

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

نمایش ماتریسی فضای حالت و عملگرها

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

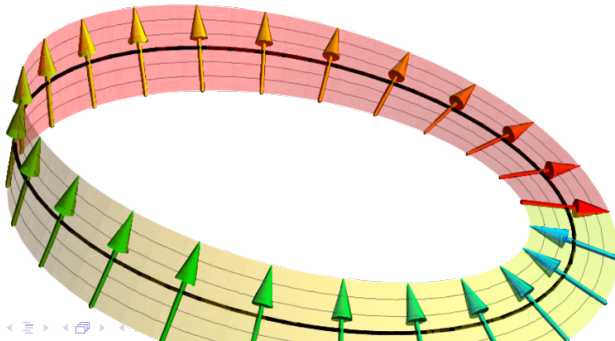
- ۱ نمایش ماتریسی فضای حالت و عملگرها
- کت های پایه فضا
- نمایش ماتریسی حالت ها و عملگرها

آنچه گذشت: مقدمه ای بر فرمولبندی ریاضیاتی مکانیک کوانتومی

- حالت یک سیستم کوانتومی توسط کت هایی مانند $|\alpha\rangle$ و یا دوگان آنها با نام برا $\langle\alpha|$ توصیف می شود. کت سیستم "شامل تمام اطلاعات معنی دار سیستم کوانتومی" مورد نظر است.
- تعریف ویژه کت و ویژه مقدار: $A|a'\rangle = a'|a'\rangle, \quad A|a''\rangle = a''|a''\rangle, \quad \dots$
- هر کت دلخواه را می توان با استفاده از ویژه کت ها بسط داد: $|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle$
- تعریف دوگان برهمنهی دو کت: $c_{\alpha}|\alpha\rangle + c_{\beta}|\beta\rangle \xleftrightarrow{DC} c_{\alpha}^* \langle\alpha| + c_{\beta}^* \langle\beta|$
- تعریف ضرب داخلی $\langle\beta|\alpha\rangle$ و ویژگی مهم آن $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$
- حالت های متعامد: دو کت بر هم عمودند اگر $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle = 0$
- تعریف عملگرهای خطی: $X(c_{\alpha}|\alpha\rangle + c_{\beta}|\beta\rangle) = c_{\alpha}X|\alpha\rangle + c_{\beta}X|\beta\rangle$
- تعریف مزدوج هرمیتی یک عملگر $X|\alpha\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle\alpha|X^{\dagger}$
- تعریف عملگر هرمیتی: $X = X^{\dagger}$ و یک ویژگی بسیار مهم $(XY)^{\dagger} = Y^{\dagger}X^{\dagger}$
- ضرب خارجی یک کت و یک برا به صورت $|\beta\rangle\langle\alpha|$ تعریف می شود که یک عملگر است.
- ضرب $(\langle\alpha|\gamma\rangle)|\beta\rangle = |\beta\rangle(\langle\alpha|\gamma\rangle)$ کت $|\gamma\rangle$ را در جهت کت $|\beta\rangle$ تصویر می کند.
- برای هر عملگر هرمیتی داریم $\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\alpha|A|\beta\rangle^*$

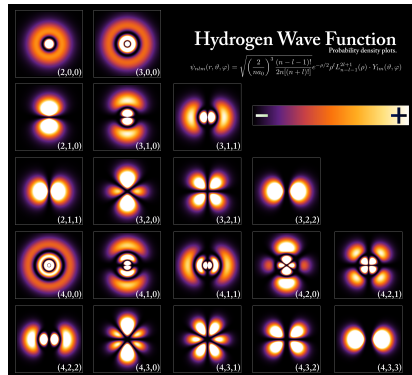
اهداف این جلسه

• ساختار مجرد ریاضیاتی که در جلسه قبل بنا کردیم کاملاً کلی است. در این جلسه می آموزیم که چطور می توان این ساختار مجرد را به وسیله نمایش ماتریسی حالت ها و عملگرها بهتر تصور کرد. البته در ابتدا ویژه کت های یک مشاهده پذیر را بررسی می کنیم. سپس ویژه کت ها را به عنوان پایه های فضا پذیرفته و عملگر تصویر را معرفی می کنیم. آنگاه از نمایش ماتریسی استفاده کرده و ساختار ریاضیاتی معرفی شده را به کار خواهیم بست. در انتها، به عنوان یک کاربرد ساده، سیستم های اسپین $1/2$ را بررسی می کنیم.



ویژه کت های یک مشاهده پذیر

- در اینجا می خواهیم ویژه کت های یک عملگر مشاهده پذیر را معرفی کرده و خصوصیات آنها را بررسی کنیم. در ادامه می خواهیم این ویژه کت ها را به عنوان پایه های فضا معرفی کنیم. لطفا دقت کنید که معرفی ویژه کت های عملگرهای دیگر برای پایه های فضا نیز ممکن است؛ ولی استفاده از ویژه کت های یک عملگر مشاهده پذیر باعث می شود که در اکثر موارد پیدا کردن نتیجه نهایی و تفسیر آن راحت تر شود. حال به قضیه بسیار مهم زیر دقت کنید.



یک قضیه بسیار مهم

● قضیه: ویژه مقادیر یک عملگر هرمیتی حقیقی اند و ویژه کت های متناظر با ویژه مقادیر متفاوت بر هم عمود هستند.

● اثبات: عملگر هرمیتی A را در نظر بگیرید. قبلا دیدیم که ویژه کت ها و ویژه مقادیر این عملگر به صورت مقابل به هم ربط دارند:

$$A|a'\rangle = a' |a'\rangle$$

فرض می کنیم این ویژه مقادیر غیر تهی هستند. در اینجا a' ، a'' و ... ویژه مقادیر متناظر با ویژه کت های $|a'\rangle$ ، $|a''\rangle$ و ... هستند. می توان دوگان رابطه بالا را به صورت $\langle a''|A = a''^* \langle a''|$ نوشت. حال با ضرب رابطه اول از سمت چپ در $\langle a''|$ و ضرب رابطه دوم از سمت راست در $|a'\rangle$ و تفریق دو رابطه به دست آمده خواهیم داشت:

$$(a' - a''^*) \langle a''|a'\rangle = 0$$

در تساوی بالا حاصلضرب دو عبارت برابر با صفر است. بنابراین باید حداقل یکی از آن دو صفر باشد.

۱- اگر مقادیر a' و a'' با هم برابر باشند، آنگاه از این رابطه می توان نتیجه گرفت که $a' = a''^*$ و در نتیجه قسمت اول قضیه (حقیقی بودن ویژه مقادیر عملگر هرمیتی) اثبات می شود.

۲- اگر مقادیر a' و a'' با هم برابر نباشند، آنگاه بنا به قسمت اول قضیه داریم

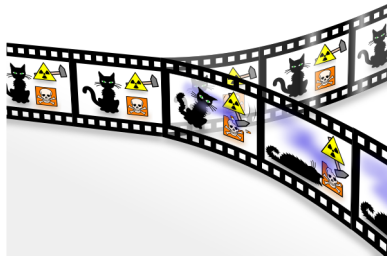
$$a' - a''^* = a' - a'' \neq 0$$

که غیر صفر است. بنابراین عبارت $\langle a''|a'\rangle$ به شرط $a' \neq a''$ باید صفر باشد: $\langle a''|a'\rangle = 0$

اهمیت قضیه

- ما در درس مربوط به اندازه گیری توضیح خواهیم داد که ویژه مقادیر مشاهده پذیرها (که عملاً همان مقادیر خروجی آزمایشات هستند) باید حقیقی باشند. قضیه ای که در بالا اثبات شد، تضمین می کند که ویژه مقادیر عملگرهای هرمیتی حقیقی اند؛ در نتیجه ما در مکانیک کوانتومی از عملگرهای هرمیتی برای نشان دادن کمیت های مشاهده پذیر استفاده خواهیم کرد.
- توجه: معمولاً ترجیح می دهیم از ویژه کت های نرمال شده استفاده کنیم. بنابراین، بنا به قضیه بالا می توان نوشت:

$$\langle a'' | a' \rangle = \delta_{a'a''}$$
- حال ممکن است بپرسیم آیا این مجموعه ویژه کت ها کامل هستند؟ پاسخ: بله! ما روشی را برای ساختن (بسط) هر بردار دلخواه در فضا با استفاده از ویژه کت ها معرفی خواهیم کرد.



ویژه کت ها به عنوان کت های پایه

از قضیه بالا می آموزیم که مجموعه ویژه کت های نرمال عملگر هرمیتی A یک مجموعه یکامتعامد (orthonormal) برای بسط فضا را تشکیل می دهند. بنابراین یک کت دلخواه در فضا را می توان با استفاده از ویژه کت های عملگر A بسط داد.

یادآوری: از پایه های یکامتعامد $\hat{i}$, $\hat{j}$ و $\hat{k}$ در فضای سه بعدی برای نوشتن یک بردار کلی استفاده می کنیم:

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$$

ضرایب این بسط را می توان به راحتی از ضرب داخلی بردار $\vec{V}$ در هر یک از بردارهای پایه به دست آورد:

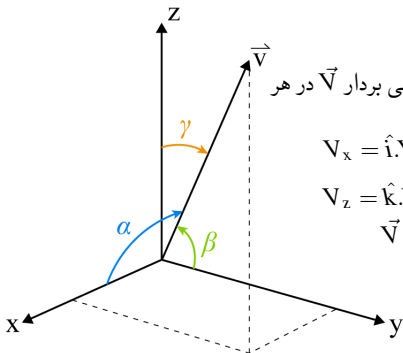
$$V_x = \hat{i} \cdot \vec{V} = V \cos \alpha, \quad V_y = \hat{j} \cdot \vec{V} = V \cos \beta$$

$$V_z = \hat{k} \cdot \vec{V} = V \cos \gamma$$

$$\vec{V} = (\hat{i} \cdot \vec{V}) \hat{i} + (\hat{j} \cdot \vec{V}) \hat{j} + (\hat{k} \cdot \vec{V}) \hat{k}$$

$$\vec{V} = \sum_i (\vec{e}_i \cdot \vec{V}) \vec{e}_i \quad \text{و یا}$$

که در آن $\vec{e}_i$ بردارهای پایه فضا است.



ویژه کت ها به عنوان کت های پایه

- به همین ترتیب می توانیم از ویژه کت های $|a'\rangle$ برای بسط یک حالت کوانتومی دلخواه مانند $|\alpha\rangle$ استفاده کنیم:

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle$$

که در آن $c_{a'} = \langle a' | \alpha \rangle$ ضرایب بسط اند.

- ویژگی های بسط: می توان به راحتی از اصل شرکت پذیری ضرب استفاده کرده و بسط بالا را به شکل زیر نوشت:

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle = \left(\sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | \right) |\alpha\rangle$$

حال از آنجا که رابطه بالا برای هر کت $|\alpha\rangle$ درست است، بنابراین می توان آن را به عنوان یک اتحاد در نظر گرفت. پس نتیجه می گیریم:

$$\sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | = 1$$

موجود ۱ در سمت راست رابطه بالا تعریف عملگر واحد (همانی) است؛ یعنی عملگری که با تاثیر بر هر کت و هر عملگر هیچ تغییری در آن به وجود نخواهد آورد. رابطه بالا را رابطه بستار و یا تمامیت (completeness relation or closure) می نامند.

- پرسش: متناظر با این عملگر در فضای بردارهای سه بعدی چیست؟

اهمیت رابطه بستار

- رابطه بستار در محاسبات مکانیک کوانتومی اهمیت اساسی دارد. در واقع وقتی تعدادی کت، برا و یا عملگر را داشته باشیم که به صورت معنی داری در هم ضرب شده باشند، می توانیم رابطه بستار را در هر بخش از ضرب استفاده کرده و (با کمی تلاش) نتایج مورد نظر را به دست آوریم.
- برای مثال عبارت $\langle \alpha | \alpha \rangle$ را در نظر بگیرید. با وارد کردن رابطه بستار (که عملاً همان عملگر همانی است!) خواهیم داشت:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \alpha | (1) | \alpha \rangle = \langle \alpha | \left(\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \right) | \alpha \rangle$$

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \sum_{a'} \langle \alpha | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle = \sum_{a'} \langle a' | \alpha \rangle^* \langle a' | \alpha \rangle = \sum_{a'} |\langle a' | \alpha \rangle|^2$$

از اینجا می توان نتیجه گرفت که اگر حالت $|\alpha\rangle$ نرمال باشد داریم

$$\sum_{a'} |c_{a'}|^2 = \sum_{a'} |\langle a' | \alpha \rangle|^2 = 1$$

که در آن ۱ همان عدد ۱ است.

- پرسش: مشابه این رابطه در بردارهای کلاسیک کدام رابطه است؟

عملگر تصویر

- حال می خواهیم کارکرد عملگر $|a'\rangle\langle a'|$ را بررسی کنیم. وقتی این عملگر بر روی یک کت کلی

$$| \alpha \rangle \text{ عمل می کند} \quad (|a'\rangle\langle a'|) | \alpha \rangle = \langle a' | \alpha \rangle | a' \rangle = c_{a'} | a' \rangle$$

یعنی عملگر $|a'\rangle\langle a'|$ آن بخش از کت دلخواه $| \alpha \rangle$ را که در جهت $|a'\rangle$ است انتخاب می کند و بقیه را دور می ریزد (فیلتر می کند). یا به عبارت دیگر عملگر $|a'\rangle\langle a'|$ کت دلخواه $| \alpha \rangle$ را در جهت $|a'\rangle$ تصویر می کند. پس عملگر $|a'\rangle\langle a'|$ را عملگر تصویر در جهت $|a'\rangle$ می نامند:

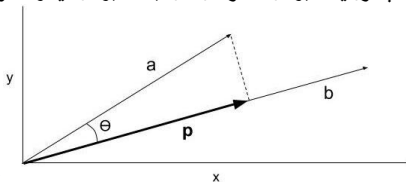
$$\Lambda_{a'} \equiv |a'\rangle\langle a'|$$

از اینجا رابطه بستار را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{a'} \Lambda_{a'} = 1$$

- توجه: با توجه به اینکه فرایند اندازه گیری در مکانیک کوانتومی عملاً یک فرایند فیلترینگ است، عملگر تصویر نقش مهمی در فرایند اندازه گیری خواهد داشت.

- پرسش: در مبحث بردارها چطور یک بردار دلخواه را در جهت بردار دیگر تصویر می کنیم؟



نمایش عملگرها به شکل ماتریسی

- با پیدا کردن و یا معرفی کردن کت های پایه، حال می توانیم یک عملگر مانند X را به صورت یک ماتریس مربعی نشان دهیم. برای اینکار می توانیم دو بار از رابطه بستار استفاده کنیم:

$$X = \sum_{a''} \sum_{a'} |a''\rangle \langle a''| X |a'\rangle \langle a'|$$

- اگر بُعد فضای کت برابر با N باشد، می توان به راحتی دید ماتریس بالا باید شامل N^2 درایه با شکل کلی $\langle a''| X |a'\rangle$ باشد.

- توجه: در عبارت $\langle a''| X |a'\rangle$ کت $|a'\rangle$ نشان دهنده یک ماتریس ستونی و برا $\langle a''|$ نشان دهنده یک ماتریس سطری است.

- پس عملگر X را می توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$X \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}| X |a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}| X |a^{(2)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(2)}| X |a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}| X |a^{(2)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

مزدوج هرمیتی یک عملگر

- با استفاده از تعریف دوگان هرمیتی یک عملگر داریم:

$$\langle a'' | X | a' \rangle = \langle a' | X^\dagger | a'' \rangle^*$$

بنابراین وقتی عملگری را در نمایش ماتریسی می نویسیم، مزدوج هرمیتی آن عملگر عملاً همان ترانزپوزیته مختلط الحاقی آن عملگر است. یعنی برای پیدا کردن $X^\dagger$ باید اول مزدوج مختلط همه درایه ها را بیابیم و سپس جای سطر و ستون ها را عوض کنیم.

- مثال: مزدوج هرمیتی عملگر X را بیابید.

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 3+2i & 3i \\ -i & 3i & 8 \\ 1-i & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X^* = \begin{pmatrix} 5 & 3-2i & -3i \\ i & -3i & 8 \\ 1+i & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^\dagger = (X^*)^T = \begin{pmatrix} 5 & i & 1+i \\ 3-2i & -3i & 1 \\ -3i & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X^\dagger = (X^*)^T = (X^T)^*$$

البته توجه کنید که

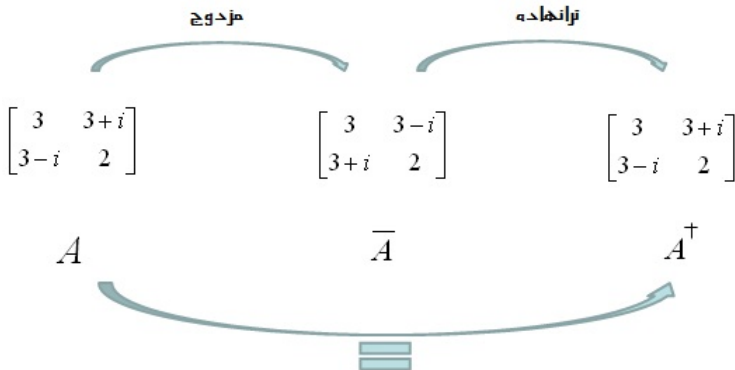
عملگرهای هرمیتی

- به ویژه اگر یک عملگر مانند A هرمیتی باشد، آنگاه داریم

$$\langle a'' | A | a' \rangle = \langle a' | A | a'' \rangle^*$$

پرسش: آیا عملگر X در بالا هرمیتی است؟ چرا؟

- به مثال زیر از یک عملگر هرمیتی دقت کنید.



قدرت نمادگذاری کت و برا

• نمادگذاری کت و برا این قدرت را دارد که به راحتی به نمادگذاری ماتریسی و حتی نمادگذاری عملگرهای دیفرانسیلی تبدیل شود.

• مثلاً ضرب دو عملگر در نمادگذاری کت و برا را می توان به راحتی به ضرب ماتریسی تبدیل کرد. در واقع اگر داشته باشیم $Z = XY$ ، آنگاه (با استفاده از رابطه بستار) درایه های ماتریس حاصلضرب به صورت زیر به دست می آیند:

$$\langle a'' | Z | a' \rangle = \langle a'' | XY | a' \rangle = \sum_{a'''} \langle a'' | X | a''' \rangle \langle a''' | Y | a' \rangle$$

$$Z_{ij} = \sum_k X_{ik} Y_{kj}$$

این رابطه همان رابطه ضرب ماتریسی است:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} | \text{cat} \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | \text{dog} \rangle$$

نمایش ماتریسی حالت ها

- حال می خواهیم رابطه $|\gamma\rangle = X |\alpha\rangle$ را به کمک کت های پایه به روش ماتریسی بنویسیم. در ادامه اگر رابطه بالا را از سمت چپ در $\langle a' |$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\langle a' | \gamma \rangle = \langle a' | X |\alpha\rangle = \sum_{a''} \langle a' | X | a'' \rangle \langle a'' | \alpha \rangle$$

پس اگر کت های $|\alpha\rangle$ و $|\gamma\rangle$ را به صورت دو بردار ستونی با مولفه های زیر در نظر بگیریم:

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | \alpha \rangle \\ \langle a^{(2)} | \alpha \rangle \\ \langle a^{(3)} | \alpha \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |\gamma\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | \gamma \rangle \\ \langle a^{(2)} | \gamma \rangle \\ \langle a^{(3)} | \gamma \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

آنگاه $|\gamma\rangle$ عملاً برابر با حاصلضرب ماتریس مربعی X در ماتریس ستونی $|\alpha\rangle$ خواهد بود. مثال زیر از $|\gamma\rangle = X|\alpha\rangle$ را ببینید.

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}\alpha_1 + X_{12}\alpha_2 + X_{13}\alpha_3 \\ X_{21}\alpha_1 + X_{22}\alpha_2 + X_{23}\alpha_3 \\ X_{31}\alpha_1 + X_{32}\alpha_2 + X_{33}\alpha_3 \end{pmatrix}$$

نمایش ماتریسی حالت ها

- به همین ترتیب رابطه $\langle \gamma | = \langle \alpha | X$ را می توان به کمک کت های پایه به روش ماتریسی نوشت:

$$\langle \gamma | a' \rangle = \sum \langle \alpha | a'' \rangle \langle a'' | X | a' \rangle$$

پس برا ها توسط ماتریس های سطری نمایش داده می شوند، مثلاً

$$\langle \gamma | \doteq (\langle \gamma | a^{(1)} \rangle, \langle \gamma | a^{(2)} \rangle, \langle \gamma | a^{(3)} \rangle, \dots)$$

$$= (\langle a^{(1)} | \gamma \rangle^*, \langle a^{(2)} | \gamma \rangle^*, \langle a^{(3)} | \gamma \rangle^*, \dots)$$

پس حالت $\langle \gamma |$ ترانواده مختلط حالت $|\gamma\rangle$ می باشد.

- به همین ترتیب ضرب داخلی و خارجی دو حالت $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$

به صورت مقابل با استفاده از کت های پایه نوشته می شوند.

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \sum_{a'} \langle \beta | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle$$

$$= (\langle a^{(1)} | \beta \rangle^*, \langle a^{(2)} | \beta \rangle^*, \dots) \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | \alpha \rangle \\ \langle a^{(2)} | \alpha \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$|\beta\rangle\langle\alpha| \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | \beta \rangle \langle a^{(1)} | \alpha \rangle^* & \langle a^{(1)} | \beta \rangle \langle a^{(2)} | \alpha \rangle^* & \dots \\ \langle a^{(2)} | \beta \rangle \langle a^{(1)} | \alpha \rangle^* & \langle a^{(2)} | \beta \rangle \langle a^{(2)} | \alpha \rangle^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

نمایش ماتریسی هر عملگر در ویژه کت هایش یک ماتریس قطری خواهد بود.

نمایش ماتریسی هر عملگر در ویژه پایه های آن عملگر به خصوص ساده خواهد بود. برای دیدن این نکته بسیار مهم در ابتدا توجه می کنیم که

$$A = \sum_{a''} \sum_{a'} |a''\rangle \langle a''| A |a'\rangle \langle a'|$$

ولی می توان عبارت $\langle a''| A |a'\rangle$ را به راحتی محاسبه کرد:

$$\langle a''| A |a'\rangle = \langle a''| (A |a'\rangle) = a' \langle a''| a'\rangle = a' \delta_{a'a''}$$

پس عملگر مورد نظر به صورت زیر در پایه های خودش نوشته می شود:

$$A = \sum_{a'} a' |a'\rangle \langle a'| = \sum_{a'} a' \Lambda_{a'}$$

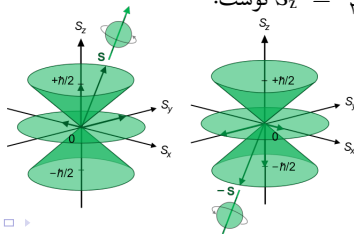
که به وضوح قطری است.

مثالی از کاربرد نمایش ماتریسی: توصیف ذرات اسپین ۱/۲

- در اینجا به عنوان کاربردی از نمایش ماتریسی فضای حالت و عملگرها، ذرات اسپین ۱/۲ مانند الکترون را توصیف خواهیم کرد.
- کت های پایه ای که ما در توصیف این ذرات استفاده خواهیم کرد $|S_z; \pm\rangle$ هستند که مانند گذشته برای سادگی آنها را با $|\pm\rangle$ نشان خواهیم داد. به صورت معادل می توان از $|S_x; \pm\rangle$ و یا $|S_y; \pm\rangle$ هم استفاده کرد؛ ولی این فقط یک انتخاب دلخواه پایه های فضا است و نتایج فیزیکی مساله در انتها بدون تغییر خواهند بود.
- با استفاده از این نمادگذاری، می توان عملگر همانی را به صورت زیر نوشت:

$$1 = |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|$$

حال با توجه به رابطه $A = \sum_{a'} a' |a'\rangle\langle a'|$ می توان عملگر S_z را به صورت $S_z = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)$ نوشت.



عملگرهای نردبانی ذرات اسپین ۱/۲

- تمرین: نشان دهید که عملگرهای $S_+ \equiv \hbar|+\rangle\langle+|$ و $S_- \equiv \hbar|-\rangle\langle-|$ غیر هرمیتی هستند.
- با وجود غیر هرمیتی بودن، این عملگرها که آنها را عملگرهای نردبانی می نامیم بسیار مفید هستند و در محاسبات به کار می آیند. حال تمرین زیر را جواب دهید.
- الف) نشان دهید که وقتی عملگر S_+ بر روی کت $|-\rangle$ عمل می کند کت $|+\rangle$ را به دست می دهد.
- ب) نشان دهید که وقتی عملگر S_+ بر روی کت $|+\rangle$ عمل می کند کت $|^0\rangle$ را به دست می دهد.
- پ) نشان دهید که وقتی عملگر S_- بر روی کت $|+\rangle$ عمل می کند کت $|-\rangle$ را به دست می دهد.
- ت) نشان دهید که وقتی عملگر S_- بر روی کت $|-\rangle$ عمل می کند کت $|^0\rangle$ را به دست می دهد.
- پس عملگر S_+ مقدار اسپین را به اندازه $\hbar$ افزایش می دهد و اگر مقدار اسپین قابل افزایش نبود، کت تهی را تحویل می دهد. همچنین، عملگر S_- مقدار اسپین را به اندازه $\hbar$ کاهش می دهد و اگر مقدار اسپین قابل کاهش نبود، کت تهی را تحویل می دهد.
- بعدا نشان خواهیم داد
$$S_{\pm} = S_x \pm iS_y$$

نمایش ماتریسی ذرات اسپین ۱/۲

- در نمایش ماتریسی ذرات اسپین ۱/۲ مرسوم است که سطرها و ستون ها را بر اساس اندازه اسپین ها از بیشتر به کمتر تعیین می کنند. یعنی اولین سطر مربوط به بیشترین اسپین است، دومین سطر مربوط به اسپین بعدی و به همین ترتیب. به ویژه برای اسپین ۱/۲ می توان نوشت:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

بعدا برای اینگونه ماتریس ها جبر پائولی را خواهیم نوشت. فعلا تمرین ها را ببینید.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید اصول نمایش ماتریسی فضای حالت و عملگرها و مهم ترین نتایج آن را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ بنا به قضیه اثبات شده در این درس، ویژه کت ها و ویژه مقادیر عملگرهای هرمیتی چه خصوصیتی دارند؟
 - ۲ توضیح دهید که چطور می توانیم یک حالت دلخواه را بر حسب ویژه کت ها بسط دهیم.
 - ۳ رابطه بسترار را بنویسید. اهمیت رابطه بسترار در چیست؟
 - ۴ عملگر تصویر چیست؟ کار عملگر تصویر چیست؟
 - ۵ چطور می توان یک عملگر دلخواه را به شکل ماتریسی نوشت؟
 - ۶ توضیح دهید که چطور می توان با داشتن شکل ماتریسی یک عملگر، دوگان آن را به دست آورد.
 - ۷ یک عملگر هرمیتی در نمایش ماتریسی را چطور می توان تشخیص داد؟
 - ۸ کت ها و برا ها به ترتیب با چه نوع ماتریس هایی نمایش داده می شوند؟
 - ۹ توضیح دهید که چرا نمایش ماتریسی یک عملگر در ویژه پایه های آن عملگر شکل قطری خواهد داشت.
 - ۱۰ رابطه بسترار برای ذرات اسپین ۱/۲ چگونه نوشته می شود؟ عملگرهای S_x ، S_y و S_z چگونه نوشته می شوند؟
- اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین ها

- ماتریس های زیر را ماتریس های پائولی می نامند که ذرات اسپین ۱/۲ را توصیف می کنند.

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- برای این ماتریس ها روابط زیر را اثبات کنید.

$$\det \sigma_j = -1,$$

$$\text{tr} \sigma_j = 0,$$

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} \delta_{j3} & \delta_{j1} - i \delta_{j2} \\ \delta_{j1} + i \delta_{j2} & -\delta_{j3} \end{pmatrix},$$

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \sum_l \varepsilon_{jkl} \sigma_l,$$

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk} I,$$

$$[\sigma_1, \sigma_1] = 0$$

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$$

$$[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1$$

$$[\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2$$

$$\text{tr}(\sigma_j) = 0$$

$$\text{tr}(\sigma_j \sigma_k) = 2\delta_{jk}$$

$$\text{tr}(\sigma_j \sigma_k \sigma_l) = 2i\varepsilon_{jkl}$$

$$\text{tr}(\sigma_j \sigma_k \sigma_l \sigma_m) = 2(\delta_{jk}\delta_{lm} - \delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl})$$

مبحث بعدی: اندازه گیری در مکانیک کوانتومی

- در جلسه بعد پروسه اندازه گیری در مکانیک کوانتومی را معرفی خواهیم کرد، هرچند فعلا وارد جزئیات چالش برانگیز و مفهومی اندازه گیری سیستم های کوانتومی نخواهیم شد. سپس سیستم های اسپین $1/2$ را دوباره بررسی کرده و برخی نتایج آزمایش اشترن-گرلاخ را فرمولبندی خواهیم کرد.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما