

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

اعمال جبری بر روی سری های نامتناهی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱. اعمال جبری بر روی سری های نامتناهی
- اعمال جبری بر روی سری ها
- بهبود همگرایی سری های نامتناهی

- اعمال جبری بر روی سری ها
- بهبود همگرایی سری های نامتناهی

اعمال جبری

- در اینجا می خواهیم با اعمال جبری بر روی سری های نامتناهی آشنا شویم.
- می توان اثبات کرد که جملات یک سری مطلق-همگرا را می توان با استفاده از قوانین آشنای جبر بازنویسی کرد. در نتیجه شرط مطلق-همگرایی در اینجا اهمیت اساسی دارد. به گزاره های زیر دقت کنید:
- اگر یک سری نامتناهی مطلق-همگرا باشد، مقدار مجموع سری مستقل از ترتیب جمع کردن جملات با یکدیگر است.
- جملات دو سری نامتناهی مطلق-همگرا را می توان جمله به جمله با هم جمع کرد، از هم کم کرد و یا در هم ضرب کرد و سری حاصل نیز مطلق-همگرا خواهد بود.
- اگر کلیت دو سری مطلق-همگرا را در هم ضرب کنیم، حد حاصلضرب این دو سری برابر است با حاصلضرب حد آن دو سری. سری حاصلضرب که یک سری دوگانه (double series) می باشد نیز یک سری مطلق-همگراست.
- دقت کنید که نتایج بالا برای دو سری شرطی-همگرا برقرار نیستند؛ هرچند اگر یکی از سری ها شرطی-همگرا باشد (و دیگری مطلق-همگرا)، برخی از این نتایج درست خواهند بود.

شوک کوشی

● کوشی اولین کسی بود که متوجه شد ممکن است با تغییر آرایش یک سری، مقدار آن تغییر کند!!! مثلاً می توان اثبات کرد:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots$$

که حاصل آن عددی کمتر از ۱ می شود.

● تمرین: نشان دهید که سری بالا به مقدار $\ln 2$ نزدیک می شود.

● تمرین: نشان دهید که با بازنویسی ترتیب جملات سری هارمونیک تناوبی به صورت زیر به نتیجه متفاوتی می رسید.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2} \ln(2)$$

● تمرین: نشان دهید که با بازنویسی ترتیب جملات سری هارمونیک تناوبی به صورت زیر به مقدار $\frac{3}{4}$ می رسید.

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) \\ & - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{25}\right) - \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{35}\right) - \left(\frac{1}{8}\right) + \cdots \end{aligned}$$

شوگ کوشی

در واقع وقتی جملات سری را به صورت زیر می نویسیم

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{25}\right) - \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{35}\right) - \left(\frac{1}{8}\right) + \dots$$

مجموع جملات را می توان به صورت زیر دید:

$$s_1 = 1.5333 \quad s_2 = 1.0333$$

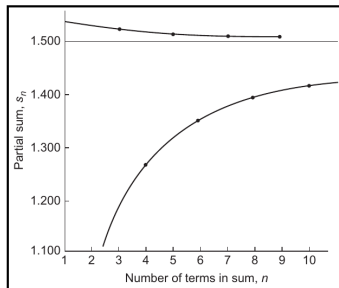
$$s_3 = 1.5218 \quad s_4 = 1.2718$$

$$s_5 = 1.5143 \quad s_6 = 1.3476$$

$$s_7 = 1.5103 \quad s_8 = 1.3853$$

$$s_9 = 1.5078 \quad s_{10} = 1.4078.$$

رفتار این مجموع، همانطور که شکل زیر نشان می دهد، به عدد ۱٫۵ همگرا می شود! در واقع می توان با جابجایی جملات این سری کاری کرد که مقدار آن به هر عددی نزدیک شده و یا حتی واگرا شود!



قضیه ریمان

همانطور که نتیجه بالا نشان داد، مقدار یک سری شرطی-همگرا را می توان با تغییر در ترتیب جملات سری تغییر داد، به صورتی که این مقدار به هر عددی همگرا شده و یا حتی واگرا شود! این نتیجه را گاهی اوقات قضیه ریمان می نامند.

مثال بعدی خطر ضرب سری های شرطی-همگرا را به خوبی نشان می دهد.



مجذور یک سری شرطی-همگرا می تواند واگرا شود!

- در این مثال نشان خواهیم داد که مجذور یک سری شرطی-همگرا می تواند واگرا شود! سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ با توجه به معیار لایبنیتس همگراست. ولی مجذور آن، یعنی

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right]^2 = \sum_n (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{1}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n-2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{1}{\sqrt{1}} \right]$$

همگرا نیست! چرا؟

دقت کنید که در عبارت بالا در واقع دو سری داریم:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-2}}{\sqrt{mn}}$$

تمرین: همانطور که در جلسه پیش گفته شد، این نوع سری ها را سری دوگانه می نامند. با بازآرایش جملات سری دوگانه، درستی عبارت بالا را نشان دهید.

پاسخ

پاسخ: سری

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-2}}{\sqrt{mn}}$$

را با استفاده از تغییر متغیرهای $m = q$, $n = p - q$

که در بازه های زیر تعریف می شوند

$$q \in (0, p), \quad p \in (0, \infty)$$

می توان به صورت زیر نوشت:

$$S = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{(-1)^{q+p-q-2}}{\sqrt{q(p-q)}} = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left(\sum_{q=1}^p \frac{1}{\sqrt{q(p-q)}} \right)$$

حال با نوشتن سری داخل پرانتز (...) داریم:

$$S = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{\sqrt{1 \times (p-1)}} + \frac{1}{\sqrt{2 \times (p-2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(p-1) \times 1}} \right)$$

که همان نتیجه مورد ادعاست.

مجذور یک سری شرطی-همگرا می تواند واگرا شود!

- بنابراین توانستیم سری اولیه را به صورت زیر تبدیل کنیم.

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right]^2 = \sum_n (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{1}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n-2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{1}{\sqrt{1}} \right]$$

حال می خواهیم نشان دهیم که این سری واگراست.

اثبات واگرایی: جمله عمومی در سری بالا شامل $n-1$ جمله می باشد که همگی آنها از $\frac{1}{\sqrt{n-1}} \times \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ بزرگتر می باشند. بنابراین کلیه جملات موجود در [...] از مقدار $\frac{n-1}{n}$ بزرگتر هستند. پس جمله عمومی سری به سمت صفر میل نمی کند و بنابراین سری واگراست.

- نتیجه اخلاقی این مثال ها: مراقب سری های شرطی-واگرا باشیم. اعمال جبری بر روی این سری ها (بدون بررسی های دقیق) ممکن است به نتایج کاملاً اشتباهی منجر شود.

بهبود همگرایی سری های نامتناهی

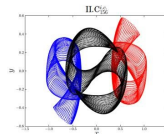
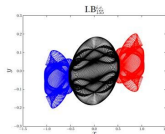
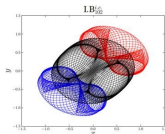
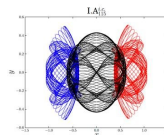
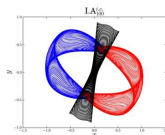
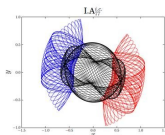
تاکنون درباره همگرایی و یا واگرایی سری های نامتناهی صحبت کرده ایم. ولی حتی اگر یک سری همگرا باشد، آهنگ همگرایی آن نیز می تواند بسیار مهم باشد (از لحاظ کاربردی).

در واقع روش سری ها عملا کلی ترین روش برای یافتن جواب معادلات دیفرانسیل است. ولی اگر جواب سری معادله با سرعت کافی همگرا نشود، عملا جواب مفیدی نخواهد بود.

مثلا مساله سه جسمی را در نظر بگیرید:

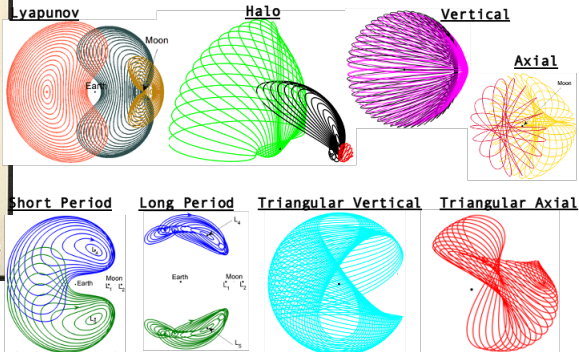
جواب های عددی این دستگاه معادلات را در زیر می بینید.

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3}.\end{aligned}$$



قدیمی ترین مساله حل نشده!

گفته می شود که این مساله قدیمی ترین مساله حل نشده در ریاضیات و فیزیک است. هرچند، در سال های ۱۹۰۷ تا ۱۹۱۲ ساندمان (Karl F. Sundman) جواب های کلی این دستگاه معادله را به صورت سری یافت! ولی این جواب ها به حدی کُند همگرا می شوند که برای هر مساله عملی در نجوم باید $10^{80000000}$ جمله از سری را محاسبه کنیم. چنین کاری غیر عملی است. بنابراین مساله سه جسمی همچنان ”بدون جواب تحلیلی“ فرض می شود.



بهبود همگرایی سری های نامتناهی

$$\alpha_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

$$\alpha_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4},$$

$$\alpha_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18},$$

.....

$$\alpha_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p)} = \frac{1}{p!}.$$

البته روش هایی وجود دارند که با استفاده از آن ها می توان آهنگ همگرایی سری ها را افزایش داد و بنابراین از سری ها به صورت کاربردی تری استفاده کرد.

ما در اینجا روش کومر را معرفی می کنیم. در این روش، یک سری با همگرایی کند را به صورت ترکیب خطی از سری هایی با مقادیر معلوم می نویسیم. به ویژه استفاده از سری های مقابل (تمرین ۱,۵,۳ را ببینید) و همچنین نوشتن سری ها بر حسب توابع زتای ریمان با مقادیر مشخص مرسوم است.

این روش را در ادامه با دو مثال توضیح خواهیم داد.

s	$\zeta(s)$
2	1.64493 40668
3	1.20205 69032
4	1.08232 32337
5	1.03692 77551
6	1.01734 30620
7	1.00834 92774
8	1.00407 73562
9	1.00200 83928
10	1.00099 45751

مثال: تعیین مقدار $\zeta(3)$

$$\alpha_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

$$\alpha_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4},$$

$$\alpha_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18},$$

.....

$$\alpha_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)} = \frac{1}{p \cdot p!}.$$

s	$\zeta(s)$
2	1.64493 40668
3	1.20205 69032
4	1.08232 32337
5	1.03692 77551
6	1.01734 30620
7	1.00834 92774
8	1.00407 73562
9	1.00200 83928
10	1.00099 45751

به عنوان اولین مثال می خواهیم مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} = \zeta(3)$ را تعیین کنیم.

برای اینکار توجه می کنیم که در تعریف سری های مقابل، سری α_2 برای مقادیر بزرگ n متناسب با n^{-3} می باشد. بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} + a\alpha_2 = \zeta(3) + \frac{a}{4}$$

دقت کنید که یک مقدار ثابت به دو طرف معادله اصلی اضافه شده است. همچنین دقت کنیم که ما در این معادله از α_1 استفاده نکرده ایم زیرا α_1 شامل جملات با رفتار حدی n^{-2} هستند؛ یعنی کندتر از $\zeta(3)$ همگرا می شوند.

تمرین: نشان دهید که اگر دو جمله سمت چپ را با هم ترکیب کنیم و مخرج مشترک جملات را محاسبه کنیم، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^3} + \frac{a}{n(n+1)(n+2)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(1+a) + 3n+2}{n^3(n+1)(n+2)}$$

حال توجه می کنیم که با انتخاب $a = -1$ جمله پیشرو در صورت کسر بالا حذف شده و در نتیجه سری مورد نظر با سرعت بسیار بیشتری همگرا می شود:

$$\zeta(3) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3(n+1)(n+2)}$$

مثال: تعیین مقدار $\zeta(3)$

$$\alpha_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

$$\alpha_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4},$$

$$\alpha_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18},$$

.....

$$\alpha_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)} = \frac{1}{p \cdot p!}.$$

s	$\zeta(s)$
2	1.64493 40668
3	1.20205 69032
4	1.08232 32337
5	1.03692 77551
6	1.01734 30620
7	1.00834 92774
8	1.00407 73562
9	1.00200 83928
10	1.00099 45751

به عنوان اولین مثال می خواهیم مقدار $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ را تعیین کنیم.

عبارت به دست آمده برای $\zeta(3)$

$$\zeta(3) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3(n+1)(n+2)}$$

چندان به نظر زیبا نمی آید ولی این سری به صورت n^{-4} همگرا می شود. حتی در تمرین ۱۶، ۱، ۱ خواهیم دید که می توان سری را با توان n^{-5} همگرا کرد.

الف) مقدار $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ را با استفاده از چهار جمله اول سری بیابید و با مقدار $\zeta(3)$ از جدول مقابل مقایسه کنید.

$$\zeta(3) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3(n+1)(n+2)}$$

ب) مقدار $\zeta(3)$ از جدول مقابل مقایسه کنید.

پ) کدام روش دقیقتر است؟

الف) مقادیر سری های $\zeta(4)$ و $\zeta(5)$ را با استفاده از روش بالا بازنویسی کرده به صورتی که سریعتر همگرا شوند.

ب) مقادیر $\zeta(4)$ و $\zeta(5)$ را یافته و با مقادیر جدول مقابل مقایسه کنید.

یک مثال دیگر از بهبود همگرایی سری ها

می خواهیم مقدار $S = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(1+n^2)$ را تعیین کنیم.
پاسخ: برای اینکار با توجه به اینکه

$$\frac{1}{1+n^2} = \frac{n^{-2}}{1+n^{-2}}$$

باید تقسیم n^{-2} بر $1+n^{-2}$ را انجام دهیم. اینکار را می توان به دو روش ”تقسیم چکشی“ و یا ”تقسیم ترکیبی“ انجام داد. اگر به یکی از این روش ها مسلط نیستید، می توانید درس های زیر را ببینید.

درس پنجم: تقسیم چکشی چندجمله ای ها

کتاب سوم: چندجمله ای ها و توابع گویا

درس ششم: تقسیم ترکیبی چندجمله ای ها و قضایای باقیمانده و عامل ها

دکتر حسین شناور

موسسه فرهنگ دانش



دکتر حسین شناور

درس پنجم: تقسیم چکشی چندجمله ای ها

کتاب سوم: چندجمله ای ها و توابع گویا

درس ششم: تقسیم ترکیبی چندجمله ای ها و قضایای باقیمانده و عامل ها

دکتر حسین شناور

موسسه فرهنگ دانش



دکتر حسین شناور

یک مثال دیگر از بهبود همگرایی سری ها

می خواهیم مقدار $S = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(1+n^2)$ را تعیین کنیم.
پاسخ: ما تقسیم ۱ بر $1+n^{-2}$ را با استفاده از تقسیم چکشی انجام می دهیم:

$$\begin{array}{r}
 1 \quad | \quad 1 + n^{-2} \\
 \underline{-(1 + n^{-2})} \\
 -n^{-2} \\
 \underline{-(-n^{-2} - n^{-4})} \\
 n^{-4} \\
 \underline{-(n^{-4} + n^{-6})} \\
 -n^{-6}
 \end{array}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$(1+n^2)^{-1} = n^{-2} \left(1 - n^{-2} + n^{-4} - \frac{n^{-6}}{1+n^{-2}} \right)$$

$$= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} - \frac{1}{n^8 + n^6}.$$

و یا با جمع بندی بر روی این جملات می توان نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \zeta(2) - \zeta(4) + \zeta(6) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8 + n^6}.$$

در نتیجه سری اولیه به سه مقدار معلوم و یک سری که به صورت n^{-8} همگرا می شود، کاهش پیدا می کند.
تمرین: سه جمله اول سری موجود در سمت راست را تعیین کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید اعمال جبری بر روی سری ها، افزایش سرعت همگرایی و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ قوانین موجود بر جبر سری های مطلق-همگرا را به صورت خلاصه بیان کنید.
- ۲ با ذکر یک مثال توضیح دهید که مجموع جملات یک سری شرطی همگرا می تواند با تغییر ترتیب جملات سری عوض شود.
- ۳ قضیه ریمان در سری ها را بیان کنید.
- ۴ چرا گاهی اوقات افزایش سرعت همگرایی سری های نامتناهی لازم است؟
- ۵ روش کومر در بهبود همگرایی سری ها را به صورت خلاصه توضیح دهید.
- ۶ اساس تقسیم چکشی را به صورت خلاصه توضیح دهید.
- ۷ اساس تقسیم ترکیبی را به صورت خلاصه توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراوانش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

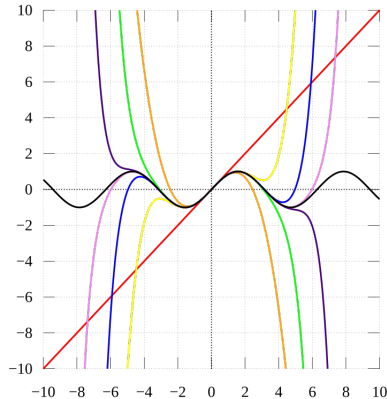


تمرین ها

- تمرینات موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- تمرینات موجود در صفحات ۲۰ و ۲۱ از ویرایش هفتم را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: سری توابع

- در جلسه بعد با سری توابع آشنا خواهیم شد. اینها توابعی هستند که علاوه بر یک شمارنده به یک متغیر پیوسته نیز بستگی دارند. بحث همگرایی این سری ها بسیار مهم خواهد بود.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

