

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

مباحثی در جبر اعداد مختلط

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

اعداد مختلط با اندازه واحد

• عددی مختلط به شکل کلی

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

دارای اندازه واحد است. این عدد در نمودار آرگان نشان دهنده نقاطی با مختصات $x = \cos \theta$ و $y = \sin \theta$ می باشد که به وضوح نشان دهنده نقاط موجود بر روی دایره ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدا مختصات است که در زاویه قطبی θ قرار گرفته است. فرمول این دایره به صورت $x^2 + y^2 = 1$ می باشد.

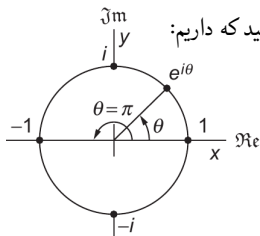
• برای مثال اگر داشته باشیم $\theta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ، آنگاه از رابطه بالا می توان دید:

$$e^{i\pi/2} = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i \quad e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \quad e^{i3\pi/2} = -i$$

در شکل زیر برخی مقادیر مهم در صفحه مختلط آورده شده اند. توجه کنید که داریم:

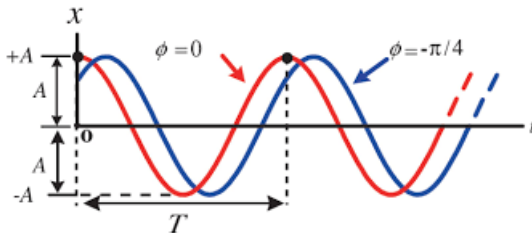
$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi) = e^{i\theta}$$

در اینجا $k \in \mathbb{Z}$ یک عدد صحیح است. بنابراین می بینیم که $e^{i\theta}$ یک تابع تناوبی با دوره تناوب 2π می باشد.



حرکت نوسانی و اختلاف فاز

- یک کاربرد: حرکت نوسانی را معمولا با توابع $\sin(\omega t + \delta)$ و یا $\cos(\omega t + \delta)$ توصیف می کنند که در آن ω فرکانس زاویه ای و δ اختلاف فاز (فاز اولیه) است. هرچند، همین حرکت را می توان با استفاده از تابع $\exp(i[\omega t + \delta])$ هم توصیف کرد. چرا؟!
 - تمرین: فرمول دو حرکت نوسانی زیر را بنویسید.



توابع مثلثاتی و هذلولوی

- تمرین: با استفاده از روابط $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ و $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ رابطه زیر را اثبات کنید:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- توجه: روابط بالا یادآور تعریف توابع هذلولوی (هایپربولیک) هستند.

$$\cosh \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}, \quad \sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

- تمرین: نشان دهید که روابط زیر بین توابع مثلثاتی (مستدیر: circular) و هایپربولیک برقرار است:

$$\cosh iz = \cos z, \quad \sinh iz = i \sin z$$

- توجه کنید که می توان رابطه $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ را به توان n رساند و بنابراین به نتیجه زیر رسید:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

که به فرمول فرمول دو موآور (Abraham de Moivre) مشهور است.

فرمول دو موآور

- با استفاده از فرمول دو موآور و قضیه بسط دوجمله ای می توان روابط بسیار اساسی را برای $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ به دست آورد:

$$\sin nx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos x)^k (\sin x)^{n-k} \sin \frac{(n-k)\pi}{2}$$

$$\cos nx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos x)^k (\sin x)^{n-k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2}.$$

- تمرین: روابط بالا را اثبات کنید.
 - مثلا اگر قرار دهید $n = 2$ ، می توان با استفاده از فرمول دو موآور نوشت:
- $$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$n = 2 \Rightarrow \cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta$$

و یا

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

- تمرین: به همین صورت $\cos 3\theta$ ، $\sin 3\theta$ ، $\cos 4\theta$ و $\sin 4\theta$ را به دست آورید.

روابط بین توابع وارون مثلثاتی و لگاریتم

- همچنین روابط جالب و بسیار مهمی بین توابع وارون مثلثاتی و لگاریتم وجود دارند. مثلاً اگر مقدار کسینوس مثبت باشد (یعنی ربع اول و چهارم)، آنگاه می‌توان نوشت:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} + i \sin \theta \quad \text{if } \cos \theta > 0$$

حالا با فرض $z = \sin \theta$ می توان نوشت $\theta = \sin^{-1} z$. حال با محاسبه لگاریتم دو طرف رابطه بالا می توان نوشت:

$$\ln \left[e^{i\theta} \right] = \ln \left[\sqrt{1 - \sin^2 \theta} + i \sin \theta \right]$$

$$\mathrm{i}\theta = \ln \left[\sqrt{1 - z\bar{z}} + \mathrm{i}z \right] \quad \Rightarrow \quad \sin^{-1}(z) = -\mathrm{i} \ln \left[\sqrt{1 - z\bar{z}} + \mathrm{i}z \right]$$

- تمرین: دیگر روابط را به همین صورت اثبات کنید:

$$\sin^{-1}(z) = -i \ln \left[iz + \sqrt{1 - z^2} \right], \quad \tan^{-1}(z) = \frac{i}{2} \left[\ln(1 - iz) - \ln(1 + iz) \right]$$

$$\sinh^{-1}(z) = \ln \left[z + \sqrt{1 + z^2} \right], \quad \tanh^{-1}(z) = \frac{1}{2} \left[\ln(1 + z) - \ln(1 - z) \right].$$

توان و ریشه اعداد مختلط

- در هنگام محاسبه توان و ریشه اعداد مختلط توجه داشته باشید که استفاده از فرم قطبی این اعداد محاسبات را به شدت ساده تر می کند. برای ”توان های صحیح” این اعداد، نتیجه سراسر است و یکتاست:

$$z = re^{i\varphi}, \quad z^n = r^n e^{in\varphi}$$

برای ریشه n ام این اعداد نیز می توان نوشت:

$$z = re^{i\varphi}, \quad z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\varphi/n}$$

ولی توجه داشته باشید که این ریشه یکتا نیست!

- در واقع دیدیم که مقادیر $z = re^{i\varphi}$ و $z = re^{i(\varphi+2m\pi)}$ با هم معادلند (در اینجا m عددی صحیح است.)؛ ولی ریشه عدد اخیر برابر است با

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\varphi+2m\pi)/n}$$

در نتیجه اگر مثلاً ریشه دوم عدد را محاسبه کنیم $n = 2$ ، مقادیر مختلف m به دو نتیجه متفاوت برای ریشه دوم منجر خواهد شد.

- در حالت کلی $z^{\frac{1}{n}}$ به n مقدار مجزا منجر خواهد شد و آرگومان این مقادیر به اندازه $2\pi/n$ با هم اختلاف خواهند داشت.

مثال

● جمع‌بندی: ریشه n ام عدد $z = re^{i\theta}$ برابر است با

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \exp \left[i \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n} \right) \right]$$

که در آن $m \in \mathbb{Z}$ عددی صحیح است.

● مثال: ریشه سوم عدد i را بیابید. به عبارت دیگر معادله $z^3 = i$ را حل کنید.

پاسخ:
$$z^3 = i = e^{i\pi/2} \Rightarrow (re^{i\theta})^3 = r^3 e^{3i\theta} = 1 \times e^{i\pi/2}$$

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت: $r = 1 \Rightarrow r^3 = 1$ ، چون r عددی ذاتا مثبت است. همچنین برای آرگومان داریم:

$$3\theta = \pi/2 + 2\pi m \Rightarrow \theta = \pi/6 + \frac{2}{3}\pi m$$

حال به ازای $m = 0, 1, 2$ داریم:

$$\theta = \pi/6 + \frac{2}{3}\pi(0) = \pi/6, \quad \theta = \pi/6 + \frac{2}{3}\pi(1) = \frac{5}{6}\pi$$

$$\theta = \pi/6 + \frac{2}{3}\pi(2) = \frac{3}{2}\pi$$

مثال

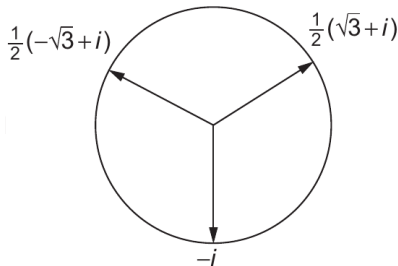
● مثال: ریشه سوم عدد i را بیابید. به عبارت دیگر معادله $z^3 = i$ را حل کنید.
ادامه پاسخ: بنابراین سه ریشه خواسته شده در مختصات قطبی با مقادیر زیر داده می شوند:

$$1e^{i\pi/6}, \quad 1e^{i\frac{5}{6}\pi}, \quad 1e^{i\frac{7}{6}\pi}$$

در مختصات دکارتی نیز این ریشه ها به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -i$$

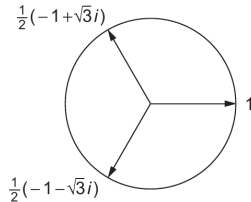
نمودار آرگان زیر را ببینید.



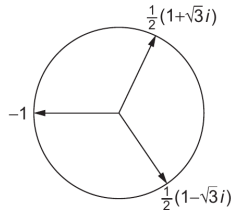
پرسش: آیا مقادیر دیگر m به
ریشه های متفاوتی منجر می شوند؟

تمرین

- تمرین: ریشه سوم عدد ۱ را بیابید و نشان دهید که جواب ها به صورت زیرند. راهنمایی: معادله $z^3 = 1$ را حل کنید.

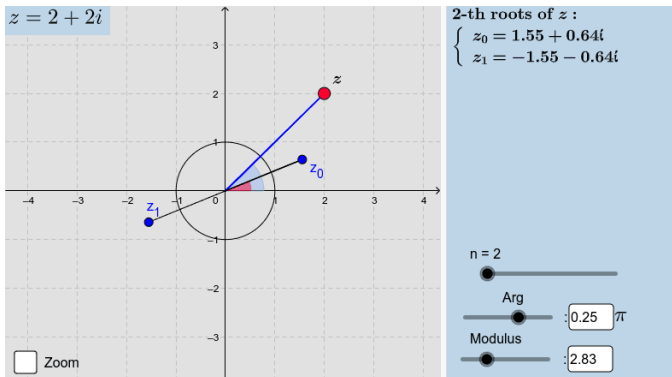


- تمرین: ریشه سوم عدد -1 را بیابید و نشان دهید که جواب ها به صورت زیرند. راهنمایی: معادله $z^3 = -1$ را حل کنید.



تمرین

- الف) عدد $z = 2 + 2i$ را در نمایش قطبی بنویسید. ب) ریشه دوم این عدد را بیابید (پاسخ نهایی در شکل زیر آمده است).



لگاریتم اعداد مختلط

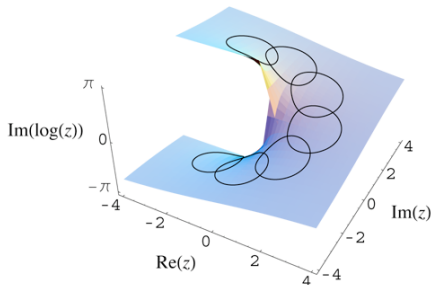
- تابع لگاریتم نیز در فضای مختلط چند مقداری است. در اینجا نیز در نمایش قطبی داریم:

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

هرچند رابطه زیر نیز به صورت همزمان برای هر مقدار صحیح از عدد n برقرار است:

$$\ln z = \ln\left(re^{i(\theta+2n\pi)}\right) = \ln r + i(\theta + 2n\pi).$$

- بنابراین تابع $\ln z$ ، به ازای هر مقدار z ، بینهایت خروجی دارد!
پرسش: آیا می توان این رابطه را تابع نامید؟!



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید جبر اعداد مختلط و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ منظور از عدد مختلط با اندازه واحد چیست؟
- ۲ اعداد مختلط با اندازه واحد چطور نقاط یک دایره را تشکیل می دهند؟
- ۳ رابطه بین توابع مثلثاتی و نمایی چیست؟
- ۴ رابطه بین توابع هذلولوی و نمایی چیست؟
- ۵ منظور از فرمول دو موآور چیست؟
- ۶ رابطه بین توابع وارون مثلثاتی و لگاریتمی چیست؟
- ۷ توضیح دهید که ریشه n ام یک عدد مختلط چطور به دست می آید.
- ۸ توضیح دهید که چرا ریشه ها چندگانه هستند.
- ۹ توضیح دهید که چرا لگاریتم یک عدد مختلط بینهایت مقدار دارد.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

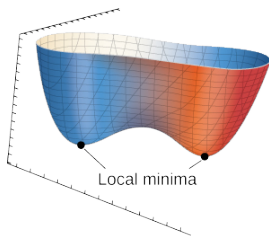


تمرین

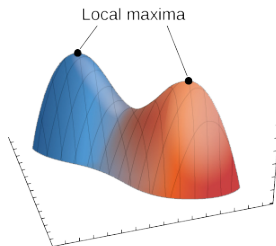
- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- تمرینات موجود در صفحات ۶۰ و ۶۱ از ویرایش هفتم آرفکن را حل کنید.

مبحث بعدی: مشتق توابع چند متغیره و نقاط مانا

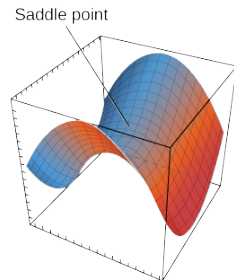
در جلسه بعد مشتق توابع چند متغیره و نقاط مانا را یادآوری خواهیم کرد.



(a)



(b)



(c)

منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

