی باشد، معادله مورد نظر هیچ جواب حقیقی ندارد. برای مثال، معادله $x^2 + 4 = 0$ جواب حقیقی ندارد. در واقع اگر سعی کنیم این معادله را حل کنیم به نتیجه $x^2 = -4$ می رسیم، یعنی $x = \pm\sqrt{-4}$.

توجه: چنین عبارتی در بازه اعداد حقیقی "ناممکن" است زیرا مربع هر عدد حقیقی مثبت خواهد بود (مثلاً $9 = (-3)^2$ یک عدد مثبت است).

بنابراین نتیجه می گیریم که "اعداد منفی ریشه دوم حقیقی ندارند".

هرچند، قبلاً دیده ایم که ریشه دوم اعداد منفی در جواب های معادله درجه دوم ظاهر می شود. برای درک همه جواب های معادلات چندجمله ای، از جمله جواب های معادله درجه دوم، ریاضی دانان مجموعه جدیدی از اعداد را اختراع کرده اند که "دستگاه اعداد مختلط" نام دارد.

● برای "اختراع" اعداد مختلط ما عدد جدیدی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$i = \sqrt{-1} \quad \Leftrightarrow \quad i^2 = -1$$

آنگاه، با استفاده از تعریف این عدد، هر عدد مختلطی را به صورت $a + bi$ می نویسیم که در آن a و b اعداد حقیقی هستند.

● با استفاده از اعداد مختلط می توان جواب معادله $x^2 + 2x + 2 = 0$ را به صورت زیر نوشت:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm i$$

تعریف اعداد مختلط

- تعریف عدد مختلط (complex number): یک عدد مختلط عددی به شکل $a + bi$

می باشد که در آن a و b اعداد حقیقی هستند و $i^2 = -1$. عدد a را قسمت حقیقی (real part) و عدد b را قسمت موهومی (imaginary part) عدد مختلط $a + bi$ می نامند.

- نکته: دو عدد مختلط با هم برابرند اگر و فقط اگر قسمت حقیقی آن دو برابر باشد و قسمت موهومی آنها نیز برابر باشد: $a + bi = x + yi \Leftrightarrow a = x \text{ and } b = y$.
- به مثال های زیر دقت کنید.

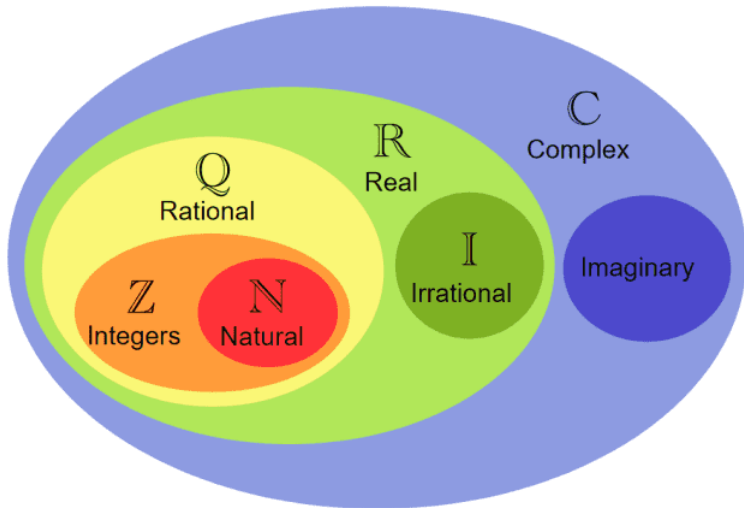
- ۱ در عدد $3 + 4i$ قسمت حقیقی برابر ۳ و قسمت موهومی برابر ۴ است.
- ۲ در عدد $\frac{1}{2}i - \frac{3}{4}$ قسمت حقیقی برابر $-\frac{3}{4}$ و قسمت موهومی برابر $\frac{1}{2}$ است.
- ۳ در عدد $6i$ قسمت حقیقی برابر ۰ و قسمت موهومی برابر ۶ است.
- ۴ در عدد -7 قسمت حقیقی برابر -7 و قسمت موهومی برابر ۰ است.
- واضح است که مجموعه اعداد حقیقی زیرمجموعه اعداد مختلط می باشد.
- اعدادی مانند $6i$ را اعداد موهومی محض (pure imaginary) می نامند.
- همه معادله های درجه دوم در دستگاه اعداد مختلط جواب دارند. مثلاً اعداد $2i$ و $-2i$ جواب

های معادله $x^2 = -4$ هستند زیرا

$$(2i)^2 = (2)^2(i)^2 = 4(-1) = -4, \quad (-2i)^2 = (-2)^2(i)^2 = 4(-1) = -4$$

اعداد حقیقی زیرمجموعه اعداد مختلط هستند.

• اعداد حقیقی زیرمجموعه اعداد مختلط هستند. نمودار زیر را ببینید.



چرا می‌گوییم اعداد مختلط و یا موهومی؟

- درست است که از لفظ ”موهومی“ برای توصیف اعداد مختلط استفاده می‌کنیم، ولی این نامگذاری به دلایل تاریخی است و باید توجه کنیم که اعداد مختلط نیز به اندازه اعداد حقیقی واقعی هستند! در واقع همه اعداد (احتمالا به جز اعداد صحیح مثبت) ساخته ذهن بشر هستند و برای تسهیل درک طبیعت اختراع شده‌اند.
- ما اعداد مختلط را یاد می‌گیریم زیرا این اعداد توصیف کامل و هماهنگی از جواب معادلات به ما ارائه می‌دهند.
- در واقع شما می‌توانید با نوشتن غ. ق. ق. در مقابل تمامی جواب های معادله درجه دوم با دلتای منفی از آنها عبور کنید ولی برای معادله درجه سوم، و درجات بالاتر، چنین کاری ممکن نیست. مثلا معادله درجه سوم $x^3 = 15x + 4$ را در نظر بگیرید. با یک بررسی ساده معلوم می‌شود که این معادله یک جواب حقیقی برابر 4 دارد. از طرفی، بنا به فرمول ریشه های معادله درجه سوم، که بعدا آن را بحث می‌کنیم، جواب چنین معادله ای به صورت زیر است:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 4 \quad \text{یعنی در واقع داریم!!!}$$

پرسش طبیعی در اینجا این است که چطور چنین برابری ممکن است. نظریه اعداد مختلط پاسخ این پرسش را در اختیار ما قرار می‌دهد.

چرا اعداد مختلط؟

- تمرین: برابری های زیر را ثابت کنید:

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i, \quad (2 - i)^3 = 2 - 11i$$

حال با استفاده از این دو تساوی نشان دهید که

$$\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = 4$$

- یکی از مهمترین نتایج اعداد مختلط این است که با استفاده از آنها می توان قضیه اساسی جبر را اثبات کرد. این قضیه (در واقع، یکی از نتایج این قضیه) بیان می کند که هر معادله چند جمله ای درجه n به شکل $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$ ، با ضرایب حقیقی a_0 تا a_n ، دقیقاً n جواب دارد.

- علاوه بر این الزامات ریاضیاتی، برخی از کمیت ها در علوم فیزیکی و مهندسی به صورت کمیت های ذاتا مختلط تعریف می شوند. مثلا در نظریه مدارهای الکتریکی، برخی کمیت های مربوط به مقاومت مدار ذاتا مختلط هستند. بنابراین باید چنین اعدادی را بشناسیم تا بتوانیم در نظریات فیزیکی با آنها کار کنیم.

عملیات بر روی اعداد مختلط بسیار شبیه به عملیات بر روی اعداد حقیقی است.

- عملیات حسابی بر روی اعداد مختلط (مانند جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) شبیه به کار کردن با اعداد به شکل $a + b\sqrt{c}$ می باشد. تنها تفاوت بین این دو آن است که باید به یاد داشته باشیم $i^2 = -1$. مثلاً به محاسبات زیر دقت کنید:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + (ad + bc)i + bdi^2 \\ &= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

- دقت کنید که در سطر اول جملات را بسط داده و بعد دسته بندی کرده ایم. همچنین، در سطر دوم از خاصیت $i^2 = -1$ استفاده کرده ایم. در نتیجه جمله آخر سطر دوم حقیقی است. حال در سطر آخر قسمت های حقیقی و موهومی را به صورت مجزا نوشته ایم.
- به همین صورت می توان جمع و تفریق اعداد مختلط را نیز تعریف کرد.



جمع، تفریق و ضرب اعداد مختلط

● جمع اعداد مختلط:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

یعنی برای جمع دو عدد مختلط، قسمت های حقیقی دو عدد را با هم و قسمت های موهومی دو عدد را نیز با هم جمع می کنیم.

● تفریق اعداد مختلط:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

یعنی برای تفریق دو عدد مختلط، قسمت های حقیقی دو عدد را از هم کم و قسمت های موهومی دو عدد را نیز از هم تفریق می کنیم.

● ضرب اعداد مختلط:

$$(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

برای ضرب دو عدد مختلف از قوانین ضرب دو جمله ای ها و $i^2 = -1$ استفاده کنید.

مثال از جمع، تفریق و ضرب اعداد مختلط

• نتیجه عبارت های زیر را به صورت $a + bi$ بنویسید:

(a) $(3 + 5i) + (4 - 2i)$

(b) $(3 + 5i) - (4 - 2i)$

(c) $(3 + 5i)(4 - 2i)$

(d) i^{23}

• پاسخ:

(a) $(3 + 5i) + (4 - 2i) = (3 + 4) + (5 - 2)i = 7 + 3i$

(b) $(3 + 5i) - (4 - 2i) = (3 - 4) + [5 - (-2)]i = -1 + 7i$

(c) $(3 + 5i)(4 - 2i) = [3 \cdot 4 - 5(-2)] + [3(-2) + 5 \cdot 4]i = 22 + 14i$

(d) $i^{23} = i^{22+1} = (i^2)^{11}i = (-1)^{11}i = (-1)i = -i$

تقسیم اعداد مختلط

- عملیات تقسیم اعداد مختلط شبیه به عملیات گویاسازی مخرج یک عبارت کسری است که در کتاب "مقدمات ریاضی" بحث شده است. برای اینکار باید مزدوج یک عدد مختلط را بشناسیم:
- عدد مختلطی مانند $z = a + bi$ را در نظر بگیرید. در این صورت، مزدوج مختلط این عدد مختلط به صورت $\bar{z} = a - bi$ تعریف می شود.

عدد مختلط	مزدوج مختلط
$3 + 2i$	$3 - 2i$
$1 - i$	$1 + i$
$4i$	$-4i$
5	5

- توجه کنید که حاصلضرب هر عدد مختلط در مزدوج مختلط آن همیشه یک عدد حقیقی غیرمنفی است:

$$\bar{z}z = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$
 نتیجه تقسیم اعداد مختلط را می توان به کمک مزدوج اعداد مختلط به دست آورد:

- برای ساده سازی نسبت $\frac{a+bi}{c+di}$ باید صورت و مخرج کسر را در مزدوج مختلط مخرج ضرب کرد:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{a + bi}{c + di} \right) \left(\frac{c - di}{c - di} \right) = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

مثال از تقسیم اعداد مختلط

● نتیجه عبارت های زیر را به صورت $a + bi$ بنویسید:

$$(a) \quad \frac{3 + 5i}{1 - 2i} \qquad (b) \quad \frac{7 + 3i}{4i}$$

پاسخ بخش اول:

$$\frac{3 + 5i}{1 - 2i} = \left(\frac{3 + 5i}{1 - 2i} \right) \left(\frac{1 + 2i}{1 + 2i} \right) = \frac{-7 + 11i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{11}{5}i$$

پاسخ بخش دوم:

$$\frac{7 + 3i}{4i} = \left(\frac{7 + 3i}{4i} \right) \left(\frac{-4i}{-4i} \right) = \frac{12 - 28i}{16} = \frac{3}{4} - \frac{7}{4}i$$

ریشه دوم اعداد منفی

- همانطور که هر عدد حقیقی مثبت مانند r دو ریشه دوم به صورت $\sqrt{r}$ و $-\sqrt{r}$ دارد، هر عدد حقیقی منفی مانند $-r$ نیز دو ریشه دوم دارد. در واقع، اگر $-r$ یک عدد منفی باشد دو ریشه دوم آن اعداد $\pm i\sqrt{r}$ می باشند زیرا

$$(i\sqrt{r})^2 = i^2 r = -r, \quad (-i\sqrt{r})^2 = (-1)^2 i^2 r = -r$$

- اگر $-r$ یک عدد حقیقی منفی باشد آنگاه ریشه دوم اصلی $-r$ برابر

$$\sqrt{-r} = i\sqrt{r}$$

می باشد. دو ریشه $-r$ برابر $i\sqrt{r}$ و $-i\sqrt{r}$ هستند.

- توجه کنید که معمولاً می نویسیم $i\sqrt{b}$ و نه $\sqrt{bi}$ ؛ زیرا می خواهیم نمادگذاری ما باعث سردرگمی بین $\sqrt{bi}$ و $\sqrt{b}i$ نشود.

- به محاسبات زیر دقت کنید:

$$\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$$

$$\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$$

$$\sqrt{-3} = i\sqrt{3} = i\sqrt{3}$$

اشتباه نکنیم!

- باید در هنگام محاسبات مربوط به ریشه دوم اعداد منفی بسیار مراقب باشیم. مخصوصاً دقت کنید که رابطه $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ برای اعداد مثبت درست است ولی وقتی هر دو عدد منفی هستند، درست نیست! مثلاً دقت کنید:

$$\sqrt{-2}\sqrt{-3} = i\sqrt{2}i\sqrt{3} = i^2\sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \text{ولی، از طرفی} \quad \sqrt{(-2)(-3)} &= \sqrt{6} \\ \text{بنابراین} \quad \sqrt{-2}\sqrt{-3} &\neq \sqrt{(-2)(-3)} \end{aligned}$$

- نکته مهم: برای جلوگیری از چنین اشتباهاتی، وقتی رادیکال اعداد منفی را در هم ضرب می کنید اول آنها را به شکل $i\sqrt{r}$ بنویسید ($r > 0$) و سپس محاسبات را ادامه دهید.

- تمرین: نتیجه $(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 - \sqrt{-4})$ را به شکل $a + bi$ بنویسید.
- پاسخ:

$$\begin{aligned} (\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4}) &= (\sqrt{12} - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{4}) \\ &= (2\sqrt{3} - i\sqrt{3})(3 + 2i) \\ &= (6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + i(2 \cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \\ &= 8\sqrt{3} + i\sqrt{3} \end{aligned}$$

جواب های مختلط معادله درجه دوم

- تاکنون دیده ایم که جواب معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، به شرط $a \neq 0$ ، به صورت زیر است:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

همچنین، فهمیدیم که اگر $b^2 - 4ac < 0$ آنگاه معادله مورد نظر جواب حقیقی ندارد. هرچند، در چنین حالتی معادله مورد نظر در مجموعه اعداد مختلط جواب دارد؛ زیرا اعداد منفی در مجموعه اعداد مختلط ریشه مربعی دارند.

- مثال: جواب معادله $x^2 + 9 = 0$ را بیابید.

پاسخ: معادله بالا یعنی $x^2 = -9$ ؛ در نتیجه داریم:

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm i\sqrt{9} = \pm 3i$$

- مثال: جواب معادله $x^2 + 4x + 5 = 0$ را بیابید.

پاسخ: با استفاده از جواب عمومی معادله درجه دوم داریم:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

بنابراین معادله $x^2 + 4x + 5 = 0$ دو جواب مختلط به صورت $-2 + i$ و $-2 - i$ دارد.

- از مثال قبل، و در واقع از فرم کلی جواب معادله درجه دوم، می توان فهمید که اگر معادله درجه دومی دارای جواب های مختلط باشد، آنگاه این جواب ها مزدوج مختلط هم هستند.

جواب های معادله درجه دوم، مزدوج مختلط هم هستند.

● نشان دهید که جواب های معادله درجه دوم $4x^2 - 24x + 37 = 0$ مزدوج مختلط هم هستند.

پاسخ: با استفاده از جواب عمومی معادله درجه دوم داریم:

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4(4)(37)}}{2(4)} = \frac{24 \pm \sqrt{-16}}{8} = \frac{24 \pm 4i}{8} = 3 \pm \frac{1}{2}i$$

بنابراین معادله $4x^2 - 24x + 37 = 0$ دو جواب مختلط به صورت $3 + \frac{1}{2}i$ و $3 - \frac{1}{2}i$ دارد که مزدوج مختلط هم هستند.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید اعداد مختلط و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ چرا ریشه دوم اعداد منفی در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نشده است؟
- ۲ چرا ریاضی دانان اعداد مختلط را اختراع کرده اند؟
- ۳ تعریف عدد مختلط را بنویسید.
- ۴ ویژگی اصلی i در اعداد مختلط کدام است؟
- ۵ چند معادله با جواب های مختلط بنویسید.
- ۶ شرط برابری دو عدد مختلط چیست؟
- ۷ قواعد جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو عدد مختلط را بنویسید.
- ۸ ریشه دوم یک عدد منفی مانند -2 در مجموعه اعداد مختلط را بنویسید.
- ۹ توضیح دهید که چرا $\sqrt{(-2)(-3)} \neq \sqrt{-2}\sqrt{-3}$. برای جلوگیری از چنین اشتباهاتی باید چکار کنیم؟
- ۱۰ توضیح دهید که چرا اگر معادله درجه دومی ریشه مختلط داشته باشد آنگاه آن دو ریشه مزدوج مختلط هم هستند.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراوانش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

● بخش حقیقی و مختلط هر کدام از اعداد مختلط زیر را بنویسید.

9. $\frac{-2 - 5i}{3}$

10. $\frac{4 + 7i}{2}$

11. 3

12. $-\frac{1}{2}$

13. $-\frac{2}{3}i$

14. $i\sqrt{3}$

15. $\sqrt{3} + \sqrt{-4}$

16. $2 - \sqrt{-5}$

● هر کدام از اعداد توانی زیر را به شکل $a + bi$ بنویسید.

47. i^3

48. i^{10}

49. $(3i)^5$

50. $(2i)^4$

51. i^{1000}

52. i^{1002}

تمرین

● جمع و تفریق های زیر را محاسبه کرده و نتیجه را به شکل $a + bi$ بنویسید.

17. $(3 + 2i) + 5i$

18. $3i - (2 - 3i)$

19. $(5 - 3i) + (-4 - 7i)$

20. $(-3 + 4i) - (2 - 5i)$

21. $(-6 + 6i) + (9 - i)$

22. $(3 - 2i) + (-5 - \frac{1}{3}i)$

23. $(7 - \frac{1}{2}i) - (5 + \frac{3}{2}i)$

24. $(-4 + i) - (2 - 5i)$

25. $(-12 + 8i) - (7 + 4i)$

26. $6i - (4 - i)$

● ضرب های زیر را محاسبه کرده و نتیجه را به شکل $a + bi$ بنویسید.

27. $4(-1 + 2i)$

28. $-2(3 - 4i)$

29. $(7 - i)(4 + 2i)$

30. $(5 - 3i)(1 + i)$

31. $(6 + 5i)(2 - 3i)$

32. $(-2 + i)(3 - 7i)$

33. $(2 + 5i)(2 - 5i)$

34. $(3 - 7i)(3 + 7i)$

35. $(2 + 5i)^2$

36. $(3 - 7i)^2$

تمرین

تقسیم های زیر را محاسبه کرده و نتیجه را به شکل $a + bi$ بنویسید.

$$37. \frac{1}{i}$$

$$38. \frac{1}{1 + i}$$

$$39. \frac{2 - 3i}{1 - 2i}$$

$$40. \frac{5 - i}{3 + 4i}$$

$$41. \frac{10i}{1 - 2i}$$

$$42. (2 - 3i)^{-1}$$

$$43. \frac{4 + 6i}{3i}$$

$$44. \frac{-3 + 5i}{15i}$$

$$45. \frac{1}{1 + i} - \frac{1}{1 - i}$$

$$46. \frac{(1 + 2i)(3 - i)}{2 + i}$$

تمرین

• هرکدام از رادیکال های زیر را محاسبه کرده و نتیجه را به شکل $a + bi$ بنویسید.

53. $\sqrt{-49}$

54. $\sqrt{\frac{-81}{16}}$

55. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

56. $\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{-27}$

57. $(3 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-1})$

58. $(\sqrt{3} - \sqrt{-4})(\sqrt{6} - \sqrt{-8})$

59. $\frac{2 + \sqrt{-8}}{1 + \sqrt{-2}}$

60. $\frac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-2}\sqrt{-9}}$

تمرین

● جواب معادلات زیر را یافته و نتیجه را به شکل $a + bi$ بنویسید.

61. $x^2 + 49 = 0$

62. $3x^2 + 1 = 0$

63. $x^2 - x + 2 = 0$

64. $x^2 + 2x + 2 = 0$

65. $x^2 + 3x + 7 = 0$

66. $x^2 - 6x + 10 = 0$

67. $x^2 + x + 1 = 0$

68. $x^2 - 3x + 3 = 0$

69. $2x^2 - 2x + 1 = 0$

70. $t + 3 + \frac{3}{t} = 0$

71. $6x^2 + 12x + 7 = 0$

72. $x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0$

● اگر داشته باشیم $z = 3 - 4i$ و $w = 5 + 2i$ نتیجه عبارت های زیر را بیابید. یادآوری: $\bar{q}$ به معنی مزدوج مختلط عدد q می باشد.

73. $\bar{z} + \bar{w}$

74. $\overline{z + w}$

75. $z \cdot \bar{z}$

76. $\bar{z} \cdot \bar{w}$

تمرین

● اگر داشته باشیم $z = a + bi$ و $w = c + di$ تساوی های زیر را اثبات کنید. یادآوری: $\bar{\bar{q}}$ به معنی مزدوج مختلط عدد q می باشد.

● $\bar{\bar{w}} + \bar{\bar{z}} = \overline{w + z}$

● $\bar{w}\bar{z} = \overline{wz}$

● $(\bar{z})^2 = \bar{z^2}$

● $\bar{\bar{z}} = z$

● عبارت $\bar{z} + z$ حقیقی است.

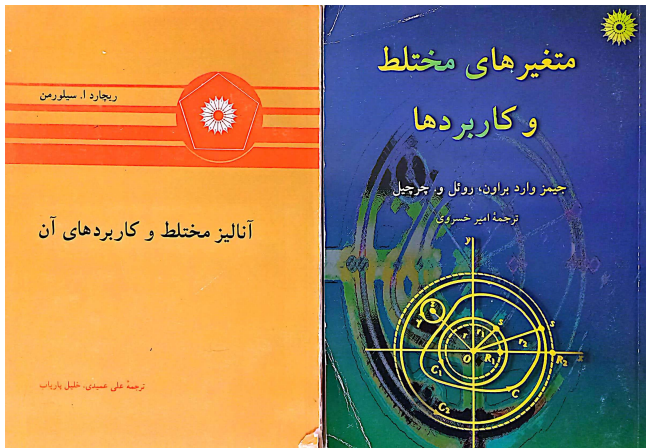
● عبارت $z - \bar{z}$ موهومی است.

● عبارت $\bar{z}z$ حقیقی است.

● عبارت $\bar{z} = z$ فقط و فقط وقتی درست است که z حقیقی باشد.

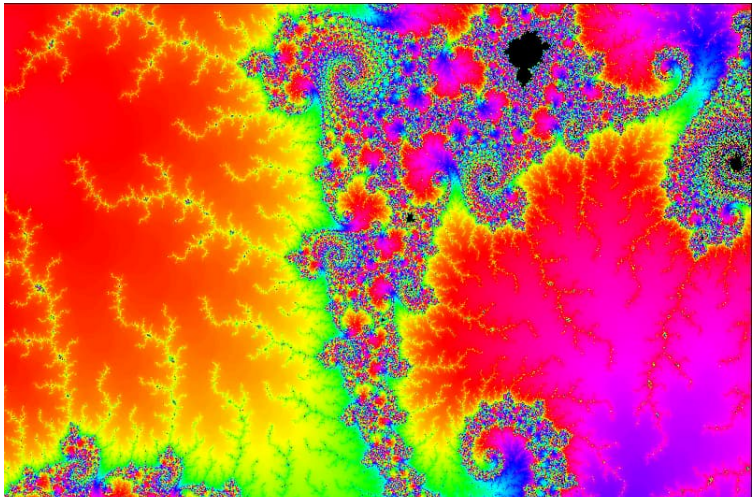
منابع برای مطالعات بیشتر

● مبحث متغیرهای مختلط و کاربردهای آنها در رشته های گوناگون دانشگاهی، و به شیوه های متفاوت، در نظر گرفته می شود. هرچند، برای بررسی ساختاری این موضوع بهتر است به کتاب های ریاضیاتی مراجعه کنید. اگر قصد دارید این مبحث را به صورت نسبتا پیشرفته، ولی خلاصه، پیگیری کنید توصیه می کنم به دوفصل توابع مختلط کتاب ”روش های ریاضی در فیزیک“، نوشته آرفکن و وبر، مراجعه کنید.



مبحث بعدی: توابع در فضای مختلط

- در جلسه بعد توابع را بر روی دامنه مختلط تعریف خواهیم کرد. سپس با نمایش قطبی اعداد مختلط آشنا خواهیم شد.



منابع

- ❶ **Algebra and Trigonometry**, by James Stewart, Lothar Redlin, and Saleem Watson, Cengage Learning; 4th edition (January 13, 2015)
- ❷ **Precalculus: Mathematics for Calculus**, by James Stewart, Lothar Redlin, and Saleem Watson, Cengage Learning; 7th edition (January 1, 2015)
- ❸ **Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition)** by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❹ **Mathematical Methods for Physicists (6th Edition)** by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❺ **Mathematical Methods for Physics and Engineering**, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❻ **Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations**, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❼ **Methods of Theoretical Physics I, II**, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

