

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

سری های دوگانه و بازآرایش جملات آنها

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- سری های دوگانه و بازآرایش جملات آنها
- سری های دوگانه
- بازآرایش جملات سری

سری های دوگانه

بازارایش جملات سری

سری های دوگانه

• سری های دوگانه سری هایی هستند که دو شمارنده (مانند i و j) دارند؛ مانند

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 i j^2 \qquad \sum_{i=0}^{13} \sum_{j=-1}^{19} \sin(i) \exp(2j)$$

البته می توان سری هایی با چندین اندیس نیز تعریف کرد:

$$\sum_{i=1}^{13} \sum_{j=1}^{11} \sum_{k=1}^{22} (3ik + j^2)$$

ولی ما فعلا درباره سری های دوگانه بحث خواهیم کرد. تعمیم از سری های دوگانه به سری های چندگانه نسبتا سراسر است.

• یک سری دوگانه را در حالت کلی به صورت زیر نمایش می دهیم. به معنی این سری دقت کنید:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} &= (a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{1N}) \\ &+ (a_{21} + a_{22} + a_{23} + \dots + a_{2N}) \\ &+ \dots \\ &+ (a_{M1} + a_{M2} + a_{M3} + \dots + a_{MN}) \end{aligned}$$

تمرین: به همین ترتیب همه جملات سری $\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 i j^2$ را بنویسید.

سری های دوگانه

- البته واضح است که با جابجایی علامت جمع‌بندی، مقدار سری تغییر نخواهد کرد.

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{mn} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{mn} = (a_{11} + a_{21} + a_{31} + \dots + a_{M1})$$

زیرا

$$+ (a_{12} + a_{22} + a_{32} + \dots + a_{M2})$$

$$+ \dots$$

$$+ (a_{1N} + a_{2N} + a_{3N} + \dots + a_{MN})$$

$$= (a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{1N})$$

$$+ (a_{21} + a_{22} + a_{23} + \dots + a_{2N})$$

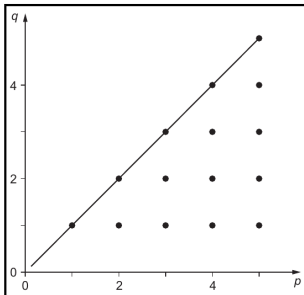
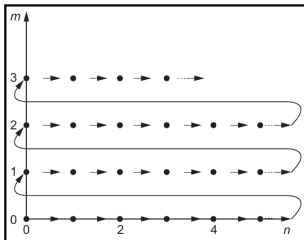
$$+ \dots$$

$$+ (a_{M1} + a_{M2} + a_{M3} + \dots + a_{MN}) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}$$

- هشدار: دقت کنید که در حالت کلی جابجایی اندیس ها مجاز نیست. با یک مثال این نکته را توضیح دهید.

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{mn} \neq \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{nm}$$

بازارایش جملات سری



روش های بسیار جالب و موثری برای بازارایی اندیس سری های چندگانه وجود دارد که می توانند به ساده سازی آنها کمک شایانی کنند. این سری ها می توانند سری های دوگانه نامتناهی را به یک سری تک اندیس تبدیل کنند و یا حتی مقدار آن سری را در اختیار ما قرار دهند.
سری دوگانه زیر را در نظر بگیرید:

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}$$

جملات این سری چگونه نوشته می شوند؟ به شکل مقابل (بالا) دقت کنید. این نقاط همگی در ربع اول دستگاه مختصات قرار دارند. همانطور که پیشتر گفته شد، مثلاً می توانیم همه جملات با اندیس $m = 0$ را بنویسیم، سپس همه جملات با اندیس $m = 1$ را نوشته و همینطور تا بینهایت ادامه دهیم.

ولی این فقط یکی از راه های نوشتن جملات است. تغییر متغیر زیر را فرض کنید:

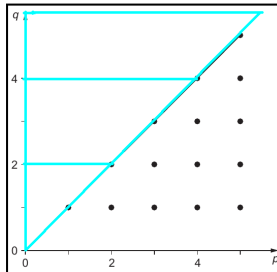
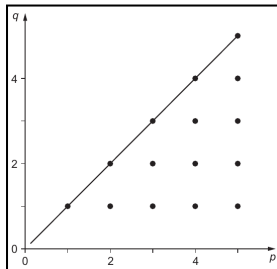
$$m = q, \quad n = p - q$$

تمرین: نشان دهید که در این صورت داریم

$$q \in [0, p], \quad p \in [0, \infty)$$

نقاط مربوط به این بازه ها را در شکل مقابل (پایین) ببینید.

بازآرایش جملات سری



تمرین: نشان دهید که با استفاده از متغیرهای p و q می توان سری دوگانه

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} \quad *$$

را به شکل زیر نوشت:

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p a_{p-q,q} \quad *$$

تمرین: البته می توانیم حدود متغیرهای جدید را به صورت

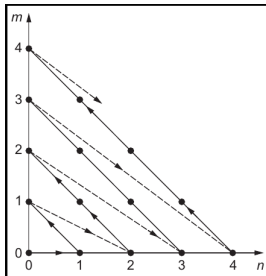
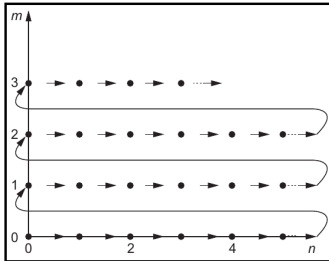
$$q \in [0, \infty), \quad p \in [q, \infty)$$

نیز فرض کنیم. این کار معادل با پیمایش فضای اندیس ها در ناحیه آبی رنگ شکل مقابل (پایین) است. نشان دهید که در این صورت سری دوگانه اخیر معادل است با

$$S = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=q}^{\infty} a_{p-q,q} \quad **$$

تمرین: جملات سری های $*$ و $**$ را نوشته و نشان دهید که صراحتاً با سری اصلی $*$ یکسان هستند؛ یعنی همه جملات سری در هر سه مورد پوشش داده می شوند (هر کدام فقط یکبار).

معنی بازارایش جملات سری چیست؟



معنی بازارایش جملات سری چیست؟
پاسخ: همانطور که گفته شد، در سری زیر

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}$$

ما جملات را به صورت شکل مقابل (بالا) در صفحه nm می شماریم. ولی وقتی سری را به صورت

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p a_{p-q,q}$$

می نویسیم، جملات به صورت شکل مقابل (پایین) در صفحه nm شمرده می شوند.

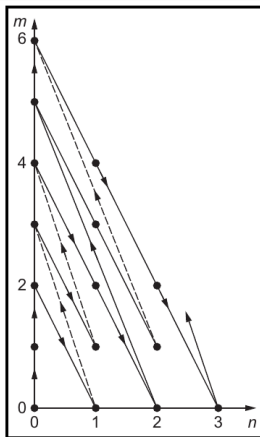
البته نتیجه یکسان است، ولی ترتیب نوشتن جملات متفاوت است.

تمرین: ترتیب نوشتن جملات سری

$$S = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=q}^{\infty} a_{p-q,q}$$

در صفحه nm چگونه است؟

یک روش دیگر برای بازارایش جملات سری



روش های دیگری نیز برای بازارایی جملات سری وجود دارند. مثلاً تغییر متغیر مقابل را فرض کنید:
 $n = s, \quad m = r - 2s$
 حال اگر در ابتدا بر روی متغیر s جمع بندی کنیم، آنگاه داریم:

$$s \in [0, [r/2]], \quad r \in [0, \infty)$$

در اینجا $[r/2]$ همان جزء صحیح عدد $r/2$ است. در نتیجه می توان سری

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} \quad *$$

را به صورت زیر نوشت:

$$S = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[r/2]} a_{s, r-2s} \quad ***$$

تمرین: جملات این سری را بنویسید و نشان دهید که با جملات سری * معادل است.

تمرین: نقاط شمارنده در صفحه rs را با رسم شکل نشان دهید.

تمرین: اگر در ابتدا متغیر r شمرده شود، سری دوگانه بالا چطور نوشته می شود؟

توجه: سری *** جملات را در صفحه nm به صورت مقابل می پیماید.

همگرایی سری های دوگانه

توجه: این نکته را بدون اثبات بپذیرید که اگر سری

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} \quad *$$

همگرا باشد، آنگاه هر سه سری

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p a_{p-q,q} \quad *$$

$$S = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=q}^{\infty} a_{p-q,q} \quad **$$

$$S = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[r/2]} a_{s,r-2s} \quad ***$$

نیز همگرا خواهند بود.

در ادامه از بازآرایی جملات سری های دوگانه بسیار بهره خواهیم برد.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید سری های دوگانه، بازآرایش آنها و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱ منظور از سری دوگانه چیست؟ یک مثال از سری دوگانه بنویسید.

۲ منظور از سری چندگانه چیست؟ یک مثال از سری چندگانه بنویسید.

۳ منظور از بازآرایش سری چندگانه چیست؟

۴ درباره انواع دیگر بازآرایش سری های دوگانه تحقیق کنید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیکی، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

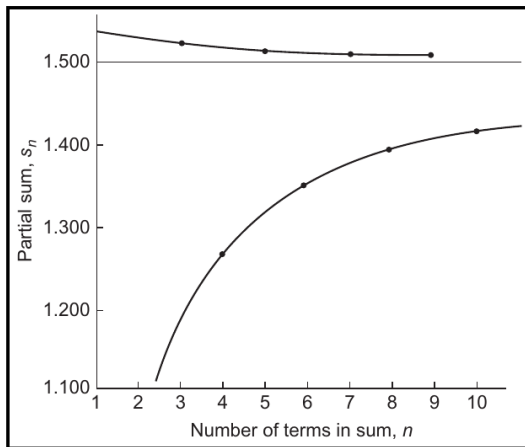


تمرین ها

- تمرینات موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- تمرینات موجود در صفحات ۲۰ و ۲۱ از ویرایش هفتم را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: اعمال جبری بر روی سری ها

در جلسه بعد با برخی اعمال جبری بر روی سری ها آشنا خواهیم شد.



- 1. Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- 2. Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- 3. Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- 4. Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- 5. Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

