

مقدمه ای بر دترمینان و ماتریس روش حذفی گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ روش حذفی گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی
- روش حذفی گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی
- معنی هندسی روش حذفی گاوس

روش حذفی گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی

- روش های زیادی برای حل دستگاه معادلات خطی، تعیین دترمینان ها و یافتن وارون ماتریس ها تاکنون معرفی شده اند. هرچند، همه روش های مدرن (بر اساس محاسبات کامپیوتری) بر روش حذفی گاوس بنا شده اند. بنابراین لازم است که این روش را بیاموزیم. قدرت این روش را با یک مثال توضیح خواهیم داد.

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$3x + 2y + z = 11$$

$$2x + 3y + z = 13$$

$$x + y + 4z = 12.$$

- بنا به روش گاوس ما از اولین معادله استفاده می کنیم تا اولین متغیر، یعنی x ، را از دو معادله باقیمانده حذف کنیم. آنگاه دو معادله باقی می ماند. حال از اولین معادله باقیمانده متغیر y را حذف می کنیم تا متغیر نهایی z باقی بماند. حال برمی گردیم و به ترتیب مقادیر y و x را پیدا می کنیم.

$$x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{11}{3}$$

$$x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{13}{2}$$

$$x + y + 4z = 12.$$

- ۱- برای محاسبات بعدی ساده تر است که هر سطر را بر ضریب اولین متغیر تقسیم کنیم. معادلات روبرو را ببینید.

روش حذفی گاوس

- ۲- مقدار x را از معادله اول برحسب y و z یافته و در معادله دوم و سوم قرار دهید. معادلات دوم و سوم فقط بر حسب y و z بدست خواهد آمد. توجه: معادله اول را نگه دارید.

$$x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{11}{3}$$

$$\frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z = \frac{17}{6}$$

$$\frac{1}{3}y + \frac{11}{3}z = \frac{25}{3}$$

- ۳- معادلات دوم و سوم را بر ضریب y تقسیم کنید تا ضریب y یک شود.

$$x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{11}{3}$$

$$y + \frac{1}{5}z = \frac{17}{5}$$

$$y + 11z = 25.$$

روش حذفی گاوس

- ۴- مقدار y را بر حسب z از معادله دوم یافته و در معادله سوم قرار دهید. حال مقدار z معلوم می شود.

$$x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{11}{3}$$

$$y + \frac{1}{5}z = \frac{17}{5}$$

$$\frac{54}{5}z = \frac{108}{5} \longrightarrow z = 2.$$

- ۵- به معادله دوم برگردید و مقدار y را تعیین کنید.

$$y + \frac{1}{5} \times 2 = \frac{17}{5} \longrightarrow y = 3,$$

- ۶- به معادله اول برگردید و مقدار x را تعیین کنید.

$$x + \frac{2}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 2 = \frac{11}{3} \longrightarrow x = 1$$

روش گاوس برای تعیین مقدار دترمینان ها

● ممکن است در ابتدا روش گاوس در مقایسه با روش کرامر چندان هوشمندانه به نظر نیاید. ولی این روش الگوریتمی بسیار قوی برای محاسبات کامپیوتری فراهم می کند بنابراین از دیدگاه محاسبات مدرن اهمیت بنیادین دارد.

● اگر از ضرایب سمت راست معادلات بالا صرف نظر کنیم، آنگاه می توانیم از روش حذفی گاوس برای تبدیل دترمینان به یک دترمینان بالامثلثی (و یا پایین مثلثی) و بنابراین محاسبه سریعتر مقدار آن استفاده کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{After Gaussian elimination}} A = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

البته توجه کنید که پروسه تقسیم جملات بر ضرایب متغیر اول باعث تغییر در مقدار دترمینان خواهد شد. این نکته را باید نهایتاً لحاظ کنیم. مثلاً دترمینان ضرایب دستگاه اخیر

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

یکبار بر ۳ و ۲ تقسیم شد و بار دیگر در $\frac{6}{5}$ ضرب شد.

روش حذفی گاوس برای تعیین مقدار دترمینان

- بنابراین وقتی دترمینان ضرایب دستگاه تبدیل یافته را یافتیم، باید آن را در ۳ و ۲ ضرب و بر $\frac{6}{5}$ و ۳ تقسیم کنیم.

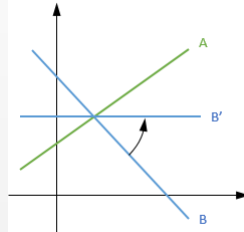
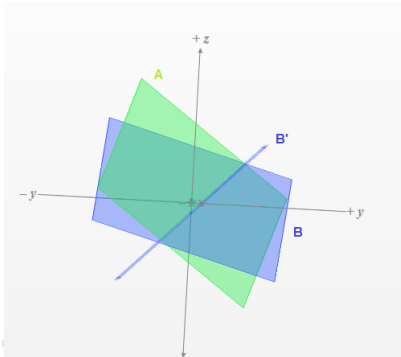
$$D = (3)(2) \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{54}{5} \end{vmatrix} = \frac{5}{3} \frac{54}{5} = 18$$

با توجه به اینکه دترمینان بالا یک دترمینان بالامتثلی است، مقدار آن برابر است با حاصلضرب عناصر روی قطر اصلی.

- در کتاب های مختلف شیوه های متفاوتی به عنوان روش حذفی گاوس معرفی شده اند. ولی اساس همه این روش ها عملاً مشابه است.

معنی هندسی روش حذفی گاوس

- دستگاه دو معادله و دو مجهول عملاً به معنی پیدا کردن نقطه تقاطع دو خط در صفحه است. روش گاوس در دو بعد به این معنی است که یکی از خط‌ها را حول نقطه تقاطع دو خط دوران می‌دهیم (بدون اینکه نقطه تقاطع دو خط جابجا شود) و بنابراین مقدار z را می‌یابیم. مقدار x را می‌یابیم.
- پرسش: دستگاه سه معادله و سه مجهول عملاً به معنی پیدا کردن نقطه تقاطع سه صفحه در فضا است. شکل روبرو را ببینید و مفهوم روش گاوس در سه بعد را توضیح دهید.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید روش گاوس برای یافتن جواب دستگاه معادلات خطی، ویژگی های آن و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱. اساس روش حذفی گاوس برای حل معادلات خطی را توضیح دهید.

۲. اساس روش حذفی گاوس برای پیدا کردن مقدار دترمینان ها را توضیح دهید.

۳. معنی هندسی روش حذفی گاوس در دو و سه بعد را توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

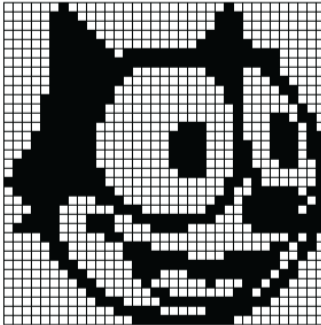
فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- تمرینات صفحات ۹۳ تا ۹۵ از ویرایش هفت کتاب آرفکن را حل کنید.

در جلسه بعد ماتریس ها را معرفی خواهیم کرد.

[illegible]

منابع

- ➊ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ➋ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ➌ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ➍ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ➎ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ➏ <https://math.libretexts.org/>

با سپاس از توجه شما

