

مقدمه ای بر دترمینان و ماتریس

ترانهاده و الحاقی یک ماتریس

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- حسین شناور مقدمه ای بر درمیان و ماتریس

- ۱ ترانهاده و الحاقی یک ماتریس
- ترانهاده و الحاقی یک ماتریس
- عملیات بر روی ضرب ماتریس ها

مرتبه ماتریس

- مفهوم ماتریس تکین را می توان با استفاده از مفهوم "مرتبه دترمینان" بهبود داد. عناصر ماتریس را به عنوان ضرایب یک دستگاه معادلات خطی مانند زیر در نظر بگیرید.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

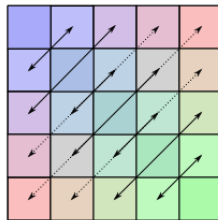
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.$$

- در این صورت مرتبه (rank) ماتریس به صورت تعداد معادلات مستقل خطی این دستگاه تعریف می شود. بنابراین، یک ماتریس غیر تکین $n \times n$ مرتبه ای برابر با n خواهد داشت در حالی که مرتبه یک ماتریس تکین $n \times n$ از مقدار n کمتر خواهد بود.

- بنابراین، مرتبه ماتریس در واقع یک مقیاس از تکینگی ماتریس است: اگر فقط یکی از معادلات را بتوان به صورت ترکیب خطی از معادلات دیگر نوشت، آنگاه مرتبه ماتریس برابر است با $r = n - 1$. ولی اگر دو معادله را بتوان به صورت ترکیب خطی از معادلات دیگر نوشت، آنگاه مرتبه ماتریس برابر است با $r = n - 2$ و به همین صورت. در فصل ششم با مفهوم مرتبه ماتریس و چگونگی تعیین آن دوباره برخورد خواهیم کرد.

ترانهاد یک ماتریس

- ترانهاد (transpose) یک ماتریس مانند A را با A^T یا $\tilde{A}$ نشان می دهند. ترانهاد ماتریسی است که با تعویض جای سطرها و ستون های ماتریس اصلی به دست می آید. بنابراین، در عمل ترانهاد برای یک ماتریس مربعی در واقع جای عناصر نسبت به قطر اصلی بازتاب می یابد. شکل زیر را ببینید.



هرچند، ترانهاد برای ماتریس های غیرمربعی نیز تعریف می شود. در واقع، اگر A یک ماتریس $n \times m$ باشد، ترانهاد آن یک ماتریس $m \times n$ خواهد بود.

- تمرین: ترانهاد ماتریس های زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 11 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 10 & -2 \\ 3 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad -1 \quad 7 \quad 8 \quad 3]$$

ترانهاده یک ماتریس

تمرین: ترانهاده ماتریس های زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 11 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 10 & -2 \\ 3 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$A^T = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 9 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 11 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 10 & -5 & 2 \\ -2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

بنابراین عناصر ماتریس ترانهاده در حالت کلی با استفاده از رابطه زیر به دست می آیند.

$$(\tilde{A})_{ij} = A_{ij}^T = a_{ji}$$

توجه کنید ترانهاده یک ماتریس سطری یک ماتریس ستونی است و برعکس:

$$\text{if } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{then } \tilde{\mathbf{x}} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$$

ماتریس های متقارن

- ماتریسی که تحت عمل ترانهاد تغییر نکند را ماتریس متقارن می نامند. مثال زیر را ببینید.

Symmetric matrix



$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

مزدوج مختلط ماتریس ها

- برای ماتریس هایی که شامل عناصر مختلط هستند، می توان مزدوج مختلط (complex conjugate) ماتریس را تعریف کرد. مزدوج مختلط یک ماتریس مانند A را با A^* و یا گاهی اوقات با $\overline{A}$ نشان می دهند و آن را با تبدیل همه i ها در درایه های ماتریس به $-i$ می سازند. مثال زیر را ببینید:



Complex Conjugate

$$\begin{bmatrix} 3 & 3+i \\ 3-i & 2 \end{bmatrix}$$

 A

$$\begin{bmatrix} 3 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{bmatrix}$$

 $\overline{A}$

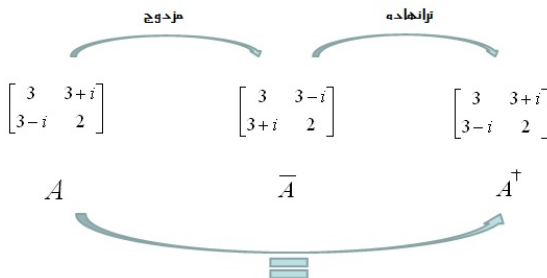
- توجه کنید که در عمل مزدوج مختلط جای عناصر ماتریس تغییر نمی کند.

الحاقی یک ماتریس

- الحاقی (adjoint) یک ماتریس حاصل هر دو عمل ترانهاده و مزدوج مختلط (با ترتیب دلخواه) است. الحاقی یک ماتریس را با $A^\dagger$ نشان می دهند (بخوانید ای دگر). بنابراین می توان نوشت:

$$A^\dagger = (A^T)^* = (A^*)^T \quad \Leftrightarrow \quad (A^\dagger)_{ij} = a_{ji}^*$$

مثال زیر را ببینید.



- توجه کنید که در عمل الحاقی جای عناصر ماتریس تغییر می کند.

رد یک ماتریس

- رد (trace) یک ماتریس برای ماتریس های مربعی تعریف می شود و برابر است با مجموع عناصر روی قطر اصلی آن ماتریس. بنابراین، برای یک ماتریس مربعی $n \times n$ داریم:

$$\text{trace}(A) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

با توجه به تعریف جمع ماتریس ها می توان برای دو ماتریس با ابعاد برابر به راحتی اثبات کرد که

$$\text{trace}(A + B) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B)$$

همچنین، می توان به راحتی اثبات کرد که رد حاصلضرب دو ماتریس مستقل از ترتیب ضرب آنها است:

$$\begin{aligned} \text{trace}(AB) &= \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} \\ &= \sum_j (BA)_{jj} = \text{trace}(BA). \end{aligned}$$

- توجه کنید که حتی اگر داشته باشیم $AB \neq BA$ ، باز هم رابطه بالا برقرار است. از اینجا می توان نتیجه گرفت که رد جابجاگر ماتریس ها همیشه صفر است.
- $$\text{trace}([A, B]) = 0$$

رد یک ماتریس

● حال فرض کنید که می خواهیم $\text{trace}(ABC)$ را حساب کنیم. در این صورت می توان حاصلضرب ماتریسی را به هر دو صورت $A(BC)$ و یا $(AB)C$ نوشت. در نتیجه رد این حاصلضرب برابر است با

$$\text{trace}(ABC) = \text{trace}(BCA) = \text{trace}(CAB)$$

ولی توجه کنید که این عبارت برابر با جایگشت های غیر دوره ای ABC نیست:

$$\text{trace}(ABC) \neq \text{trace}(CBA)$$

● تمرین: همه ردهای برابر با $\text{trace}(CBA)$ را بنویسید.

● تمرین: اثبات کنید که اگر α یک اسکالر باشد، آنگاه $\text{trace}(\alpha A) = \alpha \text{trace}(A)$.

● بسیار مهم: با توجه به روابط

$$\text{trace}(A + B) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B) \quad \text{trace}(\alpha A) = \alpha \text{trace}(A)$$

نتیجه می گیریم که رد یک عمل خطی است، یعنی

$$\text{trace}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{trace}(A) + \beta \text{trace}(B)$$

● پرسش: آیا دترمینان یک عمل خطی است؟ چرا؟

ترانواده حاصلضرب دو ماتریس

• حالا می خواهیم تاثیر عمل های ترانواده، الحاقی و وارون بر حاصلضرب دو ماتریس را بیان کنیم.

• ترانواده حاصلضرب دو ماتریس برابر است با حاصلضرب ترانواده آن دو ماتریس "با ترتیب معکوس":

$$(AB)^T = B^T A^T$$

توجه کنید که اگر حاصلضرب ماتریسی AB از نظر ابعاد درست باشد، آنگاه حاصلضرب ماتریسی $B^T A^T$ نیز از لحاظ ابعادی درست است.

• اثبات رابطه بالا: فرض کنید $A_{m \times n}$ و $B_{n \times p}$ در این صورت

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

یک ماتریس $m \times p$ خواهد بود. از طرفی $(AB)^T$ یک ماتریس $p \times m$ خواهد بود با مولفه های

$$(AB)^T_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

همچنین $B^T A^T$ یک ماتریس $p \times m$ خواهد بود با مولفه های

$$(B^T A^T)_{ji} = \sum_{k=1}^n b_{kj} a_{ik}$$

پس داریم $(AB)^T = B^T A^T$.

الحاقی حاصلضرب دو ماتریس

- الحاقی حاصلضرب دو ماتریس برابر است با حاصلضرب الحاقی آن دو ماتریس "با ترتیب معکوس":

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$$

- اثبات اول: فرض کنید $A_{m \times n}$ و $B_{n \times p}$ ، در این صورت

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

یک ماتریس $m \times p$ خواهد بود. از طرفی $(AB)^{\dagger}$ یک ماتریس $p \times m$ خواهد بود با مولفه های

$$(AB)_{ji}^{\dagger} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^* b_{kj}^*$$

همچنین $B^{\dagger}A^{\dagger}$ یک ماتریس $p \times m$ خواهد بود با مولفه های

$$(B^{\dagger}A^{\dagger})_{ji} = \sum_{k=1}^n b_{kj}^* a_{ik}^*$$

پس داریم $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$.

- اثبات دوم: با استفاده از ترانهاد حاصلضرب دو ماتریس داریم:

$$(AB)^{\dagger} = \left((AB)^T \right)^* = \left(B^T A^T \right)^* = (B^T)^* (A^T)^* = B^{\dagger} A^{\dagger}$$

وارون حاصلضرب دو ماتریس

- وارون حاصلضرب دو ماتریس برابر است با حاصلضرب وارون آن دو ماتریس "با ترتیب معکوس":

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

توجه کنید که برای اطمینان از درستی رابطه بالا باید هر دو ماتریس A^{-1} و B^{-1} وجود داشته باشند (غیر تکین باشند).

- اثبات: رابطه

$$(AB)(AB)^{-1} = I$$

را در نظر بگیرید. طرفین رابطه بالا را از سمت چپ در $B^{-1}A^{-1}$ ضرب کنید. در این صورت داریم:

$$B^{-1}A^{-1}(AB)(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}I$$

که البته به راحتی رابطه مورد نظر ما را نتیجه خواهد داد:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- تمرین: درستی روابط زیر را نشان دهید.

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad (A - B)^T = A^T - B^T \quad (kA)^T = kA^T$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \quad (A^T)^T = A$$

نمایش ماتریسی بردارها

- تاکنون متوجه شده ایم که برای ماتریس های ستونی، عملیات های جمع ماتریسی و ضرب ماتریس در اسکالر بسیار شبیه به عملیات های متناظر در جبر بردارها هستند. این مشاهده پایه فرمولبندی ماتریسی بردارهاست. مثلا، می توان دید که نتیجه ضرب داخلی دو بردار یک اسکالر است. به همین صورت، می توان از دو ماتریس ستونی یک اسکالر ساخت، به شرطی که یکی از آنها را با عمل ترانهاده تبدیل به یک ماتریس سطری کنیم.
- مثلا برای بردارها در فضای حقیقی سه بعدی $\mathbb{R}^3$ داریم:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \longrightarrow (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

یعنی ضرب داخلی دو بردار با مولفه های حقیقی برابر است با ضرب ماتریسی دو ماتریس ستونی معادل، به شرطی که اولی ترانهاده شود:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{a}^T \mathbf{b}$$

• تمرین: نشان دهید که $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$

• تمرین: نشان دهید که اگر عناصر ماتریس حقیقی باشند، $\mathbf{a}^T \mathbf{a}$ همیشه مثبت است. این کمیت در واقع مجذور اندازه بردار $\mathbf{a}$ می باشد.

نمایش ماتریسی بردارها

- تمرین: نشان دهید که اگر عناصر ماتریس مختلط باشند، $\mathbf{a}^T \mathbf{a}$ همیشه مثبت نیست. در این حالت نشان دهید که $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ مثبت است.
- اگر مولفه ها مختلط باشند، آنگاه باید از عمل الحاقی برای ساختن یک ضرب داخلی بامعنی استفاده کنیم. با این موضوع در مکانیک کوانتومی بیشتر آشنا خواهیم شد.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید ترانهاده و الحاقی ماتریس ها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ منظور از مرتبه ماتریس چیست؟
- ۲ منظور از ترانهاده یک ماتریس چیست؟
- ۳ منظور از ماتریس متقارن چیست؟ درباره ماتریس پادمقارن تحقیق کنید.
- ۴ منظور از مزدوج مختلط ماتریس چیست؟
- ۵ منظور از الحاقی ماتریس چیست؟
- ۶ منظور از رد ماتریس چیست؟
- ۷ منظور از مزدوج مختلط ماتریس چیست؟ چرا رد یک عمل خطی است؟
- ۸ ترانهاده، الحاقی و وارون حاصلضرب دو ماتریس چه رابطه ای با آن دو ماتریس دارند؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراغوش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

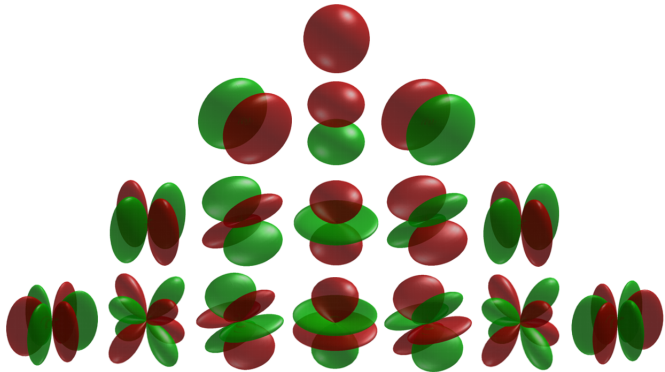


تمرین

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: ماتریس های متعامد، یکانی و هرمیتی

• در جلسه بعد درباره ماتریس های متعامد، یکانی و هرمیتی بحث خواهیم کرد.



منابع

- ➊ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ➋ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ➌ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ➍ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ➎ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ➏ <https://math.libretexts.org/>

با سپاس از توجه شما